ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2006. Серия 1. Том 13, № 3. 40–61

УДК 519.7

УСЛОВИЯ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУРЕШЁТКЕ В РЕАЛЬНЫХ БАЗИСАХ ИЗ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

И. А. Панкратова

Рассматриваются функции, определённые на конечной верхней полурешётке, и реализующие их переключательные схемы. Формулируются необходимое условие реализуемости функции на полурешётке в произвольном базисе из переключательных элементов, а также необходимые и достаточные условия реализуемости функции на полурешётке состояний однокаскадными и многокаскадными схемами в базисах, состоящих из реальных переключательных элементов — транзисторов и резисторов.

Введение

Аппарат функций на верхних полурешётках предложен в [1] для адекватного описания динамического поведения дискретных устройств. Под динамическим поведением понимаются процессы, происходящие в устройстве во время асинхронной смены одного входного состояния другим; сумма $a+b$ элементов a и b полурешётки задаёт множество возможных (промежуточных) значений входного состояния при изменении его с a на b. Задавая значение выходной функции $f(a+b)$, можно управлять динамическим поведением: если устройство реализует функцию f, то изменение состояния выхода остаётся в пределах множества $f(a+b)$ при любом порядке изменения компонент входного состояния. Таким образом, задача синтеза схемы с заданным динамическим поведением есть задача реализации схемой функции на полурешётке. Эта задача исследовалась в работе [1]. В ней же описан декомпозиционный метод синтеза схем в произвольном базисе и сформулированы необходимые и достаточные условия полноты базиса при реализации функций однокаскадными параллельно-последовательными схемами. Проблема полноты в классе функций на произвольной конечной полурешётке рассматривается также в [3]. Однако, используемые при построении реальных интегральных схем (больших — БИС и сверхбольших — СБИС) наборы пере-

ключательных элементов (транзисторов и резисторов) не удовлетворяют критериям полноты, сформулированным в [1, 3]. Поэтому возникает задача изучения условий реализуемости функций на полурешётках в заданном неполном базисе. На этом пути для некоторых базисов удаётся сформулировать алгоритмы синтеза.

В данной статье найдены необходимые и достаточные условия реализуемости функций на полурешётке состояний параллельно-последовательными однокаскадными (теорема 2) и многокаскадными (теорема 3) схемами, состоящими из транзисторов (разных типов) и резистора, а также многокаскадными схемами, состоящими только из транзисторов (теорема 4). Условия теоремы 2 состоят в существовании базисной функции, принимающей значения 1 и 0 на компонентах некоторых однозначно вычисляемых пар элементов из области определения реализуемой функции. Условия реализуемости функции f в теоремах 3 и 4 предполагают квазимонотонность отношения, состоящего из всех пар $(a_B, f(a))$, где a_B — набор значений функций элементов в B от входных переменных схемы на наборе входных переменных a, и наличие в B элемента, функция которого (в теореме 3) или её сужение (в теореме 4) не сохраняет расширения отношения сравнения величин проводимостей на их подмножества.

Доказательства достаточности условий теорем конструктивны и содержат методы построения соответствующих схем. Тем самым решается задача синтеза переключательных схем с заданным динамическим поведением в реальном базисе. Метод построения схемы в доказательстве теоремы 3 фактически доставляет двухкаскадную схему. Таким образом, рассматриваемые функции на полурешётке состояний всегда реализуются двухкаскадными схемами.

Изложению основных результатов предшествует определение необходимых понятий и формулировка некоторых условий реализуемости функции на полурешётке схемой из переключательных элементов в произвольном базисе (теорема 1).

1. Основные определения

Будем рассматривать комбинационные схемы с двухполюсным источником питания, в которых проводимости принимают значения из множества $P_3 = \{0, 1, \mathrm{X}\}$, где 0 — нулевая, 1 — бесконечная и X — конечная проводимости. Состояние узла схемы определяется парой проводимостей от этого узла до полюсов источника питания. Для описания процесса асинхронного изменения проводимостей в схеме построим полурешётку проводимостей $\widetilde{P_3} = \{0, 1, \mathrm{X}, 0', 1', \mathrm{X}', \mathrm{E}\}$ — верхнюю полурешётку всех непустых подмножеств множества P_3, в которой отношение порядка $\leqslant$

совпадает с отношением включения множеств, а операция сложения — с объединением множеств. Здесь $0 = \{0\}$, $1 = \{1\}$, $\mathrm{X} = \{\mathrm{X}\}$ (эти значения являются точками полурешётки), $0' = \{1, \mathrm{X}\}$, $1' = \{0, \mathrm{X}\}$, $\mathrm{X}' = \{0, 1\}$, $\mathrm{E} = \{0, 1, \mathrm{X}\}$. Неточечные элементы полурешётки с подходящей точностью описывают неопределённые значения; например, значение $0' = 1 + \mathrm{X}$ описывает процесс изменения проводимости со значения 1 на X или наоборот. Для описания изменяющихся (динамических) состояний узлов построим полурешётку $I = \widetilde{P_3}^2$, элементами которой являются пары проводимостей от узла до полюсов источника питания GND и VDD.

Функции от переменных множества I со значениями в $\widetilde{P_3}$ называются *функциями проводимости.* С их помощью описываются изменения проводимостей цепей в схеме, вызываемые изменениями состояний её полюсов. *Функция состояний* φ определяется как $\varphi : U_\varphi \subseteq I^n \to I$ и представляет собой пару независимых функций проводимости (f_0, f_1) с областью определения $U_{f_0} = U_{f_1} = U_\varphi$ и с такими значениями в полурешётке $\widetilde{P_3}$, что $(f_0(a), f_1(a)) = \varphi(a)$ для любого $a \in U_\varphi$. С её помощью описываются изменения состояния узла в схеме в зависимости от изменений состояний её полюсов.

Для функций состояний φ и ψ говорят, что *функция φ реализует функцию ψ*, и пишут $\varphi \leqslant \psi$, если $U_\psi \subseteq U_\varphi$ и $\varphi(a) \leqslant \psi(a)$ для любого $a \in U_\psi$. Функция на полурешётке называется *монотонной*, если она сохраняет отношение порядка на полурешётке, и *квазимонотонной*, если существует реализующая её монотонная функция. Известен тест квазимонотонности функций на полурешётках [2], который можно сформулировать в терминах сохранения отношений. Пусть $\alpha(x, y, z) \Leftrightarrow x \cap y \cap z \neq \varnothing$ — тернарное отношение α на $\widetilde{P}_3$. Это отношение естественным образом (покомпонентно) распространяется на полурешётки I и I^n. Тогда функция проводимости или состояний квазимонотонна, если и только если она сохраняет отношение α.

Будем рассматривать одновыходные комбинационные переключательные схемы, в которых проводимости между выходным полюсом и полюсами источника питания реализуются параллельно-последовательными переключательными схемами без общих элементов, и все полюсы каждого элемента, кроме двух, являются управляющими. К этому классу относятся, в частности, параллельно-последовательные nМОП- и КМОП-схемы [5]. Дадим формальные определения переключательных элементов, сетей, схем и их функций с учётом введённых ограничений. Переключательные сети и схемы определяются в произвольном базисе B, под которым подразумевается любое конечное множество переключательных

элементов; функции сетей вводятся индукцией по построению.

1) Переключательный элемент $e(x_1, \ldots, x_k, a, b)$ есть пара (X, f_e), где $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ — множество управляющих полюсов элемента, $f_e : I^k \to \widetilde{P_3}$ — монотонная функция проводимости между исполнительными полюсами a и b, зависящая от состояний управляющих полюсов; для остальных пар полюсов проводимости между ними тождественно равны 0.

2) Переключательная сеть $N(x_1, \ldots, x_n, a, b)$ в базисе B есть пара (X, G), где $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество управляющих полюсов сети, G — параллельно-последовательный граф с двумя выделенными вершинами a и b, в котором каждому ребру сопоставлен переключательный элемент $(X_i, f_i) \in B$, $X_i \subseteq X$.

Функция проводимости $f_N : I^n \to \widetilde{P_3}$ сети N определяется следующим индуктивным образом:

(a) если в G содержится только одно ребро (a, b), то $f_N = f_e$, где e — соответствующий этому ребру элемент;

(b) если граф G является параллельным соединением графов G_1 и G_2, то $f_N = f_{N_1} \vee f_{N_2}$, где f_{N_1}, f_{N_2} — функции сетей (X, G_1) и (X, G_2) соответственно, $\vee$ — операция дизъюнкции проводимостей;

(c) если G есть последовательное соединение графов G_1 и G_2, то $f_N = f_{N_1} \wedge f_{N_2}$, где $\wedge$ — операция конъюнкции проводимостей.

3) Однокаскадная схема $C(x_1, \ldots, x_n, y)$ в базисе B есть пара сетей в том же базисе $(N_1(x_1, \ldots, x_n, y, \mathrm{GND}),\ N_2(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{VDD}, y))$, где $x_1, \ldots, x_n$ — входные полюсы схемы, y — выходной полюс, GND и VDD — полюсы источника питания. Функция состояний $\varphi_C : I^n \to I$ схемы C определяется как пара функций сетей N_1, N_2: $\varphi_C = (f_{N_1}, f_{N_2})$.

4) Двухкаскадная схема $C(x_1, \ldots, x_n, y)$ есть совокупность однокаскадных схем $(C_1(x_1, \ldots, x_n, y_1),\ \ldots,\ C_k(x_1, \ldots, x_n, y_k), C_{k+1}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k, y))$, где $C_1, \ldots, C_k$ — схемы первого уровня, C_{k+1} — схема второго уровня с управляющими полюсами $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k$. Функция состояний схемы C определяется как суперпозиция $y = \varphi_C(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_{C_{k+1}}(x_1, \ldots, x_n, \varphi_{C_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{C_k}(x_1, \ldots, x_n))$.

5) r-Каскадная схема определяется как двухкаскадная схема, если $C_1, \ldots, C_k$ суть $(r-1)$-каскадные схемы. Поскольку $(t-1)$-каскадную схему можно рассматривать как частный случай t-каскадной (при $k = 0$), то в качестве управляющих полюсов схемы C_{k+1} это определение допускает выходы схем первого, второго, $\ldots$, $(r-1)$-го уровней.

Значения содержащихся в определении операций дизъюнкции и конъюнкции проводимостей на множестве точек полурешётки $\widetilde{P_3}$ приводятся

в табл. 1; для остальных проводимостей значения операций вычисляются по правилу их точечного продолжения [1], которое для произвольной функции f, заданной в точках некоторой верхней полурешётки, определяется на остальных её элементах как

$$f(x) = \sum_{a \in m(x)} f(a),$$

где $m(x)$ обозначает множество точек полурешётки, содержащихся в её элементе x.

Таблица 1

Операции $\wedge$ и $\vee$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
0	0	0	0
0	X	0	X
0	1	0	1
X	0	0	X
X	X	X	X
X	1	X	1
1	0	0	1
1	X	X	1
1	1	1	1

Будем говорить, что *функция состояний φ реализуема в базисе B*, если существует такая схема C в том же базисе, что $\varphi_C \leqslant \varphi$. Будем говорить, что *переключательная сеть N реализует функцию проводимости f*, если для функции сети f_N имеет место неравенство $f_N \leqslant f$. Функцию проводимости $f(x_1, \ldots, x_n)$ назовём 1-*реализуемой в базисе B*, если существует сеть $N(x_1, \ldots, x_n, a, b)$ в базисе B, реализующая f. Назовём f *k-реализуемой в базисе B*, если существуют функция проводимости $g(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ и функции состояний $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$, …, $\varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$ такие, что g является 1-реализуемой в базисе B, функции φ_1, …, φ_m реализуемы $(k-1)$-каскадными схемами в этом базисе и $g(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) \leqslant f$. Наконец, функцию f назовём *реализуемой*, если f k-реализуема для некоторого $k \geqslant 1$. Так как функции сетей и схем, являясь суперпозициями монотонных функций, также монотонны, то реализуемы только квазимонотонные функции.

Для реализации функций проводимости будем использовать декомпозиционный метод синтеза. Суть метода состоит в последовательном упрощении подлежащих реализации функций с помощью разложения их

по функциям базисных элементов; в рассматриваемом случае — по операциям дизъюнкции и конъюнкции проводимостей. Будем говорить, что *функция проводимости f разлагается по операции дизъюнкции* (*конъюнкции*) *проводимостей*, если существуют функции проводимости f_1, f_2 такие, что $f_1 \vee f_2 \leqslant f$ (соответственно $f_1 \wedge f_2 \leqslant f$), $f \leqslant f_1$, $f \leqslant f_2$, $f \neq f_1$ и $f \neq f_2$. Функции f_1, f_2 называются *компонентами разложения.* По определению компоненты разложения «проще» для реализации, чем исходная функция, в силу их большей «недоопределённости». Если среди базисных функицй нет функций, реализующих f_1 и f_2, то f_1 и f_2, в свою очередь, подвергаются разложению, и так до определения всех компонент разложения всех функций. В табл. 2 представлено разложение функции f, принимающей все значения из $\widetilde{P_3}$, по операциям дизъюнкции и конъюнкции проводимостей. Обозначим через U_f^σ, $\sigma \in \widetilde{P_3}$, подмножество области определения функции f, на котором f принимает значение σ: $U_f^\sigma = \{a \in U_f \mid f(a) = \sigma\}$. Непосредственно проверяется, что функция f разложима по дизъюнкции, если и только если $|U_f^{\mathrm{X}}| + |U_f^1| + |U_f^{0'}| \geqslant 2$, и по конъюнкции, если и только если $|U_f^{\mathrm{X}}| + |U_f^0| + |U_f^{1'}| \geqslant 2$. Если f принимает значения из $\{0, 1, 0', 1', \mathrm{X}', \mathrm{E}\} = \widetilde{P_3} \setminus \{\mathrm{X}\}$, то, чередуя разложения по $\vee$ (уменьшая тем самым области определения значений 1 и $0'$) и по $\wedge$ (уменьшая области определения значений 0 и $1'$), можно добиться того, что для каждой компоненты разложения f_i выполняются условия $|U_{f_i}^1| + |U_{f_i}^{0'}| = |U_{f_i}^0| + |U_{f_i}^{1'}| = 1$.

Т а б л и ц а 2

Разложение функции проводимости по операциям дизъюнкции (a) и конъюнкции ($б$) проводимостей

f	$f_1 \vee f_2$	
0	0	0
1	1	E
	E	1
X	X	$1'$
	$1'$	X
$0'$	$0'$	E
	E	$0'$
$1'$	$1'$	$1'$
X'	X'	X'
E	E	E

(a)

f	$f_1 \wedge f_2$	
0	0	E
	E	0
1	1	1
X	X	$0'$
	$0'$	X
$0'$	$0'$	$0'$
$1'$	$1'$	E
	E	$1'$
X'	X'	X'
E	E	E

($б$)

2. Необходимое условие реализуемости функции на полурешётках

Пусть заданы базис $B = \{(X_1, f_1), \ldots, (X_s, f_s)\}$, где $|X_i| = k_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, и функция (проводимости или состояний) $f : U_f \subseteq I^n \to L$ со значениями в полурешётке $L \in \{\widetilde{P_3}, I\}$. Рассмотрим всевозможные отображения $\mu_j : \{1, \ldots, k_i\} \to \{1, \ldots, n\}$ множества управляющих полюсов элемента в множество номеров переменных x_1, …, x_n функции f для каждого элемента $e_i = (X_i, f_i) \in B$. Число таких отображений равно $t_i = n^{k_i}$. Каждой паре (e_i, μ_j), $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant t_i$, поставим в соответствие функцию $f_i^{(\mu_j)} : U_f \to \widetilde{P_3}$, область определения которой совпадает с областью определения функции f, и $f_i^{(\mu_j)}(x_1, \ldots, x_n) = f_i(x_{\mu_j(1)}, \ldots, x_{\mu_j(k_i)})$. Содержательно, $f_i^{(\mu_j)}$ — это функция проводимости базисного элемента e_i между его исполнительными полюсами после отождествления его управляющих полюсов с полюсами $\mu_j(1)$, …, $\mu_j(k_i)$ схемы. Перебирая всевозможные отображения μ_j, получим функции проводимости элемента e_i при всевозможных способах подключения его управляющих полюсов к входным полюсам схемы. Всюду далее пусть $G_B = \{f_i^{(\mu_j)} \mid 1 \leqslant i \leqslant s; 1 \leqslant j \leqslant t_i\}$.

Построим бинарное отношение $\Gamma_{f,B} \subseteq (\widetilde{P_3})^r \times L$, где $r = t_1 + t_2 + \cdots + t_s$, следующим образом: для каждого набора $a \in U_f$ возьмём вектор $a_B = (x_{1,1}, \ldots, x_{1,t_1}, \ldots, x_{s,1}, \ldots, x_{s,t_s})$ размерности r, где $x_{i,j} = f_i^{(\mu_j)}(a)$, и положим $(a_B, f(a)) \in \Gamma_{f,B}$. Других пар в $\Gamma_{f,B}$ нет. В соответствии с [1] бинарное отношение на полурешётках $\Gamma \subseteq M \times L$ будем называть квазимонотонным, если оно реализуется монотонной функцией, т. е. если для некоторой монотонной функции $g : U_g \subseteq M \to L$ верно следующее соотношение $((a, b) \in \Gamma) \Rightarrow (a \in U_g \,\& g(a) \leqslant b)$. Тесты квазимонотонности для отношений и функций на полурешётках совпадают.

Теорема 1. *Если функция $f : U_f \subseteq I^n \to L$ реализуема в базисе B, то отношение $\Gamma_{f,B}$ квазимонотонно.*

Доказательство. От противного. Предположим, что $\Gamma_{f,B}$ не квазимонотонно. Тогда по тесту квазимонотонности существуют элементы $a, b, c \in U_f$ такие, что верны отношения

$$\alpha(a_B, b_B, c_B) \;\text{ и }\; \overline{\alpha}(f(a), f(b), f(c)). \tag{1}$$

Первое из них означает, что для любого $i \in \{1, \ldots, s\}$ и любого $j \in \{1, \ldots, t_i\}$

$$\alpha(f_i^{(\mu_j)}(a), f_i^{(\mu_j)}(b), f_i^{(\mu_j)}(c)). \tag{2}$$

Функции проводимости элементов однокаскадной схемы совпадают с некоторыми функциями $f_i^{(\mu_j)}$, и операции дизъюнкции и конъюнкции проводимостей сохраняют отношение α. Поэтому из (2) следует, что $\alpha(f_C(a),\ f_C(b), f_C(c))$ для функции f_C любой однокаскадной схемы C. Так как суперпозиция монотонных функций также сохраняет отношение α, то последнее верно для любой (многокаскадной) схемы C и любой переключательной сети C. Но $((f_C \leqslant f)\,\&\alpha(f_C(a), f_C(b), f_C(c))) \Rightarrow (\alpha(f(a), f(b), f(c)))$, что противоречит второму отношению в (1). Теорема 1 доказана.

Заметим, что из квазимонотонности отношения $\Gamma_{f,B}$ следует квазимонотонность функции f. Обратное не верно: для квазимонотонной функции f и некоторого базиса B отношение $\Gamma_{f,B}$ может оказаться неквазимонотонным, что влечёт нереализуемость функции f в этом базисе.

Пример. Пусть $n = 1$, $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ и функции элементов e_1, e_2, e_3, e_4 представлены в табл. 3 под именами T_1, T_2, T_3, T_4 соответственно. В табл. 4 (*а*) задана некоторая функция проводимости f; построенное для неё отношение $\Gamma_{f,B}$ представлено в табл. 4 (*б*). Имеем $\overline{\alpha}(a, b, c)$, $\alpha(a_B, b_B, c_B)$ и $\overline{\alpha}(f(a), f(b), f(c))$, что означает квазимонотонность функции f и неквазимонотонность отношения $\Gamma_{f,B}$.

Таблица 3

Функции некоторых транзисторов

s	T_1	T_2	T_3	T_4
00	X′	X′	1	0
01	1	0	1	0
10	0	1	0	1
0X	1	0	1	0
X0	0	1	0	1
1X	0	1	0	1
X1	1	0	1	0
11	X′	X′	X′	X′
XX	X′	X′	1	0

Таблица 4

Функция проводимости f (*а*) и отношение $\Gamma_{f,B}$ (*б*)

	x	$f(x)$
a	01	0
b	XX	1
c	00	X

(*а*)

	$T_1(x)$	$T_2(x)$	$T_3(x)$	$T_4(x)$	$f(x)$
a_B	1	0	1	0	0
b_B	X′	X′	1	0	1
c_B	X′	X′	1	0	X

(*б*)

3. Условия реализуемости функций состояний однокаскадными схемами

При построении реальных схем — БИС и СБИС, моделью которых служат переключательные схемы, используются транзисторы различных типов и резисторы (обычно в цепях нагрузки). Транзистор, в случае его стандартного включения в схеме [5], можно рассматривать как элемент с одним управляющим полюсом — затвором и монотонной функцией проводимости между истоком и стоком, зависящей от состояния затвора и принимающей значения из множества $\widetilde{P_2} = \{0, 1, \mathrm{X}'\}$ — подполурешётки полурешётки $\widetilde{P_3}$. В табл. 3 приведены из [1] функции проводимости некоторых полевых транзисторов на точках полурешётки I; на остальных её элементах их значения вычисляются по правилу точечного продолжения. Здесь T_1 и T_2 — это функции проводимости МОП-транзисторов n- и p-типа соответственно, а T_3 и T_4 — функции проводимости нормально открытого и нормально закрытого транзисторов с затвором Шоттки. Из указанных транзисторов строятся так называемые КМОП-схемы, составляющие широкий класс реальных схем современной микроэлектронной техники [5]. Резистор формально определяется как переключательный элемент $R = (\varnothing, \mathrm{X})$ с пустым множеством управляющих полюсов и константной функцией проводимости со значением X.

Обозначим через F_2 класс всех монотонных функций проводимости со значениями в полурешётке $\widetilde{P_2}$ и через E_2 класс элементов, функции проводимости которых принадлежат F_2. Всюду далее будем предполагать, что константы проводимости 0 и 1, реализуемые соответственно разомкнутой и замкнутой цепями, присутствуют среди функций проводимости переключательных элементов любого базиса $B \subseteq E_2$.

Рассмотрим условия реализуемости функций на полурешётках в базисе $B \cup \{R\}$, где $B \subseteq E_2$. Введём в рассмотрение бинарное отношение γ на $\widetilde{P_3}$ как $\overline{\gamma} = \{(1,0), (1,\mathrm{X}), (1,1'), (\mathrm{X},0), (0',0)\}$ и распространим его покомпонентно на векторы с компонентами в $\widetilde{P_3}$, в том числе на элементы полурешётки состояний и на векторы состояний. Содержательно, отношение γ имеет следующий смысл: $(a,b) \notin \gamma$ тогда и только тогда, когда все проводимости в a "больше"всех проводимостей в b, где 1 "больше" X, 1 "больше" 0 и X "больше" 0. Непосредственно проверяется, что каждое из условий $\overline{\gamma}(a \vee b, c \vee d)$ и $\overline{\gamma}(a \wedge b, c \wedge d)$ влечет условие $\overline{\gamma}(a,c) \vee \overline{\gamma}(b,d)$. Это означает, что операции дизъюнкции и конъюнкции проводимостей сохраняют отношение γ. Будем говорить, что *переключательный элемент не сохраняет отношения* γ, если его функция проводимости обладает этим свойством. Заметим, что все функ-

ции, приведённые в табл. 3, не сохраняют отношения γ, ибо $\gamma(00', 11')$ и $(T_1(00'), T_1(11')) = (T_3(00'), T_3(11')) = (1, 0) \notin \gamma$, а также $\gamma(0'0, 1'1)$ и $(T_2(0'0), T_2(1'1)) = (T_4(0'0), T_4(1'1)) = (1, 0) \notin \gamma$. Далее будет показано, что элемент, не сохраняющий γ, играет ту же роль для функций на полурешётках, что инвертор для булевых функций.

Пару наборов (a, b), где $a, b \in I^n$, назовём $(1, 0)$-*разделимой множеством функций проводимости* G, если существует такая функция $g \in G$, что $(g(a), g(b)) = (1, 0)$. Воспользуемся также понятием П-*формулы* над множеством функций проводимости G [1], которое совместно с *компонентой* и *функцией* П-*формулы* определяется следующим индуктивным образом.

1) Если g есть символ n-местной функции из G и $x_1, \ldots, x_n$ — переменные со значениями из области определения функции g, то $C = g(x_1, \ldots, x_n)$ есть П-формула над G; её функция равна g, и g есть компонента П-формулы C.

2) Если C и D — П-формулы над G, то $(C \vee D)$ и $(C \wedge D)$ также П-формулы над G; их функции равны $g_C \vee g_D$ и $g_C \wedge g_D$ соответственно, где g_C, g_D — функции П-формул C и D; их компонентами являются компоненты П-формул C и D и только они.

3) Других П-формул над G нет.

Заметим, что в силу сохранения отношений α и γ операциями дизъюнкции и конъюнкции проводимостей функция любой П-формулы над G также сохраняет эти отношения, если этим свойством обладают функции из G. Для упрощения записи П-формул договоримся иногда опускать в них знак $\wedge$ и некоторые пары скобок, предполагая при этом, что приоритет у операции $\wedge$ выше, чем у операции $\vee$. Будем говорить, что некоторая функция проводимости f *реализуется* П-*формулой* C, если f реализуется П-формулой. По определению 1-реализуемость функции проводимости в базисе B равносильна её реализуемости некоторой П-формулой над множеством G_B.

Теорема 2. *Функция состояний* $\varphi = (f_0, f_1) : U_\varphi \subseteq I^n \to I$ *реализуема однокаскадной схемой в базисе* $B \cup \{R\}$, *где* $B \subseteq E_2$ *тогда и только тогда, когда для любой функции* $f \in \{f_0, f_1\}$ *выполнены условия*:

(а) *для любых* $a, b \in U_\varphi$ *таких, что* $f(a) = 1$ *и* $f(b) \leqslant 1'$, *или* $f(a) \leqslant 0'$ *и* $f(b) = 0$, *пара* (a, b) *является* $(1, 0)$-*разделимой множеством* G_B;

(б) *для любых* $a_0, a_1, b \in U_\varphi$ *таких, что* $f(a_0) \leqslant 1'$, $f(a_1) \leqslant 0'$ *и* $f(b) = \mathrm{X}'$, *хотя бы одна из пар* (a_1, a_0), (a_1, b) *или* (b, a_0) *является* $(1, 0)$-*разделимой множеством* G_B.

Доказательству теоремы предпошлём необходимые вспомогательные

предложения.

Утверждение 1. *Пусть функция проводимости* $f : U_f \subseteq I^n \to \widetilde{P_3}$ *реализуется* П*-формулой над множеством* $G \cup \{\mathrm{X}\}$*, где* $G \subseteq F_2$*. Тогда для любых* $a, b \in U_f$ *любое условие* $(f(a) = 1)\&(f(b) \leqslant 1')$ *или* $(f(a) \leqslant 0')\&(f(b) = 0)$ *влечёт* $(1,0)$*-разделимость пары* (a, b) *множеством* G.

Доказательство. Пусть П-формула Φ над $G \cup \{\mathrm{X}\}$ реализует f. Заметим, что для f с любым условием из утверждения имеет место $\overline{\gamma}(h(a), h(b))$ для любой функции h, реализующей f; в частности, $\overline{\gamma}(f_\Phi(a),\ f_\Phi(b))$ для П-формулы Φ. Ввиду сохранения отношения γ операциями $\vee$ и $\wedge$ в Φ последнее возможно лишь в случае, если существует компонента $g \in G$ П-формулы Φ такая, что $\overline{\gamma}(g(a), g(b))$. Но $\overline{\gamma} = \{(1,0), (1,\mathrm{X}), (1,1'), (\mathrm{X},0), (0',0)\}$ и функции из G принимают значения из $\{0, 1, \mathrm{X}'\}$. Поэтому $\overline{\gamma}(g(a), g(b))$ означает, что $g(a) = 1$ и $g(b) = 0$. Следовательно, пара (a, b) действительно $(1,0)$-разделима множеством функций G. Уивердение 1 доказано.

Обозначим через $F(a_0, a_1)$ множество всех функций проводимости $f : U_f \to \{1', 0', \mathrm{X}'\}$ таких, что$|U_f^{1'}| = |U_f^{0'}| = 1$, $f(a_0) = 1'$ и $f(a_1) = 0'$, и сформулируем условия реализуемости функций из $F(a_0, a_1)$.

Утверждение 2. *Функция* $f \in F(a_0, a_1)$ *реализуема* П*-формулой над множеством* $G \cup \{\mathrm{X}\}$*, где* $G \subseteq F_2$*, тогда и только тогда, когда пара* (a_1, a_0) *является* $(1,0)$*-разделимой множеством* G *или для любого* $b \in U_f^{\mathrm{X}'}$ *хотя бы одна из пар* (a_1, b) *или* (b, a_0) *является* $(1,0)$*-разделимой множеством* G.

Доказательство. *Необходимость* докажем индукцией по построению П-формулы $\Phi \leqslant f$.

База индукции. Рассмотрим возможные случаи:

1) $g \leqslant f$, $g \in G$. Тогда $g(a_0) \leqslant 1'$ и $g(a_1) \leqslant 0'$. Поскольку g принимает значения в $\widetilde{P_2}$, то $g(a_0) = 0$, $g(a_1) = 1$ и пара (a_1, a_0) является $(1,0)$-разделимой множеством G.

2) $\mathrm{X} \wedge g \leqslant f$, $g \in G$. Тогда $g(a_1) = 1$, $g(b) = 0$ и при $b \in U_f^{\mathrm{X}'}$ все пары (a_1, b) $(1,0)$-разделимы множеством G.

3) $\mathrm{X} \vee g \leqslant f$, где $g \in G$. Тогда $g(a_0) = 0$, $g(b) = 1$ и при $b \in U_f^{\mathrm{X}'}$ все пары (b, a_0) $(1,0)$-разделимы множеством G.

Шаг индукции. Предположим, что необходимость доказана для функций из $F(a_0, a_1)$, реализуемых некоторыми П-формулами Φ_1 и Φ_2 над $G \cup \{\mathrm{X}\}$. Докажем её для функций из $F(a_0, a_1)$, реализуемых П-формулами $\Phi_1 \vee \Phi_2$ и $\Phi_1 \wedge \Phi_2$.

Случай 1. Пусть $f \in F(a_0, a_1)$, $\Phi_1 \vee \Phi_2 \leqslant f$ и f_1, f_2 — функции, реализуемые П-формулами Φ_1, Φ_2 соответственно. Тогда (с точностью до перестановки f_1, f_2 местами) имеют место (см. табл. 5) следующие предложения:

$$f_1(a_0) \leqslant 1' \mathbin{\&} f_2(a_0) \leqslant 1' \mathbin{\&} f_1(a_1) \leqslant 0' \text{ и}$$
$$\forall b \in U_f^{\mathrm{X}'}(f_1(b) \leqslant \mathrm{X}' \mathbin{\&} f_2(b) \leqslant \mathrm{X}' \ \vee\ f_1(b) = 1 \ \vee\ f_2(b) = 1).$$

Т а б л и ц а 5

Разложение f по $\vee$

	f	$f_1 \vee f_2$	
a_0	$1'$	$\leqslant 1'$	$\leqslant 1'$
a_1	$0'$	$\leqslant 0'$	$\leqslant \mathrm{E}$
B_1	X'	$\leqslant \mathrm{X}'$	$\leqslant \mathrm{X}'$
B_2	X'	1	$\leqslant \mathrm{E}$
B_3	X'	$\leqslant \mathrm{E}$	1

Положим $B_1 = \{b \in {U_f}^{\mathrm{X}'} \mid f_1(b) \leqslant \mathrm{X}' \mathbin{\&} f_2(b) \leqslant \mathrm{X}'\}$, $B_2 = \{b \in {U_f}^{\mathrm{X}'} \mid f_1(b) = 1\}$, $B_3 = \{b \in {U_f}^{\mathrm{X}'} \mid f_2(b) = 1\}$. Заметим, что $U_f^{\mathrm{X}'} = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Построим функцию f_1' такую, что $U_{f_1'} = \{a_0, a_1\} \cup B_1$, $f_1'(a_0) = 1'$, $f_1'(a_1) = 0'$, $f_1'(b) = \mathrm{X}'$ для всех $b \in B_1$. По построению $U_{f_1'}^{\mathrm{X}'} = B_1$, $f_1' \in F(a_0, a_1)$ и $f_1 \leqslant f_1'$. Ввиду $\Phi_1 \leqslant f_1$ последнее означает, что функция f_1' реализуется П-формулой Φ_1. Следовательно, по предположению индукции доказываемое утверждение верно для f_1', т. е. пара (a_1, a_0) является $(1,0)$-разделимой множеством G или для любого $b \in B_1$ хотя бы одна из пар (a_1, b) или (b, a_0) является $(1,0)$-разделимой множеством G. В силу $f_1(a_0) \leqslant 1'$ и $f_1(b) = 1$ при любом $b \in B_2$ из утверждения 1 следует $(1,0)$-разделимость пар (b, a_0) для всех $b \in B_2$; то же самое верно для всех $b \in B_3$, поскольку $f_2(a_0) \leqslant 1'$ и $f_2(b) = 1$ для любого $b \in B_3$. Этим доказана необходимость условия утверждения в случае 1.

Случай 2, когда $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \leqslant f \in F(a_0, a_1)$, доказывается двойственным образом. Если f_1, f_2 — функции, реализуемые П-формулами Φ_1, Φ_2 соответственно, то

$$f_1(a_0) \leqslant 1' \mathbin{\&} f_1(a_1) \leqslant 0' \mathbin{\&} f_2(a_1) \leqslant 0',$$
$$\forall b \in U_f^{\mathrm{X}'}(f_1(b) \leqslant \mathrm{X}' \mathbin{\&} f_2(b) \leqslant \mathrm{X}' \ \vee\ f_1(b) = 0 \ \vee\ f_2(b) = 0).$$

Положим $B_1 = \{b \in {U_f}^{\mathrm{X}'} \mid f_1(b) \leqslant \mathrm{X}' \mathbin{\&} f_2(b) \leqslant \mathrm{X}'\}$, $B_2 = \{b \in {U_f}^{\mathrm{X}'} \mid f_1(b) = 0\}$, $B_3 = \{b \in {U_f}^{\mathrm{X}'} \mid f_2(b) = 0\}$. Построим функцию f_1' также,

как в случае 1. Тогда по предположению индукции пара (a_1, a_0) является $(1,0)$-разделимой множеством G, или для любого $b \in B_1$ хотя бы одна из пар (a_1, b) или (b, a_0) является $(1,0)$-разделимой множеством G. В силу выполнения условий $f_1(a_1) \leqslant 0'$ и $f_1(b) = 0$ для любого $b \in B_2$ и условий $f_2(a_1) \leqslant 0'$ и $f_2(b) = 0$ для любого $b \in B_3$ из утверждения 1 следует $(1,0)$-разделимость пар (a_1, b) для всех $b \in B_2 \cup B_3$. Необходимость доказана.

Достаточность. Если пара (a_1, a_0) является $(1,0)$-разделимой множеством G, то существует такая функция $g \in G$, что $g(a_1) = 1$ и $g(a_0) = 0$, т. е. $g \leqslant f$ и утверждение доказано. В противном случае множество $U_f^{\mathrm{X}'}$ представим в виде объединения двух подмножеств B_1 и $B_2 = U_f^{\mathrm{X}'} \setminus B_1$, включив в B_1 каждый такой и только такой элемент $b \in {U_f}^{\mathrm{X}'}$, для которого существует такая функция $g \in G$, что $g(a_1) = 1$ и $g(b) = 0$. Построим функцию f_1 как конъюнкцию всех таких функций g (по одной для каждого $b \in B_1$), если $B_1 \neq \varnothing$; иначе положим $f_1 = 1$. Тогда $f_1(a_1) = 1$ и $f_1(b) = 0$ для всех $b \in B_1$. Для всех остальных $b \in {U_f}^{\mathrm{X}'}$, т. е. для всех $b \in B_2$ пары (a_1, b) не являются $(1,0)$-разделимыми множеством G. Тогда по условию пары (b, a_0) $(1,0)$-разделимы при всех $b \in B_2$. В случае, когда $B_2 \neq \varnothing$, построим f_2 как дизъюнкцию всех таких функций $g \in G$, что $g(b) = 1$ для некоторого $b \in B_2$ и $g(a_0) = 0$; в противном случае положим $f_2 = 0$. Тогда $f_2(a_0) = 0$ и $f_2(b) = 1$ для всех $b \in B_2$. По построению $f_2 \vee \mathrm{X} \wedge f_1 \leqslant f$ и $f_1 \wedge (\mathrm{X} \vee f_2) \leqslant f$. Утверждение 2 доказано.

Таблица 6 частично иллюстрирует приведённое доказательство достаточности утверждения 2.

Т а б л и ц а 6

Реализация функции f

	f	f_1	f_2	$f_2 \vee \mathrm{X} \wedge f_1$	$f_1 \wedge (\mathrm{X} \vee f_2)$
a_0	$1'$	X'	0	$1'$	$1'$
a_1	$0'$	1	X'	$0'$	$0'$
B_1	X'	0	X'	X'	0
B_2	X'	X'	1	1	X'

Утверждение 3. *Функция проводимости $f : U_f \to \widetilde{P_2}$ из множества F_2 реализуема Π-формулой над множеством G тогда и только тогда, когда любая пара $(a, b) \in U_f^2$ такая, что $(f(a), f(b)) = (1, 0)$, является $(1,0)$-разделимой множеством G.*

Доказательство. Необходимость следует из утверждения 1, так как для $f \in F_2$ условия $(f(a) = 1)\&(f(b) \leqslant 1')$, $(f(a) \leqslant 0')\&(f(b) = 0)$ и $(f(a), f(b)) = (1, 0)$ равносильны.

Достаточность. Если пара (a, b) является $(1,0)$-разделимой множеством G, то по определению существует такая функция $g_{ab} \in G$, что $(g_{ab}(a), g_{ab}(b)) = (1,0)$. Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости следующего неравенства: $\bigvee\limits_{a \in U_f^1} \bigwedge\limits_{b \in U_f^0} g_{ab} \leqslant f$. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. *Функция проводимости* $f : U_f \subseteq I^n \to \widetilde{P_3}$ *реализуема* П*-формулой над множеством* $G \cup \{\mathrm{X}\}$, *где* $G \subseteq F_2$, *тогда и только тогда, когда* f *удовлетворяет условиям* (а) *и* (б) *теоремы* 2, *где* $U_\varphi = U_f$ *и* $G_B = G$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть П-формула Φ реализует функцию f. Необходимость условия (а) следует из утверждения 1. Докажем необходимость условия (б). Выберем произвольную пару $(a_0, a_1) \in U_f^2$ такую, что $f(a_0) \leqslant 1'$ и $f(a_1) \leqslant 0'$. Возможны два случая.

1) В случае $a_0 \neq a_1$ построим функцию f', положив $U_{f'} = \{a_0, a_1\} \cup U_f^{\mathrm{X}'}$, $f'(a_0) = 1'$, $f'(a_1) = 0'$ и $f'(b) = \mathrm{X}'$ для всех $b \in U_f^{\mathrm{X}'}$. По построению $f' \in F(a_0, a_1)$, $U_{f'}^{\mathrm{X}'} = U_f^{\mathrm{X}'}$ и $f \leqslant f'$, последнее в силу $\Phi \leqslant f$ означает, что $\Phi \leqslant f'$. Необходимость условия (б) теперь следует из утверждения 2.

Таблица 7

Компоненты разложения функции f

h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	f
0	0	E	E	E	0
1	X$'$	E	E	E	1
0	1	X	0$'$	1$'$	X
0	X$'$	E	1$'$	1$'$	1$'$
X$'$	1	E	E	0$'$	0$'$
X$'$	X$'$	X$'$	X$'$	X$'$	X$'$

2) Если $a_0 = a_1 = a$, то $(f(a_0) \leqslant 1')\&(f(a_1) \leqslant 0')$ означает, что $f(a) = \mathrm{X}$. В этом случае $(1,0)$-разделимость пары (a_1, a_0) невозможна. Докажем $(1,0)$-разделимость при любом $b \in U_f^{\mathrm{X}'}$ хотя бы одной из пар (a, b) или (b, a). Предположим, что для некоторого $b \in U_f^{\mathrm{X}'}$ обе пары (a, b) и (b, a) не являются $(1,0)$-разделимыми множеством G, т. е. $(g(a), g(b)) \neq (1,0)$ и $(g(b), g(a)) \neq (1,0)$ для любой функции $g \in G$. Тогда в силу $G \subseteq F_2$ множество $g(a) \cap g(b)$ непусто при всех $g \in G \cup \{\mathrm{X}\}$, что вследствие монотонности операций дизъюнкции и конъюнкции проводимостей означает, что $f_\Phi(a) \cap f_\Phi(b) \neq \varnothing$ для функции f_Φ, реализуемой любой П-формулой Φ над множеством $G \cup \{\mathrm{X}\}$. Если допустить, что

$f_\Phi \leqslant f$, то $f(a) \cap f(b) \neq \varnothing$, что неверно, поскольку $f(a) = \mathrm{X}$ и $f(b) = \mathrm{X}'$. Необходимость доказана.

Достаточность. Имеет место следующая реализация функции f П-формулой с компонентами h_1–h_5, представленными в табл. 7,

$$h_1 \vee h_2 \wedge (h_3 \wedge h_4 \vee h_5) \leqslant f.$$

Докажем, что все функции h_1–h_5, а значит, и f, реализуемы П-формулами над множеством $G \cup \{\mathrm{X}\}$.

1) Для функции $h_1 \in F_2$ выполняется следующая цепочка импликаций: $((h_1(a), h_1(b)) = (1,0)) \Rightarrow ((f(a) = 1)\&(f(b) \leqslant 1')) \Rightarrow$ (по условию (а)) $\Rightarrow$ (пара (a,b) является $(1,0)$-разделимой множеством G). Следовательно, по утверждению 3 функция h_1 реализуется П-формулой над множеством G.

2) Для функции $h_2 \in F_2$ аналогично имеем $((h_2(a), h_2(b)) = (1,0)) \Rightarrow ((f(a) \leqslant 0'\ \&\ f(b) = 0)) \Rightarrow$ (по условию (а)) $\Rightarrow$ (пара (a,b) является $(1,0)$-разделимой множеством G), и требуемая реализуемость h_2 следует из утверждения 3.

3) Функцию h_4 будем разлагать по операциям дизъюнкции и конъюнкции проводимостей до тех пор, пока не получим все компоненты разложения q_i такие, что $|U^{1'}_{q_i}| = |U^{0'}_{q_i}| = 1$. Докажем реализуемость компонент q_i (а значит, и функции h_4). Пусть $U^{1'}_{q_i} = \{a_0\}$, $U^{0'}_{q_i} = \{a_1\}$. Тогда $q_i \in F(a_0, a_1)$, $U^{\mathrm{X}'}_{q_i} = U^{\mathrm{X}'}_{h_4} = U^{\mathrm{X}'}_{f}$, $h_4(a_0) = 1'$, $h_4(a_1) = 0'$, $f(a_0) = 1'$, $f(a_1) = \mathrm{X} \leqslant 0'$ и по условию (б) хотя бы одна из пар (a_1, a_0), (a_1, b) или (b, a_0) является $(1,0)$-разделимой множеством G для всякого $b \in U^{\mathrm{X}'}_{q_i}$. Следовательно, по утверждению 2 функция q_i реализуема П-формулой над множеством $G \cup \{\mathrm{X}\}$.

4) Реализуемость функции h_5 доказывается аналогично.

Т а б л и ц а 8

Разложение функции h_3

$g_1 \wedge$	$g_2 \vee$	$g_3 \wedge$	$g_4 \leqslant$	h_3
X	$0'$	$1'$	E	X
E	$1'$	$0'$	X	X
X'	X'	X'	X'	X'

5) Функцию h_3 будем разлагать по операциям дизъюнкции и конъюнкции проводимостей до тех пор, пока не получим все компоненты разложения q_i такие, что $|U^{\mathrm{X}}_{q_i}| = 1$. Шаг такого разложения на компоненты с меньшими областями определения значения X показан в табл. 8. Реализуемость компонент q_2, q_3 доказывается аналогично реализуемости

h_4. Пусть q — любая из компонент q_1, q_4, и $U_q^{\mathrm{X}} = \{a\}$. Тогда по построению функций q и h_3 имеем $U_q^{\mathrm{X}'} = U_f^{\mathrm{X}'}$ и $a \in U_{h_3}^{\mathrm{X}} = U_f^{\mathrm{X}}$. Следовательно, $f(a) = \mathrm{X} \leqslant 1'$, $f(a) \leqslant 0'$ и по условию (б) при $a_0 = a_1 = a$ и всех $b \in U_q^{\mathrm{X}'}$ хотя бы одна из пар (a, b) или (b, a) является $(1, 0)$-разделимой множеством G, т. е. для каждого $b \in U_q^{\mathrm{X}'}$ существует $g \in G$ такая, что $(g(a), g(b)) = (1, 0)$ или $(g(b), g(a)) = (1, 0)$. Построим функцию f_1 как конъюнкцию всех g таких, что $g(a) = 1$, и функцию f_2 как дизъюнкцию всех таких g, что $g(a) = 0$. Получим $f_1(a) = 1$ и $f_2(a) = 0$ для каждого $b \in U_q^{\mathrm{X}'}$ или $f_1(b) = 0$, или $f_2(b) = 1$, и f_1, f_2 принимают значения в $\{0, 1, \mathrm{X}'\}$. Поэтому $f_2 \vee \mathrm{X} \wedge f_1 \leqslant q$. Утверждение 4 доказано.

Доказательство теоремы 2. По определению функция состояний $\varphi = (f_0, f_1)$ реализуема однокаскадной схемой в некотором базисе, если и только если любая из функций проводимости $f \in \{f_0, f_1\}$ 1-реализуема в этом базисе, т. е. реализуется П-формулой над множеством функций проводимости всех базисных элементов. В силу этого теорема следует из утверждения 4. Теорема 2 доказана.

4. Условия реализуемости функций состояний многокаскадными схемами

Теорема 3. *Функция состояний $\varphi = (f_0, f_1) : U_\varphi \subseteq I^n \to I$, не реализуемая однокаскадной схемой, реализуема в базисе $B \cup \{R\}$, где $B \subseteq E_2$, тогда и только тогда, когда отношение $\Gamma_{\varphi,B}$ квазимонотонно и в B содержится элемент, не сохраняющий отношения γ; в этом случае φ реализуется двухкаскадной схемой в данном базисе.*

Доказательство. *Необходимость.* Квазимонотонность $\Gamma_{\varphi,B}$ является необходимым условием реализуемости φ в базисе $B \cup \{R\}$ в силу теоремы 1 и того, что отношение $\Gamma_{\varphi,B}$ квазимонотонно, если таково $\Gamma_{\varphi,B\cup\{R\}}$. Так как функция φ реализуема в базисе $B \cup \{R\}$, но не однокаскадной схемой, то хотя бы одна функция проводимости $f(x_1, \ldots, x_n) \in \{f_0, f_1\}$ реализуема, но не 1-реализуема в том же базисе. Это значит, что, во-первых, f не реализуема П-формулой над $G_B \cup \{\mathrm{X}\}$, где G_B — множество функций проводимости элементов в B при всевозможных способах подключения их управляющих полюсов к входным полюсам x_1, …, x_n схемы. Во-вторых, существуют такие функции состояний $y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$, …, $y_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$, реализуемые в базисе $B \cup \{R\}$ некоторыми схемами C_1, …, C_m соответственно, что f реализуется некоторой П-формулой над $G_{B'} \cup \{\mathrm{X}\}$, где $G_{B'}$ — множество функций проводимости элементов в B при всевозможных способах подключения их управляющих полюсов к x_1, …, x_n и выходным полюсам

y_1, …, y_m схем C_1, …, C_m соответственно. Нереализуемость функции f П-формулой над множеством $G_B \cup \{\mathrm{X}\}$ равносильна выполнению хотя бы одного из следующих двух условий, являющихся отрицаниями условий соответственно (а) и (б) теоремы 2:

1) для некоторых $a, b \in U_f$ таких, что $f(a) = 1$ и $f(b) \leqslant 1'$, или $f(a) \leqslant 0'$ и $f(b) = 0$, пара (a, b) не является $(1,0)$-разделимой множеством G_B;

2) для некоторых $a_0, a_1, b \in U_f$ таких, что $f(a_0) \leqslant 1'$, $f(a_1) \leqslant 0'$ и $f(b) = \mathrm{X}'$, ни одна из пар (a_1, a_0), (a_1, b), (b, a_0) не является $(1,0)$-разделимой множеством G_B.

Предположим, что все элементы базиса $B \cup \{R\}$ сохраняют отношение γ. Тогда имеет место цепочка импликаций: (пара (a, b) не является $(1,0)$-разделимой множеством G_B) $\Rightarrow$ (для каждой функции $g \in G_B$ верно $(g(a), g(b)) \neq (1,0)$) $\Rightarrow$ (ввиду $g(a), g(b) \in \widetilde{P_2}$ и $\gamma(\mathrm{X}, \mathrm{X})$) $\Rightarrow$ $(\gamma(g(a), g(b))$ для всех $g \in G_B \cup \{\mathrm{X}\})$ $\Rightarrow$ $(\gamma(\varphi_C(a), \varphi_C(b))$ для функции φ_C любой схемы в базисе $B \cup \{R\}$ $\Rightarrow$ $\gamma(g'(a), g'(b))$ для всех $g' \in G_{B'} \cup \{\mathrm{X}\})$ $\Rightarrow$ $((g'(a), g'(b)) \neq (1,0)$ для всех $g' \in G_{B'})$ $\Rightarrow$ (пара (a, b) не является $(1,0)$-разделимой множеством $G_{B'}$). Следовательно, выполняется хотя бы одно из условий $1'$ и $2'$, получаемых соответственно из 1 и 2 заменой G_B на $G_{B'}$, и по утверждению 4 функция f не реализуется П-формулой над $G_{B'} \cup \{\mathrm{X}\}$. Полученное противоречие означает, что в базисе B существует элемент, не сохраняющий γ. Необходимость доказана.

Для доказательства достаточности сначала докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Утверждение 5. *Функция проводимости $f \in F_2$ является 2-реализуемой в базисе $B \cup \{R\}$, где $B \subseteq E_2$, если отношение $\Gamma_{f,B}$ квазимонотонно и в B имеется элемент, не сохраняющий отношения γ.*

Доказательство. Пусть $G_B = \{g_1, \ldots, g_s\}$ — множество функций проводимости элементов в B при всевозможных способах подключения их управляющих полюсов к входным полюсам схемы, и U_f — область определения функции f. Если для f и множества $G = G_B$ выполнено условие утверждения 3, то f реализуется некоторой П-формулой над G_B и, значит, 1-реализуема (что является частным случаем 2-реализуемости) в базисе $B \cup \{R\}$. Пусть это условие нарушается, т. е. существуют такие $(1,0)$-неразделимые множеством G_B пары $(a, b) \in U_f^2$, что $(f(a), f(b)) = (1,0)$. Обозначим через M множество всех таких пар: $M = \{(a, b) \in U_f^2 \mid (f(a), f(b)) = (1,0)\ \&\ \forall g \in G_B((g(a), g(b)) \neq (1,0))\}$. Положим $G = G_B$ и выберем произвольную пару (a, b) из M. По построению в отношении $\Gamma_{f,B}$ содержатся пары $((g_1(x), \ldots, g_s(x)), f(x))$ для всех $x \in U_f$. Для

выбранных a, b справедливо $f(a) \cap f(b) = \varnothing$, поэтому в силу квазимонотонности $\Gamma_{f,B}$ имеем $(g_1(a), \ldots, g_s(a)) \cap (g_1(b), \ldots, g_s(b)) = \varnothing$. Поэтому для некоторого $j \in \{1, \ldots, s\}$ множество $g_j(a) \cap g_j(b)$ пусто. Отсюда и из соотношений $(g_j(a), g_j(b)) \neq (1, 0)$, $g_j(a), g_j(b) \in \widetilde{P_2}$ следует, что $(g_j(a), g_j(b)) = (0, 1)$.

Пусть функция $f_e : I^k \to \widetilde{P_2}$ элемента $e \in B$ не сохраняет отношения γ, и для $r, q \in I^k$ имеет место $\gamma(r, q)$ и $\overline{\gamma}(f_e(r), f_e(q))$. По определению отношение $\overline{\gamma} = \{(1,0), (1,\mathrm{X}), (1,1'), (\mathrm{X},0), (0',0)\}$ и функция f_e принимает значения из множества $\{0, 1, \mathrm{X}'\}$. Поэтому $(f_e(r), f_e(q)) = (1, 0)$. Для каждого управляющего полюса $i = 1, \ldots, k$ элемента e зададим функцию $h_i : \{a, b\} \to I$ как $h_i(a) = r_i$, $h_i(b) = q_i$, где $(r_1, \ldots, r_k) = r$ и $(q_1, \ldots, q_k) = q$. Пусть $h_i = (h_{i0}, h_{i1})$, $r_i = (r_{i0}, r_{i1})$, $q_i = (q_{i0}, q_{i1})$, где h_{i0}, h_{i1} — функции проводимости со значениями в $\widetilde{P_3}$, $r_{i0}, r_{i1}, q_{i0}, q_{i1} \in \widetilde{P_3}$, и $h_{i0}(a) = r_{i0}$, $h_{i0}(b) = q_{i0}$, $h_{i1}(a) = r_{i1}$, $h_{i1}(b) = q_{i1}$. Ввиду $\gamma(r, q)$ имеем $\gamma(r_i, q_i)$ и $\gamma(r_{i0}, q_{i0})$. Возможны следующие варианты:

1) $r_{i0} \cap q_{i0} \neq \varnothing$. Тогда функция проводимости h_{i0} реализуется константой из $\{0, 1, \mathrm{X}\}$.

2) $(0, 1) \leqslant (r_{i0}, q_{i0})$. Тогда функция h_{i0} реализуется функцией g_j.

3) $(0, \mathrm{X}) \leqslant (r_{i0}, q_{i0})$. Тогда $g_j \wedge \mathrm{X} \leqslant h_{i0}$.

4) $(\mathrm{X}, 1) \leqslant (r_{i0}, q_{i0})$. Тогда $g_j \vee \mathrm{X} \leqslant h_{i0}$.

Других вариантов значений r_{i0} и q_{i0} при условии $\gamma(r_{i0}, q_{i0})$ нет.

Аналогичные реализации построим для функции h_{i1}. Так построим k схем первого уровня, реализующих функции $h_1, \ldots, h_k$, и соединим их выходы с управляющими полюсами элемента e. В множество G добавим функцию проводимости $f_e(h_1(x), \ldots, h_k(x))$ элемента e при выполненных соединениях его управляющих полюсов. По построению $f_e(h_1(a), \ldots, h_k(a)) = f_e(r) = 1$, $f_e(h_1(b), \ldots, h_k(b)) = f_e(q) = 0$, т. е. пара (a, b) является $(1, 0)$-разделимой множеством G. Повторив эти действия для всех оставшихся пар (a, b) в M, построим множество функций $G \supseteq G_B$ такое, что все пары $(a, b) \in U_f^2$ такие, что $(f(a), f(b)) = (1, 0)$, окажутся $(1, 0)$-разделимыми множеством G. Тогда по утверждению 3 функция f реализуема П-формулой над множеством G, а поскольку в G содержатся функции выходов некоторых однокаскадных схем в базисе $B \cup \{R\}$, то последнее означает, что функция f является 2-реализуемой в этом базисе. Утверждение 5 доказано.

Утверждение 6. *Функция проводимости $f \in F_2$ является 2-реализуемой в базисе $B \subseteq E_2$, если отношение $\Gamma_{f,B}$ квазимонотонно и в B содержится такой элемент $e = (\{x_1, \ldots, x_k\}, f_e)$, что сужение функции f_e на множество $(\widetilde{P_2}^2)^k$ не сохраняет отношения γ.*

Доказательство совпадает с доказательством утверждения 5, но r_{i0} и q_{i0} берутся в множестве $\widetilde{P_2}$, а не в $\widetilde{P_3}$. Тогда выполняется хотя бы одно из условий $r_{i0} \cap q_{i0} \neq \varnothing$ или $(r_{i0}, q_{i0}) = (0, 1)$; в первом случае функция h_{i0} реализуется константой из $\{0, 1\}$, во втором — функцией g_j. Утверждение 6 доказано.

Утверждение 7. *Пусть функции $f : U \subseteq I^n \to \widetilde{P_3}$ и $g : U \to \widetilde{P_2}$ таковы, что при всех $a, b \in U$ из $g(a) \cap g(b) = \varnothing$ следует $f(a) \cap f(b) = \varnothing$. Тогда если отношение $\Gamma_{f,B}$ квазимонотонно, то отношение $\Gamma_{g,B}$ квазимонотонно.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, a_3 \in U$. Тогда верна цепочка импликаций: $(\overline{\alpha}(g(a_1), g(a_2), g(a_3))) \Rightarrow$ (по лемме о пересечении подмножеств в [2]) $\Rightarrow (\exists i, j \in \{1, 2, 3\}(g(a_i) \cap g(a_j) = \varnothing)) \Rightarrow$ (по условию) $\Rightarrow (\exists i, j \in \{1, 2, 3\}(f(a_i) \cap f(a_j) = \varnothing)) \Rightarrow (\overline{\alpha}(f(a_1), f(a_2), f(a_3))) \Rightarrow$ (в силу квазимонотонности отношения $\Gamma_{f,B}$) $\Rightarrow (\overline{\alpha}(a_{1B}, a_{2B}, a_{3B})$, где x_B — вектор значений функций всех элементов из B на аргументе x). Следовательно, по тесту квазимонотонности отношение $\Gamma_{g,B}$ квазимонотонно. Утверждение 7 доказано.

Доказательство достаточности теоремы 3. Пусть $f \in \{f_0, f_1\}$. Рассмотрим функции $h_1 - h_5$ из табл. 7 — компоненты разложения f по формуле $h_1 \vee h_2 \wedge (h_3 \wedge h_4 \vee h_5) \leqslant f$, и докажем, что все они 2-реализуемы в базисе $B \cup \{R\}$. Отношение $\Gamma_{f,B}$ квазимонотонно вследствие квазимонотонности $\Gamma_{\varphi,B}$, функции h_1, h_2 принадлежат F_2 и для функций $g \in \{h_1, h_2\}$ и f выполнены условия утверждения 5. Следовательно, отношения $\Gamma_{h_1,B}$ и $\Gamma_{h_2,B}$ квазимонотонны и по утверждению 5 функции h_1, h_2 2-реализуемы в базисе $B \cup \{R\}$.

Для функций h_3, h_4 построим реализации $\mathrm{X} \vee g_1 \leqslant h_3$, $\mathrm{X} \wedge g_2 \leqslant h_4$, где $g_1, g_2 \in F_2$ и $U^0_{g_1} = U^{\mathrm{X}}_{h_3} = U^{\mathrm{X}}_f$, $U^1_{g_1} = U^{\mathrm{X}'}_{h_3} = U^{\mathrm{X}'}_f$, $U^1_{g_2} = U^{0'}_{h_4} = U^{\mathrm{X}}_f$, $U^0_{g_2} = U^{\mathrm{X}'}_{h_4} = U^{\mathrm{X}'}_f$ (см. табл. 9). Функции g_1, g_2 являются 2-реализуемыми, что доказывается также, как 2-реализуемость h_1, h_2. Следовательно, h_3 и h_4 тоже 2-реализуемы.

Таблица 9

f	h_3	g_1	$\mathrm{X} \vee g_1 \leqslant h_3$	h_4	g_2	$\mathrm{X} \wedge g_2 \leqslant h_4$
X	X	0	X	$0'$	1	X
$1'$	E	X'	$0'$	$1'$	X'	$1'$
X'	X'	1	1	X'	0	0

Функцию h_5 будем разлагать по операциям дизъюнкции и конъюнкции проводимостей до тех пор, пока не получим все компоненты разложения q_i такие, что $|U^{1'}_{q_i}| = |U^{0'}_{q_i}| = 1$. Возьмём произвольную компоненту

q_i этого разложения. Пусть $q_i(a_0) = 1'$ и $q_i(a_1) = 0'$. Тогда по разложению $h_5(a_0) = 1'$, $h_5(a_1) = 0'$ и по табл. 7 $f(a_1) = 0'$ и ($f(a_0) = 1'$ или $f(a_0) = \mathrm{X}$). Следовательно, $\overline{\alpha}(f(a_0), f(a_1), f(b))$ для любого $b \in {U_f}^{\mathrm{X}'}$. Отсюда в силу квазимонотонности отношения $\Gamma_{f,B}$ получаем $\overline{\alpha}(a_{0B}, a_{1B}, b_B)$ для всех $b \in {U_f}^{\mathrm{X}'}$. Так как a_{0B}, a_{1B}, b_B — векторы с компонентами из $\widetilde{P_2}$, то выполняется хотя бы одно из условий $a_{0B} \cap a_{1B} = \varnothing$, $a_{0B} \cap b_B = \varnothing$ или $a_{1B} \cap b_B = \varnothing$ (здесь x_B — вектор значений всех функций в G_B на аргументе x). Рассмотрим возможные случаи.

1) $a_{0B} \cap a_{1B} = \varnothing$. Построим функцию $g \in F_2$ такую, что $U_g = U_{q_i}$, $g(a_0) = 0$, $g(a_1) = 1$ и $g(b) = \mathrm{X}'$ для всех $b \in U_{q_i}^{\mathrm{X}'}$. Имеем $g \leqslant q_i$. Отношение $\Gamma_{g,B}$ квазимонотонно по построению g. Следовательно, функция g и q_i, 2-реализуемы по утверждению 5.

2) $a_{0B} \cap a_{1B} \neq \varnothing$. Определим в $U_{q_i}^{\mathrm{X}'}$ два подмножества: $B_1 = \{b \in U_{q_i}^{\mathrm{X}'} \mid a_{0B} \cap b_B \neq \varnothing\}$ и $B_2 = \{b \in U_{q_i}^{\mathrm{X}'} \mid a_{0B} \cap b_B = \varnothing\}$. По определению B_1 ввиду ($a_{0B} \cap a_{1B} = \varnothing \ \vee \ a_{0B} \cap b_B = \varnothing \ \vee \ a_{1B} \cap b_B = \varnothing$) имеем $a_{1B} \cap b_B = \varnothing$ для всех $b \in B_1$. Построим функции $g_3, g_4 \in F_2$ как $U_{g_3}^1 = \{a_1\}$, $U_{g_3}^0 = B_1$, $U_{g_4}^0 = \{a_0\}$, $U_{g_4}^1 = B_2$ (см. табл. 10). Тогда $g_3 \wedge \mathrm{X} \vee g_4 \leqslant q_i$ и, кроме того, отношения $\Gamma_{g_3,B}$, $\Gamma_{g_4,B}$ квазимонотонны. По утверждению 5 функции g_3, g_4, а значит, q_i и h_5 2-реализуемы в базисе $B \cup \{R\}$.

Т а б л и ц а 10

	q_i	g_3	g_4	$g_3 \wedge \mathrm{X} \vee g_4 \leqslant q_i$
a_0	$1'$	X'	0	$1'$
a_1	$0'$	1	X'	$0'$
B_1	X'	0	X'	X'
B_2	X'	X'	1	1

Таким образом, каждая из функций проводимости f_0, f_1 является 2-реализуемой в базисе $B \cup \{R\}$. Поэтому функция состояний φ реализуема двухкаскадной схемой в том же базисе. Теорема 3 доказана.

Ввиду несохранения отношения γ функциями T_1, T_2, T_3, T_4 в табл. 3 справедливо

Следствие 1. *Пусть в базисе B содержится хотя бы один из элементов с функцией проводимости $f \in \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$. Тогда функция состояний φ реализуема в базисе $B \cup \{R\}$ тогда и только тогда, когда отношение $\Gamma_{\varphi,B}$ квазимонотонно.*

Существуют функции проводимости, не реализуемые в базисе $B \cup \{R\}$ при любом $B \subseteq E_2$, даже при $B = E_2$. В частности, для функции f, принимающей значения $0'$, $1'$ и X' на трёх попарно пересекающихся наборах, легко устанавливается неквазимонотонность отношения Γ_{f,E_2}, что влечёт

неквазимонотонность отношения $\Gamma_{f,E_2\cup\{R\}}$. Последнее в силу теоремы 1 означает нереализуемость функции f в базисе $E_2 \cup \{R\}$.

Теорема 4. *Функция состояний* $\varphi : U_\varphi \to \widetilde{P_2}^2$, *не реализуемая однокаскадной схемой, реализуема в базисе* $B \subseteq E_2$ *тогда и только тогда, когда отношение* $\Gamma_{\varphi,B}$ *квазимонотонно и в множестве* B *содержится такой элемент* $e = (\{x_1,\ldots,x_k\}, f_e)$, *что функция* f_e *на множестве* $(\widetilde{P_2}^2)^k$ *не сохраняет отношения* γ.

Необходимость доказывается также, как в теореме 3. Достаточность следует из утверждения 6.

Заметим, что из функций, представленных в табл. 3, только для одной функции T_3 ограничение её на множестве $\widetilde{P_2}^2$ не сохраняет отношения γ: $\gamma(00,10)$ и $(T_3(00), T_3(10)) = (1,0) \notin \gamma$. Это означает, что в случае квазимонотонности соответствующего отношения $\Gamma_{\varphi,B}$ функция состояний φ реализуема в базисе, содержащем только нормально открытый транзистор с затвором Шоттки.

В [4] показано, что классы функций, реализуемых в заданном базисе с использованием мостикового соединения, и функций, реализуемых в том же базисе параллельно-последовательными схемами, совпадают. Таким образом, условия теорем 2–4 в действительности являются условиями реализуемости функций на полурешётке переключательными схемами с параллельным, последовательным и мостиковым соединениями элементов заданного базиса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агибалов Г. П.** Дискретные автоматы на полурешетках. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1993.
2. **Агибалов Г. П., Бузанов В. А., Липский В. Б., Румянцев Б. Ф.** Логическое проектирование переключательных автоматов. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1983.
3. **Агибалов Г. П., Парватов Н. Г.** О полноте систем монотонных функций для реализации квазимонотонных функций на конечных полурешётках // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 4. С. 5–22.
4. **Панкратова И. А.** Параллельно-последовательная реализация функции мостикового соединения на полурешётках // Вестник Томского ун-та (приложение). 2005. № 14. С. 229–233.

5. Степаненко И. Р. Основы микроэлектроники. М.: Сов. радио, 1980.

Адрес автора:

Томский государственный ун-т,
пр. Ленина, 36,
634050, Томск, Россия.
E-mail: pank@fpmk.tsu.ru

Статья поступила
31 августа 2005 г.