ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2006. Серия 1. Том 13, № 3. 27–39

УДК 519.716

КРИТЕРИЙ ПОЗИТИВНОЙ ПОЛНОТЫ В ТРЁХЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ*)

С. С. Марченков

На множестве P_k функций k-значной логики рассматривается оператор позитивного замыкания. Определяются некоторые позитивно полные системы функций. Доказывается, что любой позитивно замкнутый класс функций из P_k позитивно порождается множеством всех функций, зависящих не более чем от k переменных. При любом $k \geqslant 3$ определяются три семейства позитивно предполных классов в P_k. Устанавливается, что при $k = 3$ все 10 классов этих семейств образуют критериальную систему.

Один из способов классификации множества P_k функций k-значной логики состоит в задании на множестве P_k оператора замыкания Cl. Совокупность всех множеств (вообще говоря, пересекающихся), замкнутых в смысле оператора Cl, образует Cl-классификацию множества P_k. Известно, что для оператора суперпозиции при $k = 2$ соответствующая классификация счётна [10, 11], а при любом $k \geqslant 3$ — континуальна [9].

Имеется немалое число операторов замыкания (см. работы [3, 4, 6] и библиографию к ним), которые при любом $k \geqslant 2$ дают конечные классификации множества P_k. Первым в этом направлении был оператор параметрического замыкания, предложенный А. В. Кузнецовым [1, 2]. В [3] автором определён оператор позитивного замыкания, найдены все позитивно замкнутые классы булевых функций (см. также [4]) и для любого $k \geqslant 3$ получены верхние и нижние оценки числа позитивно замкнутых классов в P_k.

В настоящей статье продолжается изучение позитивно замкнутых классов в P_k. Определяются некоторые позитивно полные системы и оцениваются сверху порядки позитивно порождающих систем для любых позитивно замкнутых классов в P_k. Определяются три серии позитивно замкнутых классов и доказывается их позитивная предполнота в P_k. Устанавливается, что при $k = 3$ эти три серии образуют критериальную систему, состоящую из десяти позитивно предполных классов.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–00438).

1. Основные понятия

Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, P_k — множество всех функций на E_k (множество функций k-значной логики). *Селекторной* функцией называем функцию, значения которой совпадают со значениями некоторой её переменной. Понятия суперпозиции, замыкания и замкнутого относительно суперпозиции класса предполагаем известными [8].

При $n \geqslant 1$ и $Q \subseteq P_k$ через $Q^{(n)}$ обозначаем множество всех n-местных функций из Q. Для функций $g(x) \in P_3^{(1)}$ в дальнейшем используем обозначение $(g(0)g(1)g(2))$. Например, (110) есть функция из $P_3^{(1)}$, принимающая при $x = 0, 1, 2$ соответственно значения 1, 1, 0.

Определим язык Pos_k [3]. Исходными символами языка Pos_k являются предметные переменные $x_1, x_2, \ldots$ (с областью значений E_k), символы $f_i^{(n)}$ для обозначения n-местных функций k-значной логики ($1 \leqslant i \leqslant k^{k^n}, n = 1, 2, \ldots$), знак равенства $=$, конъюнкция & и дизъюнкция $\vee$, квантор существования $\exists$, левая и правая скобки и запятая.

Обычным образом вводится понятия терма в языке Pos_k. Любая предметная переменная есть терм; если $x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}$ — предметные переменные (не обязательно различные), а $f_i^{(n)}$ — символ n-местной функции, то $f_i^{(n)}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$ есть терм; если $t_1, \ldots, t_m$ — термы, а $f_l^{(m)}$ — символ m-местной функции, то $f_l^{(m)}(t_1, \ldots, t_m)$ также есть терм. Других термов в языке Pos_k нет.

В целях упрощения записи формул наряду с исходными обозначениями будем использовать также обозначения вида $x, y, z, f^{(n)}, g^{(n)}, h^{(n)}$, возможно, с нижними индексами. В тех случаях, когда число переменных у функции определяется из контекста, верхний индекс у функции будем опускать.

Всякий терм t языка Pos_k очевидным образом определяет некоторую функцию g из P_k (переменная определяет тождественную функцию). Если $f_1, \ldots, f_r$ — все символы функций, входящие в терм t, то говорим, что терм t выражает функцию g через функции $f_1, \ldots, f_r$. (В теории функций многозначной логики термы принято называть формулами, терм, составленный из символов функций $f_1, \ldots, f_r$, — формулой над множеством функций $\{f_1, \ldots, f_r\}$, а функцию, выразимую термом t через функции $f_1, \ldots, f_r$, — функцией, реализуемой формулой t над множеством функций $\{f_1, \ldots, f_r\}$.)

Если t_1, t_2 — термы языка Pos_k, то выражение $t_1 = t_2$ называем элементарной формулой. Из элементарных формул по обычным логическим правилам определяем остальные формулы языка Pos_k. Именно,

если Φ_1, Φ_2 — формулы языка Pos_k, а x_i — предметная переменная, то

$$(\Phi_1 \& \Phi_2), \quad (\Phi_1 \vee \Phi_2), \quad (\exists x_i)\Phi_1$$

также формулы языка Pos_k. При образовании многочленных конъюнкций и дизъюнкций скобки в формулах будем опускать. Понятия свободной и связанной переменных предполагаем известными.

Всякая формула языка Pos_k с m свободными переменными определяет некоторое m-местное отношение на E_k. Пусть $Q \subseteq P_k$, $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ — формула языка Pos_k со свободными переменными $x_1, \ldots, x_m$, все функциональные символы которой суть обозначения функций из Q, и формула $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ определяет отношение $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ на E_k. В этом случае говорим, что формула $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ *позитивно выражает отношение* $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ *через функции множества* Q. Отношение ρ называем *позитивно выразимым через функции множества* Q, если существует формула, которая позитивно выражает отношение ρ через функции множества Q.

Понятие позитивной выразимости перенесём с отношений на функции. Именно, если $g(x_1, \ldots, x_m)$ — функция из P_k, а формула $\Phi(x_1, \ldots, x_m, y)$ языка Pos_k позитивно выражает отношение $g(x_1, \ldots, x_m) = y$ (график функции g) через функции множества Q, то говорим, что формула Φ *позитивно выражает функцию* g *через функции множества* Q. Совокупность всех функций, позитивно выразимых через функции множества Q, называем *позитивным замыканием множества* Q и обозначаем через $\mathrm{Pos}[Q]$. Множества вида $\mathrm{Pos}[Q]$ называем *позитивно замкнутыми классами*.

В [3] доказано, что любой позитивно замкнутый класс содержит все селекторные функции и замкнут относительно операции суперпозиции.

Пусть $H = \{h_1(x), \ldots, h_m(x)\}$ — множество функций из $P_k^{(1)}$. Говорят, что функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет множество функций* H, если при любых $i_1, \ldots, i_n$ из множества $\{1, 2, \ldots, m\}$ функция $g(h_{i_1}(x), \ldots, h_{i_n}(x))$ принадлежит множеству H. Совокупность всех функций из P_k, сохраняющих множество H, обозначим через $\mathrm{Pol}(H)$. Нетрудно видеть, что для любого множества H множество $\mathrm{Pol}(H)$ является замкнутым (относительно суперпозиции) классом, содержащим все селекторные функции.

2. Позитивно полные системы

Пусть R — позитивно замкнутый класс и $Q \subseteq R$. Говорим, что система функций Q *позитивно полна* в классе R, если $\mathrm{Pos}[Q] = R$. В этом случае применяем также выражение «система Q *позитивно порождает*

класс R».

Утверждение 1. *При любом $k \geqslant 2$ система всех функций-констант из E_k позитивно полна в P_k.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$. Позитивная формула

$$\bigvee_{(a_1,\ldots,a_n)\in E_k^n} (x_1 = a_1)\& \ldots \&(x_n = a_n)\&(y = f(a_1, \ldots, a_n))$$

определяет отношение $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ через множество всех функций-констант из E_k. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *При любом $k \geqslant 2$ каждый позитивно замкнутый класс функций из P_k позитивно порождается множеством всех функций, зависящих не более чем от k переменных.*

Доказательство. Пусть Q — позитивно замкнутый класс, $Q \subseteq P_k$ и $f(x_1, \ldots, x_n) \in Q$, где $n > k$. Возьмём произвольный набор $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$. Предположим, что в наборе a содержится ровно m различных элементов. Выберем числа $i_1, \ldots, i_n$ из множества $\{1, 2, \ldots, m\}$ такие, что $i_p = i_q$ тогда и только тогда, когда $a_p = a_q$. Функцию $f(z_{i_1}, \ldots, z_{i_n})$ от переменных $z_1, \ldots, z_m$ обозначим через $f^a(z_1, \ldots, z_m)$. Функция f^a, полученная из функции f отождествлением переменных, очевидно, принадлежит классу Q, а значение функции f на наборе a равно значению функции f^a на соответствующем наборе из E_k^m. Более того, позитивная формула

$$(\exists z_1) \ldots (\exists z_m)((x_1 = z_{i_1})\& \ldots \&(x_n = z_{i_n})\&(y = f^a(z_1, \ldots, z_m)) \qquad (1)$$

позволяет правильно определить значения функции f на всех наборах $(b_1, \ldots, b_n)$, удовлетворяющих соотношению

$$(\forall i)(\forall j)((b_i = b_j) \equiv (a_i = a_j)).$$

Взяв теперь дизъюнкцию формул (1), отвечающих всевозможным наборам $(a_1, \ldots, a_n)$ из E_k^n, получим позитивную формулу, которая определяет функцию f через через функции класса Q, зависящие не более чем от k переменных. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Пусть $k \geqslant 2$, Q — позитивно замкнутый класс функций из P_k и существуют такое $a \in E_k$ и такие функции $f_1, \ldots, f_k$ из $Q^{(1)}$, что*

$$\{f_1(a), \ldots, f_k(a)\} = E_k. \qquad (2)$$

Тогда $Q = \mathrm{Pos}[Q^{(1)}] = \mathrm{Pol}(Q^{(1)})$.

Доказательство. Включения $Q \subseteq \mathrm{Pol}(Q^{(1)})$, $\mathrm{Pos}[Q^{(1)}] \subseteq Q$ очевидны. Установим включение $\mathrm{Pol}(Q^{(1)}) \subseteq \mathrm{Pos}[Q^{(1)}]$.

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит множеству $\mathrm{Pol}(Q^{(1)})$. Возьмём произвольный набор $(a_1, \ldots, a_n)$ из E_k^n и согласно условию (2) выберем такой элемент $a \in E_k$ и такие числа $i_1, \ldots, i_n$ из множества $\{1, 2, \ldots, k\}$, чтобы выполнялось равенство

$$(f_{i_1}(a), \ldots, f_{i_n}(a)) = (a_1, \ldots, a_n). \tag{3}$$

Поскольку функция f сохраняет множество $Q^{(1)}$, в множестве $Q^{(1)}$ найдется такая функция g, что

$$f(f_{i_1}(x), \ldots, f_{i_n}(x)) = g(x). \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4) следует, что позитивная формула

$$(\exists x)((x_1 = f_{i_1}(x))\& \ldots \&(x_n = f_{i_n}(x))\&(y = g(x)) \tag{5}$$

правильно определяет часть графика функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, включающую набор $(a_1, \ldots, a_n, f(a_1, \ldots, a_n))$. Значит, дизъюнкция формул вида (5), взятая для всевозможных наборов $(a_1, \ldots, a_n)$ из E_k^n (и соответствующих функций $f_{i_1}, \ldots, f_{i_n}, g$), будет позитивно определять функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ через функции множества $Q^{(1)}$. Утверждение 3 доказано.

3. Позитивно предполные классы

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ — отношение на E_k и π — перестановка на множестве E_k. Функция

$$f^\pi(x_1, \ldots, x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)))$$

называется *двойственной* (сопряжённой) к функции f относительно перестановки π. *Двойственным* (сопряжённым) к ρ называем отношение

$$\rho^\pi(x_1, \ldots, x_m) = \rho(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_m)).$$

Если $Q \subseteq P_k$ и R — множество отношений на E_k, то через Q^π (соответственно R^π) обозначаем множество всех функций (отношений), двойственных к функциям (отношениям) из Q (R) относительно перестановки π.

Легко проверяется, что из соотношения

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n))$$

следует, что $f^\pi(x_1, \dots, x_n) = f_0^\pi(f_1^\pi(x_1, \dots, x_n), \dots, f_l^\pi(x_1, \dots, x_n))$. Кроме того, двойственным к отношению $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$ является отношение $f^\pi(x_1, \dots, x_n) = g^\pi(x_1, \dots, x_n)$. В частности, двойственным к графику $f(x_1, \dots, x_n) = y$ функции f будет график $f^\pi(x_1, \dots, x_n) = y$ двойственной функции f^π. Из этих соображений легко вытекает следующий *принцип двойственности* для позитивной выразимости.

Утверждение 4. *Пусть $f, g_1, \dots, g_s$ — функции из P_k, π — перестановка на E_k и позитивная формула Φ определяет функцию f через функции $g_1, \dots, g_s$. Тогда функция f^π позитивно определяется через функции $g_1^\pi, \dots, g_s^\pi$ формулой Φ^π, которая получается из формулы Φ заменой всех символов $g_1, \dots, g_s$ соответственно символами $g_1^\pi, \dots, g_s^\pi$.*

Следствие 1. *Пусть $Q \subseteq P_k$ и π — перестановка на E_k. Тогда*

$$\mathrm{Pos}[Q^\pi] = (\mathrm{Pos}[Q])^\pi.$$

Функция f называется *самодвойственной* относительно перестановки π, если $f^\pi = f$. Множество всех функций, самодвойственных относительно перестановки π, обозначим через S_π.

Следствие 2. *Для любого $k \geqslant 2$ и любой перестановки π на множестве E_k множество S_π является позитивно замкнутым классом.*

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ и $a \in E_k$. Говорят, что функция f *сохраняет константу* a, если $f(a, \dots, a) = a$. Множество всех функций из P_k, сохраняющих константу a, обозначим через T_a.

Утверждение 5. *При любом $a \in E_k$ множество T_a является позитивно замкнутым классом.*

Доказательство. Пусть позитивная формула Φ определяет функцию f через функции множества T_a. Если всем переменным бескванторной части формулы Φ (включая связанные переменные) присвоить значение a, то полученная формула будет, очевидно, истинной. Отсюда следует, что функция f сохраняет константу a. Утверждение 5 доказано.

Пусть Q — позитивно замкнутый класс функций из P_k. Будем говорить, что Q *позитивно предполон* в P_k, если $Q \neq P_k$ и не существует позитивно замкнутого класса R, удовлетворяющего строгим включениям $Q \subset R \subset P_k$.

Утверждение 6. *Пусть π — перестановка на E_k, которая разлагается в произведение циклов одной и той же простой длины. Тогда класс S_π позитивно предполон в P_k. При любом $a \in E_k$ класс T_a позитивно предполон в P_k.*

Доказательство. Согласно [7] (см. также [4]) класс S_π является предполным в P_k по отношению к операции суперпозиции. Поскольку класс S_π позитивно замкнут (следствие 2 из утверждения 4), а позитивно замкнутые классы замкнуты также относительно операции суперпозиции [3], получаем, что класс S_π позитивно предполон в P_k. Аналогично, позитивная предполнота класса T_a в P_k следует из того, что T_a предполон в P_k по отношению к операции суперпозиции [4, 7] и T_a позитивно замкнут (утверждение 5). Утверждение 6 доказано.

Пусть (a, b) — упорядоченная пара разных элементов из E_k. Обозначим через H_{ab} множество всех функций f из $P_k^{(1)}$, которые удовлетворяют следующим условиям: *f сохраняет множество $E_k \setminus \{b\}$ (т. е. переводит элементы из $E_k \setminus \{b\}$ в элементы из $E_k \setminus \{b\}$) и либо $f(a) = f(b)$, либо $f(a) = a$ и $f(b) = b$.*

Нетрудно убедиться в том, что множество H_{ab} содержит функцию x, все константы, отличные от b, замкнуто относительно суперпозиции и не содержит константу b.

Лемма. *Пусть $V_{ab} = \mathrm{Pos}[H_{ab}]$. Тогда $V_{ab} \neq P_k$.*

Доказательство. Заметим, что $V_{ab} = P_k$ в том и только том случае, когда отношение $y = b$ позитивно выразимо через функции множества H_{ab}. В самом деле, если $V_{ab} = P_k$, то, в частности, через функции множества H_{ab} позитивно выражается график функции-константы $f(x) = b$. Из него отношение $y = b$ получается навешиванием квантора существования по x.

Обратно, если отношение $y = b$ позитивно выразимо через функции множества H_{ab}, то аналогичное утверждение будет верно и для графика функции-константы $f(x) = b$, поскольку он получается из отношения $y = b$ добавлением конъюнктивного сомножителя $x = x$. Таким образом, мы приходим к позитивно полной системе всех функций-констант из E_k.

Дальнейшее доказательство проведём от противного. Предположим, что $V_{ab} = P_k$ и, следовательно, отношение $y = b$ позитивно выразимо через функции множества H_{ab}. Возьмём соответствующую формулу, позитивно выражающую отношение $y = b$ через функции множества H_{ab}, и, пользуясь известными логическими тождествами для связок $\&, \vee$ и квантора $\exists$, приведём её к эквивалентному виду $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_s$, где позитивные формулы $K_1, \ldots, K_s$ не содержат связку $\vee$. Понятно, что хотя бы одна из формул $K_1, \ldots, K_s$ задаёт отношение $y = b$ (остальные формулы либо тождественно ложны, либо выражают это же отношение $y = b$). Пусть это будет формула K_1. Можно считать, что формула K_1

приведена к пренексному виду

$$(\exists x_1)\ldots(\exists x_m)((f_1^1(z_1^1) = f_2^1(z_2^1))\&\ldots\&(f_1^n(z_1^n) = f_2^n(z_2^n))), \qquad (6)$$

где $f_1^1, f_2^1, \ldots, f_1^n, f_2^n$ — обозначения функций из множества H_{ab}, а z_1^1, $z_2^1, \ldots, z_1^n, z_2^n$ — переменные из множества $\{x_1, \ldots, x_m, y\}$.

Допустим, что при $y = b$ при выполнении формулы (6) переменные $x_1, \ldots, x_m$ принимают значения $a_1, \ldots, a_m$. Проведём ряд преобразований формулы (6).

Предположим, например, что $a_1, \ldots, a_p$ отличны от b и $a_{p+1} = \ldots = a_m = b$. Исключим из формулы (6) кванторы по переменным $x_1, \ldots, x_p$ и переменные $x_1, \ldots, x_p$ под знаками функций f_j^i заменим соответствующими константами $a_1, \ldots, a_p$. При этом выражения $f_j^i(a_l)$ $(1 \leqslant l \leqslant p)$ будут определять константы из $E_k \backslash \{b\}$ (см. определение множества H_{ab}). Поэтому далее в формуле (6) выражения $f_j^i(a_l)$ заменим соответствующими функциями-константами из H_{ab}. Затем в полученной формуле все вхождения переменных $x_{p+1}, \ldots, x_m$ заменим переменной x. В результате получим формулу Φ, которая, как нетрудно понять, также задаёт отношение $y = b$.

Покажем, что наряду с парой (b, b) бескванторной части формулы Φ удовлетворяет также пара (a, a). Рассмотрим произвольное равенство

$$f_1^i(z_1^i) = f_2^i(z_2^i) \qquad (7)$$

этой формулы. Пусть сначала одна из функций f_1^i, f_2^i, например f_2^i, есть константа, отличная от b. Случай, когда функция f_1^i также есть константа, ввиду очевидности можно опустить. Так как $z_1^i \in \{x, y\}$ и равенство (7) истинно при $x = y = b$, то в силу определения множества H_{ab} равенство (7) будет истинным и при $x = y = a$.

Предположим, что обе функции f_1^i, f_2^i не являются константами. Если $z_1^i = z_2^i$, то из выполнимости равенства (7) при $x = y = b$ и свойств функций множества H_{ab} вновь следует, что равенство (7) будет справедливым при $x = y = a$. Пусть далее $z_1^i \neq z_2^i$. Если в соответствии с определением множества H_{ab} имеем $f_1^i(a) = f_1^i(b) = c$, где $c \neq b$, то из истинности равенства (7) при $x = y = b$ получаем, что для функции f_2^i должны выполняться равенства $f_2^i(a) = f_2^i(b) = c$. Следовательно, $f_1^i(a) = f_2^i(a)$. Если же $f_1^i(a) = a, f_1^i(b) = b$, то из равенства $f_1^i(b) = f_2^i(b)$ и определения множества H_{ab} вытекает, что $f_2^i(a) = a, f_2^i(b) = b$ и, значит, $f_1^i(a) = f_2^i(a)$.

Итак, бескванторной части формулы Φ удовлетворяют значения $x = y = a$. Это противоречит тому, что формула Φ определяет отношение $y = b$. Лемма доказана.

Утверждение 7. *Для любых неравных элементов a, b из E_k класс V_{ab} является позитивно предполным в P_k.*

Доказательство. Поскольку в множество H_{ab} входят все константы, отличные от b, а класс V_{ab} содержит функцию x, на основании утверждения 3 заключаем, что

$$V_{ab} = \mathrm{Pol}(V_{ab}^{(1)}). \tag{8}$$

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ не принадлежит классу V_{ab}. Тогда согласно равенству (8) подстановкой в функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ на места переменных $x_1, \ldots, x_n$ некоторых функций из $V_{ab}^{(1)}$ можно получить одноместную функцию g, не принадлежащую множеству $V_{ab}^{(1)}$. Покажем, что система $V_{ab} \cup \{g\}$ позитивно полна в классе P_k. Это и будет означать, что класс V_{ab} позитивно предполон в P_k.

Из соотношений $H_{ab} \subseteq V_{ab}^{(1)}$ и $g \notin V_{ab}^{(1)}$ следует, что $g \notin H_{ab}$. Поэтому функция g либо не сохраняет множество $E_k \setminus \{b\}$, либо $g(a) \neq g(b)$ и хотя бы одно из равенств $g(a) = a$, $g(b) = b$ не имеет места.

Если функция g не сохраняет множество $E_k \setminus \{b\}$, то для некоторого c, не равного b, имеем $g(c) = b$. Значит, подставляя функцию-константу c из множества H_{ab} в функцию g, мы получим функцию-константу b. В результате образуется позитивно полная система всех констант из E_k.

Предположим, что неравенство $g(a) \neq g(b)$ и равенства $g(a) = a, g(b) = b$ одновременно не выполняются. Ввиду рассмотренного выше случая можно считать, что $g(a) \neq b$.

Если $g(b) \neq b$, то через функцию g и константу $g(b)$ позитивная формула $g(x) = g(b)$ определяет отношение вида $x \in F$, где $F \subseteq E_k$, $b \in F$ и $a \notin F$. Вместе с тем в множестве H_{ab} имеется функция $h(x)$, удовлетворяющая условиям: $h(a) = h(b) = g(b)$ и для некоторого $c \in E_k \setminus \{b, g(b)\}$ и всех $x \notin \{a, b\}$ справедливо равенство $h(x) = c$. Позитивная формула $h(x) = g(b)$ определяет отношение $x \in \{a, b\}$ через функцию h и константу $g(b)$, а конъюнкция отношений $x \in F$ и $x \in \{a, b\}$ даёт отношение $x = b$. Таким образом, вновь получаем функцию-константу b.

Пусть $g(b) = b$. Тогда должно быть $g(a) \neq a$. В этом случае в множестве H_{ab} выбираем функцию $h(x)$, удовлетворяющую условиям: $h(a) = a$, $h(b) = b$ и $h(x) \neq g(x)$ при $x \notin \{a, b\}$. Тогда позитивная формула $g(x) = h(x)$ определяет отношение $x = b$. Утверждение 7 доказано.

4. Критерий позитивной полноты в классе P_3

Построения и доказательства, приведённые в предыдущем разделе,

дают в P_3 следующие 10 позитивно предполных классов:

$$S_{x+1},\ T_0,\ T_1,\ T_2,\ V_{01},\ V_{02},\ V_{10},\ V_{12},\ V_{20},\ V_{21} \tag{9}$$

(здесь и далее сложение и умножение проводятся по модулю 3). Если выписать множества одноместных функций из этих классов, воспользоваться утверждением 3 и замечанием после доказательства утверждения 6, то придём к следующему заданию позитивно предполных классов из списка (9):

$$\begin{aligned}
&S_{x+1} = \mathrm{Pos}[\{x+1, x+2\}],\\
&T_0 = \mathrm{Pos}[\{0, (001), (002), (010), (011), (020), 2x, (022)\}],\\
&T_1 = \mathrm{Pos}[\{(010), (011), (110), 1, (112), 2x+2, (211), (212)\}],\\
&T_2 = \mathrm{Pos}[\{(002), (022), 2x+1, (112), (122), (202), (212), 2\}],\\
&V_{01} = \mathrm{Pos}[\{0, (002), (010), (220), 2\}],\\
&V_{02} = \mathrm{Pos}[\{0, (002), (010), (101), 1\}],\\
&V_{10} = \mathrm{Pos}[\{(011), 1, (112), (221), 2\}],\\
&V_{12} = \mathrm{Pos}[\{0, (011), (100), 1, (112)\}],\\
&V_{20} = \mathrm{Pos}[\{(022), 1, (121), (212), 2\}],\\
&V_{21} = \mathrm{Pos}[\{0, (022), (200), (212), 2\}].
\end{aligned}$$

Теорема. *Система функций из P_3 позитивно полна в классе P_3 тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из позитивно предполных классов списка* (9).

Доказательство. Необходимость условий теоремы следует из того, что каждый класс из списка (9) позитивно замкнут и отличен от класса P_3.

Установим достаточность условий теоремы. Пусть $Q \subseteq P_3$ и Q целиком не содержится ни в одном из классов списка (9). Не ограничивая общности, можно предполагать, что Q — позитивно замкнутый класс. Из соотношения $Q \not\subseteq T_0$ следует, что в классе Q содержится функция, не сохраняющая константу 0. Отождествляя в ней все переменные, получим функцию $f_0(x)$ из класса Q, которая также не сохраняет 0. Аналогичным образом в классе Q получаем функции $f_1(x), f_2(x)$, которые не сохраняют соответственно 1 и 2 (отметим, что функции f_0, f_1, f_2 не обязательно различны). Итак, из рассмотрения классов T_0, T_1, T_2 следует, что в множестве $Q^{(1)}$ имеется по крайней мере одна функция, отличная от тождественной функции $f(x) = x$. Далее исследуем все имеющиеся возможности для этой функции.

Предположим, что $(x+1) \in Q$. Поскольку суперпозиция функции $x+1$ даёт функцию $x+2$ и согласно утверждению 3 имеем $\mathrm{Pos}[\{x+1, x+2\}] = S_{x+1}$, то $S_{x+1} \subseteq Q$. Ввиду позитивной предполноты класса S_{x+1} в P_3 и соотношения $Q \nsubseteq S_{x+1}$ класс Q в этом случае будет совпадать с классом P_3. Такие же рассуждения справедливы для случая $(x+2) \in Q$.

Предположим, что $2x \in Q$. Позитивная формула $x = 2x$ определяет отношение $x = 0$. Следовательно, классу Q принадлежит функция-константа 0. Подставляя её в функцию f_0, получаем одну из констант 1 или 2. Другую константу образуем с помощью функции $2x$. Таким образом, класс Q содержит три константы и потому совпадает с P_3. Двойственным образом рассматриваются случаи $(2x+1) \in Q$ и $(2x+2) \in Q$.

Итак, далее можно предполагать, что классу Q не принадлежит ни одна из функций $x+1,\ x+2,\ 2x,\ 2x+1,\ 2x+2$.

Пусть $(001) \in Q$. Очевидно, что тогда $0 \in Q$. Как и выше, с помощью функции f_0 получаем одну из констант 1 или 2. Если имеется константа 1, то позитивная формула $(001)(x) = 1$ определяет отношение $x = 2$. Значит, в классе Q имеется также константа 2. Если же $2 \in Q$, то $1 = (001)(2)$. В результате вновь приходим к позитивно полной системе из трех констант.

По принципу двойственности позитивно полную систему будет образовывать любая из функций

$$(020),\ (110),\ (122),\ (202),\ (211).$$

Как мы убедились выше, класс Q не может содержать только одну константу — другая константа получается с помощью функций f_0, f_1, f_2. Поэтому рассмотрим случай, когда в класс Q входят ровно две константы. Пусть это будут, например, константы 0 и 1. Поскольку позитивно замкнутый класс Q содержит функцию $f(x) = x$, применение утверждения 3 приводит к равенству

$$Q = \mathrm{Pos}[Q^{(1)}]. \tag{10}$$

Из соотношений $\{0, 1, x\} \subset V_{02}^{(1)}$ и $\{0, 1, x\} \subset V_{12}^{(1)}$ вытекает, что $Q^{(1)} \neq \{0, 1, x\}$.

Если в $Q^{(1)}$ есть функция, не сохраняющая множество $\{0, 1\}$, то в $Q^{(1)}$ входит константа 2, и получаем позитивно полную систему из трёх констант. Исключая из рассмотрения такие функции, а также функции, уже рассмотренные выше, приходим к выводу, что в множество $Q^{(1)}$ помимо функций $0, 1, x$ могут входить лишь функции из списка

$$(002),\ (010),\ (101),\ (011),\ (100),\ (112). \tag{11}$$

Если $Q^{(1)} \subseteq \{0, 1, x, (002), (010), (101)\}$ или $Q^{(1)} \subseteq \{0, 1, x, (011), (100), (112)\}$, то получаем противоречие из равенства (10), определения классов V_{02}, V_{12} и предположения $Q \not\subseteq V_{02}$, $Q \not\subseteq V_{12}$. Поэтому далее в качестве множества $Q^{(1)}$ будем рассматривать расширения множества $\{0, 1, x\}$ с помощью функций из списка (11), в которые входят как функции из множества $\{(002), (010), (101)\}$, так и функции из множества $\{(011), (100), (112)\}$. Здесь возможны девять случаев.

1) $\{(002), (011)\} \subset Q^{(1)}$. Подстановка функции (002) в функцию (011) даёт ранее рассмотренную функцию (001).

2) $\{(002), (100)\} \subset Q^{(1)}$. Подстановка функции (100) в себя приводит к случаю 1.

3) $\{(002), (112)\} \subseteq Q^{(1)}$. Позитивная формула $(002)(x) = (112)(x)$ определяет отношение $x = 2$. Значит, в этом случае в множество $Q^{(1)}$ входит константа 2, что невозможно по предположению.

4) $\{(010), (011)\} \subset Q^{(1)}$. Имеем $(x \in \{0, 2\}) \equiv ((010)(x) = 0)$, $(x \in \{1, 2\}) \equiv ((011)(x) = 1)$, $(x = 2) \equiv (x \in \{0, 2\}) \& (x \in \{1, 2\})$. Поэтому множество $Q^{(1)}$ содержит константу 2.

5) $\{(010), (100)\} \subset Q^{(1)}$.

Подстановка функции (100) в себя приводит к случаю 4.

6) $\{(010), (112)\} \subset Q^{(1)}$.

Подстановка функции (112) в функцию (010) даёт рассмотренную в начале доказательства функцию (110).

7–9) $(101) \in Q^{(1)}$ и $\{(011), (100), (112)\} \cap Q^{(1)} \neq \varnothing$.

Подстановка функции (101) в себя приводит к случаям 4–6.

Для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть случаи, когда множество $Q^{(1)}$ не содержит констант. Нетрудно убедиться в том, что в этих случаях множество $Q^{(1)} \setminus \{x\}$ может содержаться лишь в одном из следующих трёх множеств:

$$\{(010), (011), (100), (101)\}, \quad \{(002), (022), (200), (220)\},$$
$$\{(112), (121), (212), (221)\}.$$

Пусть, например, в $Q^{(1)}$ входят функции только первого из этих множеств. Имеем $(x = 2) \equiv ((010)(x) = (100)(x)) \equiv ((011)(x) = (101)(x))$. Значит, в множестве $Q^{(1)}$ пары $\{(010), (100)\}$ и $\{(011), (101)\}$ содержаться не могут. Остаются следующие возможности для множества $Q^{(1)} \setminus \{x\}$:

$$\{(010)\},\ \{(011)\},\ \{(010), (011)\},\ \{(010), (101)\},\ \{(011), (100)\}.$$

Первые три множества из этого списка целиком содержатся в классе T_0, что по условию невозможно. Рассмотрим случай, когда $Q^{(1)} = \{(010), x,$

(101)}. Согласно утверждению 3 в этом случае будем иметь

$$Q = \mathrm{Pos}[Q^{(1)}] = \mathrm{Pos}[\{(010), (101)\}].$$

Однако $\{(010), (101)\} \subset V_{02}^{(1)}$. Поэтому $Q \subset V_{02}$, что невозможно по предположению.

Аналогично рассматривается случай, когда $Q^{(1)} = \{(011), x, (100)\}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Данильченко А. Ф.** О параметрической выразимости функций в трёхзначной логике // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 397–416.
2. **Кузнецов А. В.** О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33.
3. **Марченков С. С.** О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискретная математика. 1999. Т. 11, вып. 4. С. 110–126.
4. **Марченков С. С.** Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000.
5. **Марченков С. С.** Функциональные системы с операцией суперпозиции. М.: Физматлит, 2004.
6. **Марченков С. С.** Эквациональное замыкание // Дискретная математика. 2005. Т. 17, вып. 2. С. 117–126.
7. **Яблонский С. В.** Функциональные построения в k-значной логике // Сб. статей по математической логике и некоторым вопросам кибернетики. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 5–142 (Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова. Т. 51).
8. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
9. **Янов Ю. И., Мучник А. А.** О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих базиса // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.
10. **Post E. L.** Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. V. 43. P. 163–185.
11. **Post E. L.** Two-valued iterative systems of mathematical logic. Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.

Адрес автора:

Московский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова,
Воробьевы горы, 2-й учебный корпус,
119992, Москва, Россия.
E-mail: mathcyb@cs.msu.su

Статья поступила
14 февраля 2006 г.