ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2006. Серия 1. Том 13, № 3. 62–82

УДК 519.7

ТЕОРЕМА О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛНОТЕ В КЛАССЕ КВАЗИМОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ НА КОНЕЧНОЙ ПОЛУРЕШЁТКЕ

Н. Г. Парватов

Решается проблема функциональной полноты в классе Q_L квазимонотонных функций на конечной полурешётке L при суперпозициях со всеми так называемыми слабо существенными функциями; даётся эффективное описание предполных классов в Q_L, содержащих все слабо существенные функции; при $k \to \infty$ находится асимптотика числа таких классов на полурешётке всех непустых подмножеств k-элементного множества.

1. Основные определения

Квазимонотонные и монотонные функции на полурешётках позволяют адекватно и с заданной точностью описывать динамическое поведение дискретных автоматов [1]. В связи с этим представляются важными задачи функциональной полноты в классах квазимонотонных и монотонных функций на полурешётках. Эти задачи были решены полностью в случае трёхэлементной полурешётки в [5]. В случае же произвольной полурешётки задачи далеки от полного решения. В настоящей статье устанавливается основанный на предполных классах критерий полноты в классе квазимонотонных функций при суперпозициях со всеми так называемыми слабо существенными квазимонотонными функциями.

Пусть на конечном множестве L задано отношение частичного порядка $\leqslant$, причём множество L относительно этого порядка образует структуру верхней полурешётки, не являющейся решёткой [2]. Это означает, что в L для любых двух элементов существует точная верхняя грань (наименьшая верхняя грань), а точная нижняя грань (наибольшая нижняя грань) существует не для любых двух элементов. Будем рассматривать функции, зависящие от конечного числа переменных, принимающие значения вместе с переменными в полурешётке L, т. е. функции вида $L^n \to L$ при $n = 0, 1, \ldots$. Множество всех таких функций обозначается через P_L.

Функции в P_L рассматриваются с точностью до фиктивных переменных. Для них считаются известными понятия суперпозиции, замкнутого класса и др. [6]. Наименьший замкнутый класс, содержащий множество функций F из P_L, обозначается через $[F]$. Отношение порядка $\leqslant$ естественным образом распространяется на функции из P_L и на наборы из L^n при $n = 1, 2, \ldots$. Именно, наборы в L^n сравниваются покомпонентно: для произвольных наборов A и B из L^n считается, что $A \leqslant B$, если $A_{(i)} \leqslant B_{(i)}$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n$, (здесь и далее для произвольного набора A через $A_{(i)}$ обозначается его i-я компонента). Функции в P_L сравниваются поточечно: для функций f и g, зависящих от n переменных, считается, что $f \leqslant g$, если $f(A) \leqslant g(A)$ для любого набора A из L^n; при этом функция f называется *минорантой* функции g. Функция $f : L^n \to L$ называется *монотонной*, если $(A \leqslant B) \Rightarrow (f(A) \leqslant f(B))$ для любых наборов A и B из L^n. Функция, имеющая монотонную миноранту, называется *квазимонотонной*. Функция, имеющая монотонную миноранту, существенно зависящую не более чем от одной переменной, называется *слабо существенной*. Другое определение квазимонотонной функции следует из теста квазимонотонности [1].

Тест квазимонотонности. *Функция $f : L^n \to L$ тогда и только тогда квазимонотонна, когда для любого имеющего нижнюю грань в L^n подмножества A из L^n (достаточно такого, что $|A| \leqslant q(L)$, где $q(L)$ — максимальная мощность минимального по включению подмножества в L, не имеющего в L нижней грани) множество $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ также имеет нижнюю грань в L.*

Так как в конечной полурешётке наличие нижней грани для любого подмножества равносильно наличию для него точной нижней грани, то в тесте квазимонотонности везде вместо слов «нижняя грань» можно читать «точная нижняя грань». В дальнейшем будем пользоваться этой возможностью без дополнительных оговорок.

Классы всех квазимонотонных и всех слабо существенных функций, заданных на полурешётке L, обозначаются через Q_L и Φ_L соответственно. Каждый из этих классов замкнут. Множество F квазимонотонных функций будем называть *полным в классе Q_L при Φ_L-суперпозиции*, если $[\Phi_L \cup F] = Q_L$. Проблема полноты в классе Q_L при Φ_L-суперпозиции состоит в установлении необходимых и достаточных условий полноты в Q_L при Φ_L-суперпозиции произвольной системы F квазимонотонных функций. Всякий замкнутый класс в P_L, содержащий множество Φ_L, будем называть *Φ_L-классом*. Максимальный по включению замкнутый класс, являющийся собственным подмножеством класса Q_L, называется предполным классом в Q_L. Поставленная выше проблема может быть решена описанием такой системы S Φ_L-классов $Q_1, Q_2, \ldots$, содержащихся в Q_L, что система квазимонотонных функций F полна в классе Q_L при Φ_L-суперпозиции тогда и только тогда, когда F не содержится целиком ни в одном из классов Q_i. Систему S, обладающую описанными свойствами, будем называть *критериальной системой в* Q_L *при* Φ_L*-суперпозиции.* Любая такая система S должна содержать множество $S(\Phi_L, Q_L)$ всех предполных в Q_L Φ_L-классов. Основная цель данной статьи — установить критерий полноты в классе Q_L относительно Φ_L-суперпозиции, а также эффективно (как классы сохранения некоторых отношений) описать все предполные в Q_L Φ_L-классы. Напомним понятие сохраняемого функцией отношения. Пусть задана функция $f : L^m \to L$. Для произвольного $m = 1, 2, \ldots$ определим такую функцию $f^{[m]} : (L^m)^n \to L^m$, что для наборов $Y_1, \ldots, Y_n$ из L^m

$$f^{[n]}(Y_1, \ldots, Y_n) = (f(Y_{1(1)}, \ldots, Y_{n(1)}), \ldots, f(Y_{1(n)}, \ldots, Y_{n(m)})).$$

В частности, в соответствии с этим определением $f^{[1]} = f$. Говорят, что функция f *сохраняет отношение* α из L^m, если для любых наборов $Y_1, \ldots, Y_n$, удовлетворяющих отношению α, набор $f^{[m]}(Y_1, \ldots, Y_n)$ также удовлетворяет отношению α. Если $R = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ — множество отношений и $F = \{f, g, \ldots\}$ — множество функций, то множество всех отношений, сохраняемых всеми функциями из F, обозначается через $\mathrm{Inv}(F)$ или $\mathrm{Inv}(f, g, \ldots)$, а множество всех функций, сохраняющих все отношения в R, обозначается через $\mathrm{Pol}(R)$ или через $\mathrm{Pol}(\alpha, \beta, \ldots)$. Отношения из множества $\mathrm{Inv}(F)$ называются *инвариантными* для класса F. Сокращения $F(R)$ и $F(f, g, \ldots)$ будем использовать для обозначения множества функций $F \cap \mathrm{Pol}(R)$. В частности, $Q_L(\alpha)$ — это множество всех квазимонотонных функций, сохраняющих отношение α. В дальнейшем считаются известными основные факты из [3], связанные с понятием сохраняемых отношений.

2. Формулировка результатов

Для удобства изложения полурешётку L дополним до решётки L', присоединив к L новый элемент, имеющий смысл наименьшего элемента в L'. Точную верхнюю грань произвольного множества A элементов из L' будем обозначать через $\sum A$, или $\sum\limits_{x \in A} x$, или $a + b + \ldots$, если множество A состоит из элементов $a, b, \ldots$ Точную нижнюю грань множества $A = \{a, b, \ldots\}$ будем обозначать через $\prod A$, или $\prod\limits_{x \in A} x$, или $a \cdot b \cdot \ldots$

В дальнейшем будем считать известными такие свойства операций $+$ и $\cdot$ в решётке L', как ассоциативность, коммутативность и идемпотентность. Этими свойствами будем пользоваться без дополнительных оговорок. Наибольший и наименьший элементы решётки L' будем обозначать через $\top$ и $\bot$ соответственно. В соответствии с этим отсутствие (точной) нижней грани в полурешётке L для произвольного множества A элементов из L равносильно тому, что в решётке L' выполняется равенство $\prod A = \bot$. Элемент a из L будем называть *существенным относительно множества* $V \subseteq L$, если в V имется такое подмножество A, что $\prod A \neq \bot = a \cdot \prod A$; в противном случае элемент a будем называть *несущественным относительно множества* V. Таким образом, несущественный относительно множества V элемент — это любой такой элемент a, что для любого подмножества A из V имеет место равносильность

$$\left(\prod A = \bot\right) \Leftrightarrow \left(a \cdot \prod A = \bot\right).$$

Элементы a и b из L будем называть *подобными относительно множества* V и писать $a \sim_V b$, если для любого подмножества A из V множества $A \cup \{a\}$ и $A \cup \{b\}$ одновременно имеют или не имеют нижнюю грань в L. Подмножества A и B решётки L' будем называть *подобными* и писать $A \sim B$, если существует биекция $\pi : A \to B$ такая, что для любого подмножества A' из A имеет место равносильность

$$\left(\prod A' = \bot\right) \Leftrightarrow \left(\prod \pi(A') = \bot\right),$$

где $\pi(A') = \{\pi(a) | a \in A'\}$. Отношение подобия является эквивалентностью на множестве всех подмножеств решётки L'. Для произвольного множества T подмножеств решётки L' через $T/\sim$ обозначается множество всех классов подобия на T. Непустое подмножество V полурешётки L будем называть *особым*, если

1) любой элемент в V является существенным относительно множества V;

2) в множестве V не содержится двух подобных относительно V элементов.

Множество всех особых подмножеств в L будем обозначать через $T(L)$. Через $T_0(L)$ будем обозначать множество минимальных по включению подмножеств в L, не имеющих нижней грани. Легко проверить, что $T_0(L) \subseteq T(L)$. Для произвольного набора Y из L^n обозначим через $U(Y)$ множество всех таких подмножеств $u \subseteq \{1, \dots, n\}$, что

$$\prod \{Y_{(i)} | i \in u\} = \bot,$$

и определим отношение $\rho_Y \subseteq L^n$ как

$$\rho_Y(X) \equiv (U(X) \subset U(Y)).$$

На полурешётке L будем считать заданным отношение линейного порядка λ, и для произвольного подмножества A из L через $\lambda(A)$ будем обозначать набор, в котором в соответствии с этим порядком по разу перечислены элементы множества A. Для произвольного множества $A \in T(L)$ определим набор $\lambda'(A)$ следующим образом: положим $\lambda'(A) = \lambda(A)$, если $A \in T(L) \setminus T_0(L)$, и — $\lambda'(A) = (\lambda(A), a)$, если $A \in T_0(L)$ и a — последняя компонента набора $\lambda(A)$. Основные результаты статьи содержатся в следующих теоремах 1–4.

Теорема 1. *Система функций F из Q_L полна в классе Q_L при Φ_L-суперпозиции тогда и только тогда, когда F не содержится целиком ни в одном из классов $Q_L(\rho_{\lambda'(A)}), A \in T(L)$.*

Теорема 2. *Классы $Q_L(\rho_{\lambda'(A)})$, $A \in T(L)$, и только они являются предполными Φ_L-классами в Q_L.*

Теорема 1 даёт критерий полноты в классе Q_L при Φ_L-суперпозиции. Критериальное множество из теоремы 1 безызбыточно в том смысле, что из него нельзя удалить ни один класс, не нарушив свойства критериальности. Это следует из теоремы 2. Вместе с тем некоторые классы $Q_L(\rho_{\lambda'(A)}), A \in T(L)$, могут совпадать. Все случаи, когда это происходит, описываются в теореме 3.

Теорема 3. *Для произвольных A и B из $T(L)$ классы $Q_L(\rho_{\lambda'(A)}) = Q_L(\rho_{\lambda'(B)})$ совпадают тогда и только тогда, когда $A \sim B$. В частности, $|S(\Phi_L, Q_L)| = |T(L)/\sim|$.*

Для натурального $k \geq 2$ через $\widetilde{E}_k$ обозначается такая верхняя полурешётка с множеством минимальных элементов $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$, которая изоморфна полурешётке всех непустых подмножеств множества E_k, упорядоченных отношением включения. В случае $L = \widetilde{E}_k$ классы Φ_L и Q_L обозначаются через $\Phi_{\widetilde{k}}$ и $Q_{\widetilde{k}}$ соответственно. Функции из класса $Q_{\widetilde{k}}$ представляют особый интерес в связи с техническими приложениями при синтезе автоматов с заданным динамическим поведением [1]. Теорема 4 даёт асимптотику для числа предполных $\Phi_{\widetilde{k}}$-классов в $Q_{\widetilde{k}}$ при растущем k.

Теорема 4. *Если $k \to \infty$, то* $|S(\Phi_{\widetilde{k}}, Q_{\widetilde{k}})| \sim \dfrac{2^{2^k}}{4k!}$.

3. Вспомогательные утверждения

Доказательству теорем 1–4 предпошлем вспомогательные утверждения.

Утверждение 1. *При Φ_L-суперпозиции множество классов*

$$Q_L(\alpha), \text{ где } \alpha \in \mathrm{Inv}(\Phi_L) \setminus \mathrm{Inv}(Q_L), \tag{1}$$

образует критериальную систему в Q_L.

Доказательство. Достаточно показать, что каждый замкнутый класс G, $\Phi_L \subseteq G \subset Q_L$, расширяется до класса вида (1). Поскольку G является собственным подмножеством Q_L, найдется отношение $\alpha \in \mathrm{Inv}(G) \setminus \mathrm{Inv}(Q_L)$. Так как $\Phi_L \subseteq G$, то $\mathrm{Inv}(G) \subseteq \mathrm{Inv}(\Phi_L)$. Следовательно, $\alpha \in \mathrm{Inv}(\Phi_L) \setminus \mathrm{Inv}(Q_L)$. Так как $G \subseteq Q_L \cap \mathrm{Pol}(\alpha) = Q_L(\alpha)$, то утверждение 1 доказано.

В связи с утверждением 1 представляют интерес отношения в множестве $\mathrm{Inv}(\Phi_L) \setminus \mathrm{Inv}(Q_L)$, т. е. инвариантные для Φ_L и неинвариантные для Q_L отношения. Ближайшей целью данной статьи является описание всех таких отношений. Более точно, установим критерии, позволяющие по виду наборов, составляющих произвольное отношение, однозначно ответить, инвариантно ли оно для класса Φ_L и инвариантно ли оно для класса Q_L. Для произвольного набора Y из L^n через $R(Y)$ обозначается множество всех пар элементов i и j из $\{1, \dots, n\}$ таких, что $Y_{(i)} \neq Y_{(j)}$. Для произвольного множества функций F через $F^{(m)}$ обозначается множество всех функций из F от m переменных. Всюду далее, если не оговорено особо, малыми латинскими буквами обозначаются произвольные натуральные числа.

Утверждение 2. *Пусть $Y, Y_1, \dots, Y_m$ — наборы из L^n. Следующие условия равносильны*:

1) *в $Q_L^{(m)}$ найдётся функция f такая, что $f^{[n]}(Y_1, \dots, Y_m) = Y$*;

2) *справедливы включения*

$$U(Y) \subseteq U(Y_1) \cup \ldots \cup U(Y_m), \quad R(Y) \subseteq R(Y_1) \cup \ldots \cup R(Y_m).$$

Доказательство. Из первого условия второе условие следует по тесту квазимонотонности и в силу однозначной определённости значений функции f. Обратно, пусть выполнены оба включения во втором условии. Определим функцию f следующим образом: на любом наборе $(Y_{1(i)}, \dots, Y_{m(i)})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, значение функции f положим равным $Y_{(i)}$, и пусть

f принимает значение $\top$ на остальных наборах. В силу второго включения функция f определена корректно, а в силу первого включения и теста квазимонотонности квазимонотонна. Утверждение 2 доказано.

Заметим, что отношение $A = \{Y_1, \ldots, Y_m\} \subseteq L^n$ тогда и только тогда инвариантно для класса Q_L, когда любой набор $f^{[n]}(Y_1, \ldots, Y_m)$ такой, что $f \in Q_L$, содержится в A. Поэтому верно

Следствие 1. *Отношение $A \subseteq L^n$ инвариантно для класса Q_L тогда и только тогда, когда каждый набор Y из L^n, обладающий свойствами*

$$U(Y) \subseteq \bigcup_{X \in A} U(X), \quad R(Y) \subseteq \bigcup_{X \in A} R(X),$$

содержится в A.

Отношения A и B из Π_L принято называть *эквивалентными*, если $\mathrm{Pol}(A) = \mathrm{Pol}(B)$, т. е. когда они определяют один и тот же замкнутый класс в P_L. Непустое отношение $A \subseteq L^m$ называется *приведённым*, если для любых i и j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant m$, найдется такой набор Y, удовлетворяющий отношению A, что $Y_{(i)} \neq Y_{(j)}$. В связи с этим имеет смысл рассматривать отношения с точностью до эквивалентности, то есть не различать эквивалентные отношения. А поскольку всякое непустое отношение эквивалентно некоторому приведённому отношению, имеет смысл рассматривать только приведённые отношения. Так как для приведённого отношения A второе включение в следствии 1 выполняется автоматически, то имеет место

Следствие 2. *Приведённое отношение $A \subseteq L^n$ инвариантно для класса Q_L тогда и только тогда, когда в A содержится каждый набор Y из L^n, обладающий свойством*

$$U(Y) \subseteq \bigcup_{X \in A} U(X).$$

Утверждение 3. *Пусть A и B — произвольные наборы из L^n. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *в $Q_L^{(1)}$ имеется функция s такая, что $s^{[n]}(A) \leqslant B$;*
2) *справедливо включение $U(B) \subseteq U(A)$.*

Доказательство. Если выполнено первое условие, то

$$U(B) \subseteq U(s^{[n]}(A)) \subseteq U(A),$$

где первое включение следует из соотношения $s^{[n]}(A) \leqslant B$, а второе — из квазимонотонности s. Таким образом оказывается выполненым и второе условие. Обратно, пусть выполнено второе условие. Определим набор $C \in (L')^n$, положив $C_{(i)} = \prod\{B_{(j)} | A_{(i)} = A_{(j)}\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. При любом $i, 1 \leqslant i \leqslant n$, в произведении из правой части в качестве сомножителя содержится элемент $B_{(i)}$. Поэтому $C_{(i)} \leqslant B_{(i)}$. Иными словами, в решётке $(L')^n$ выполняется неравенство $C \leqslant B$. Далее, ни одна компонента $C_{(i)}$ вектора C не равна $\perp$, т. е. $C \in L^n$. В противном случае для некоторого i множество $\{B_{(j)} | A_{(i)} = A_{(j)}\}$ не имеет нижней грани в L. Отсюда в силу включения $U(B) \subseteq U(A)$ следует, что множество

$$\{A_{(j)} | A_{(i)} = A_{(j)}\} = \{A_{(i)}\}$$

также не имеет нижней грани, что невозможно. Далее покажем, что $U(C) \subseteq U(A)$. Для этого заметим, что для любых $i_1, \ldots, i_r$ из $\{1, \ldots, n\}$ верны равенства

$$C_{(i_1)} \ldots C_{(i_r)} = \prod_{l=1}^{r} \prod \{B_{(j)} | A_{(j)} = A_{(i_l)}\},$$
$$A_{(i_1)} \ldots A_{(i_r)} = \prod_{l=1}^{r} \prod \{A_{(j)} | A_{(j)} = A_{(i_l)}\}.$$

Сравнивая правые части, в силу включения $U(B) \subseteq U(A)$ получаем, что если первое произведение равно $\perp$, то и второе произведение равно $\perp$. Тем самым доказано включение $U(C) \subseteq U(A)$. Наконец, в силу определения набора C для любых i и j из $\{1, \ldots, n\}$ равенство $A_{(i)} = A_{(j)}$ влечёт равенство $C_{(i)} = C_{(j)}$. Иными словами, имеет место включение $R(C) \subseteq R(A)$. По утверждению 2 существует одноместная квазимонотонная функция s такая, что $s^{[n]}(A) = C \leqslant B$. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. *Для любых наборов* $Y, Y^1, \ldots, Y^m$ *из* L^n *и любого* j *из* $\{1, \ldots, m\}$ *следующие условия равносильны*:

1) *имеются функции* f *в* $Q_L^{(m)}$ *и* s *в* $Q_L^{(1)}$ *такие, что*

$$f^{[n]}(Y^1, \ldots, Y^m) = Y \geqslant s^{[n]}(Y^j);$$

2) *справедливы включения*

$$R(Y) \subseteq (R(Y^1) \cup \ldots \cup R(Y^m)), \quad U(Y) \subseteq U(Y^j).$$

Доказательство. Второе условие следует из первого условия в силу однозначной определённости значений функции f и утверждения 3. Обратно, если выполнено второе условие, то определим функцию f так же, как и в доказательстве утверждения 2. Обозначим через F и S_j соответственно векторы значений функции f и j-й селекторной функции $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$ на наборах из L^n, перечисленных в некотором порядке (одном и том же для обеих функций). Тогда в силу определения функции f и второго условия имееет место включение $U(F) \subseteq U(S_j)$. По утверждению 3 найдётся квазимонотонная функция s такая, что $s^{[N]}(S_j) \leqslant F$, где N — длина векторов F и S_j. Следовательно, $s^{[n]}(Y_j) \leqslant Y$. Утверждение 4 доказано.

Непосредственно из утверждения 4 получаем

Следствие 3. *Для любых векторов $Y, Y^1, \ldots, Y^m$ из L^n следующие условия равносильны*:

1) *в Φ_L имеется функция f такая, что $Y = f^{[n]}(Y^1, \ldots, Y^m)$;*

2) *справедливо включение $R(Y) \subseteq R(Y^1) \cup \ldots \cup R(Y^m)$ и при некотором j из $\{1, \ldots, m\}$ справедливо включение $U(Y) \subseteq U(Y^j)$.*

Заметим, что отношение $A = \{Y^1, \ldots, Y^m\} \subseteq L^n$ иваринтно для класса Φ_L тогда и только тогда, когда всякий набор $Y = f^{[n]}(Y^1, \ldots, Y^m)$, где $f \in \Phi_L$, содержится в A. Поэтому имеет место

Следствие 4. *Отношение $A \subseteq L^n$ инвариантно для класса Φ_L тогда и только тогда, когда для любых наборов X и Y из L^n таких, что*

$$U(Y) \subseteq U(X), R(Y) \subseteq \bigcup_{X' \in A} R(X'),$$

справедлива импликация $(X \in A) \Rightarrow (Y \in A)$.

Включение $R(Y) \subseteq \bigcup\limits_{X' \in A} R(X')$ в случае приведённого отношения $A \subseteq L^n$ выполняется для любого вектора Y из L^n. Поэтому верно

Следствие 5. *Приведённое отношение $A \subseteq L^n$ инвариантно для класса Φ_L тогда и только тогда, когда для любых наборов X и Y из L^n таких, что $U(Y) \subseteq U(X)$ справедлива импликация $(X \in A) \Rightarrow (Y \in A)$.*

Отметим некоторые свойства отношения ρ_Y.

Утверждение 5. *Для любого набора Y из L^n и любой функции f из $Q_L^{(m)} \setminus Q_L(\rho_Y)$ найдутся наборы $Y_1, \ldots, Y_m$ в L^n, обладающие свойствами:*

1) *$U(Y_i) \subset U(Y)$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant m$;*

2) *$U(f^{[n]}(Y_1, \ldots, Y_m)) = U(Y)$.*

Доказательство. Так как функция f не сохраняет отношение ρ_Y, то в ρ_Y найдутся наборы $Y_1, \ldots, Y_m$ такие, что набор $f^{[n]}(Y_1, \ldots, Y_m)$ не удовлетворяет отношению ρ_Y. Иными словами, для наборов Y_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, выполняется первое доказываемое свойство, а также не выполняется строгое включение $U(f^{[n]}(Y_1,\dots,Y_m)) \subset U(Y)$. Однако в силу утверждения 2 и первого свойства имеют место включения $U(f^{[n]}(Y_1,\dots,Y_m)) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} U(Y_i) \subseteq U(Y)$. Это возможно лишь в случае, когда выполняется второе свойство. Утверждение 5 доказано.

Утверждение 6. *Для любого набора Y из L^n такого, что $U(Y) \neq \varnothing$, отношение ρ_Y приведённое.*

Доказательство. Пусть a — отличный от $\top$ элемент полурешётки L. Тогда отношение $\{a,\top\}^n$ является приведённым и содержится в отношении ρ_Y. Следовательно, отношение ρ_Y приведённое. Утверждение 6 доказано.

Обозначим через $U_0(Y)$ множество минимальных по включению подмножеств $u \in U(Y)$. Имеет место следующее

Утверждение 7. *Если $|U_0(Y)| > 1$, то отношение ρ_Y неинвариантно для Q_L.*

Доказательство. Для произвольного подмножества u из множества $\{1,\dots,n\}$ через Y_u обозначим набор, совпадающий с набором Y по всем компонентам с номерами из u и имеющий значение $\top$ в остальных компонентах. Иными словами, $Y_{u(i)} = Y_{(i)}$, если $i \in u$, и $Y_{u(i)} = \top$, если $i \notin u$. Можно проверить, что в условиях доказываемого утверждения $Y_u \in \rho_Y$, если $u \in U_0(Y)$, и $U(Y) = \bigcup\limits_{u \in U_0(Y)} U(Y_u) = \bigcup\limits_{X \in \rho_Y} U(X)$. Так как $Y \notin \rho_Y$, то по следствию 2 и утверждению 6 отношение ρ_Y неинвариантно для Q_L. Утверждение 7 доказано.

Утверждение 8. *Для любого приведённого отношения $A \subseteq L^n$ из $\mathrm{Inv}(\Phi_L)\backslash\mathrm{Inv}(Q_L)$ в L^n найдётся набор Y такой, что $|U_0(Y)| > 1$ и $Q_L(A) \subseteq Q_L(\rho_Y)$.*

Доказательство. По следствию 2 в множестве $L^n \setminus A$ найдётся набор Y со свойством $U(Y) \subseteq \bigcup\limits_{X \in A} U(X)$. Выберем такой набор Y, обладающий описанным выше свойством, что $\rho_Y \subseteq A$. Это всегда можно сделать. Покажем, что $|U_0(Y)| > 1$. Действительно, если $|U_0(Y)| = 0$, то $U(Y)$ пусто. Следовательно, для любого набора Z из L^n имеет место включение $U(Y) \subseteq U(Z)$. Тогда по следствию 5 для любого Z из L^n истинна импликация $Z \in A \Rightarrow Y \in A$. Поскольку $Y \notin A$, то A пусто; получили противоречие. Если же $|U_0(Y)| = 1$, то $U_0(Y) = \{u\}$ для некоторого подмножества $u \subseteq \{1,\dots,n\}$; в силу выбора набора Y в A найдётся набор X такой, что $u \in U(X)$. Но тогда $U(Y) \subseteq U(X)$. Так как $Y \in L^n \setminus A$, то $X \in L^n \setminus A$ по следствию 5. Противоречие. Следовательно, $|U_0(Y)| > 1$. Далее, пусть квазимонотонная функция f не сохраняет отношение ρ_Y. По утверждению 5 найдутся такие наборы $Y_1, Y_2, \ldots$, удовлетворяющие отношению ρ_Y (и отношению A, так как $\rho_Y \subseteq A$), что $U(f^{[n]}(Y_1, Y_2, \ldots)) = U(Y)$. Так как набор Y не удовлетворяет отношению A, то по следствию 5 набор $f^{[n]}(Y_1, Y_2, \ldots)$ также не удовлетворяет отношению A, и функция f не сохраняет отношение A. В силу произвольности выбора функции f, не сохраняющей отношение ρ_Y, получаем включение $Q_L(A) \subseteq Q_L(\rho_Y)$. Утверждение 8 доказано.

Заметим, что всякий набор Y такой, что $|U_0(Y)| > 1$, имеет длину не менее 3. Учитывая это, из утверждений 1, 7 и 8 получаем

Следствие 6. *Пусть Y — произвольный набор из L^n ($n = 3, 4, \ldots$) такой, что $|U_0(Y)| > 1$. Тогда множество классов $Q_L(\rho_Y)$ образует в Q_L критериальную систему при Φ_L-суперпозиции.*

Компоненту $Y_{(i)}$ в наборе Y из L^n будем называть *существенной*, если она существенна относительно множества $\{Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}\}$ всех компонент набора Y; в противном случае $Y_{(i)}$ будем называть *несущественной* компонентой в наборе Y.

Утверждение 9. *Пусть $Y_{(i)}$ — несущественная компонента в наборе Y из L^n и $Y' = (Y_{(1)}, \ldots, Y_{(i-1)}, Y_{(i+1)}, \ldots, Y_{(n)})$. Тогда $\mathrm{Pol}(\rho_Y) \subseteq \mathrm{Pol}(\rho_{Y'})$.*

Доказательство. Покажем, что отношения $\rho_{Y'}$ и ρ_Y связаны соотношением $\rho_{Y'}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \equiv \exists x_i \rho_Y(x_1, \ldots, x_n)$. Достаточно рассмотреть случай, когда $i = n$. В этом случае множество $U(Y)$ состоит из всевозможных элементов вида u и $u \cup \{n\}$, где $u \in U(Y')$. В силу этого если для элементов $a_1, \ldots, a_n$ из L имеет место включение $U(a_1, \ldots, a_n) \subset U(Y)$, то $U(a_1, \ldots, a_{n-1}) \subset U(Y')$. Обратно, если $U(a_1, \ldots, a_{n-1}) \subset U(Y')$, то $U(a_1, \ldots, a_{n-1}, \top) \subset U(Y)$. Утверждение 9 доказано.

Заметим, что в условиях утверждения 9 если $|U_0(Y)| > 1$, то и $|U_0(Y')| > 1$. Поэтому имеет место

Следствие 7. *Множество классов $Q_L(\rho_Y)$ для наборов Y, не имеющих таких несущественных компонент, что $|U_0(Y)| > 1$, в Q_L образует критериальную систему при Φ_L-суперпозиции.*

Утверждение 10. *Пусть $V \subseteq L$ и $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r$ — такие элементы из V, что $a_i \sim_V b_i$ при всех i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда*

$$a_1 \cdots a_r = \bot \Leftrightarrow b_1 \cdots b_r = \bot.$$

Доказательство. В условиях доказываемого утверждения любые два соседних множества в последовательности

$$\{a_1, \ldots, a_r\}, \{b_1, a_2, \ldots, a_r\}, \{b_1, b_2, a_3, \ldots, a_r\}, \ldots, \{b_1, \ldots, b_r\}$$

одновременно имеют или не имеют нижние грани. Но тогда и любые два множества этой последовательности обладают этим свойством. В частности, это верно для первого и последнего множеств. Утверждение 10 доказано.

Компоненты $Y_{(i)}$ и $Y_{(j)}$ в наборе Y из L^n будем называть *подобными*, если они подобны относительно множества $V = \{Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}\}$ всех компонент набора Y. Будем говорить, что набор Y *не содержит различных подобных компонент*, если $(Y_{(i)} \sim_V Y_{(j)}) \Rightarrow (Y_{(i)} = Y_{(j)})$.

Следствие 8. *Для любого набора Y из L^n существует такой набор X, не содержащий различных подобных компонент, что $\rho_Y \equiv \rho_X$.*

Доказательство. Пусть $V = \{Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}\}$. Можно проверить, что отношение $\sim_V$ есть эквивалентность на V (более того на L'). В каждом смежном классе эквивалентности $\sim_V$ на множестве V выберем по одному элементу. Элемент, выбранный в классе, содержащем компоненту $Y_{(i)}$, обозначим через X_i. Тогда набор $X = (X_1, \ldots, X_n)$ не имеет различных подобных компонент, и в силу утверждения 10 имеет место равенство $U(X) = U(Y)$. Следствие 8 доказано.

Обозначим через $L^{\times}$ множество всевозможных наборов Y из L^n ($n = 3, 4, \ldots$), не имеющих различных подобных компонент и не содержащих несущественных компонент, таких, что $|U_0(Y)| > 1$. Из следствий 7 и 8 получаем

Следствие 9. *Множество классов $Q_L(\rho_Y), Y \in L^{\times}$, образует в Q_L критериальную систему относительно Φ_L-суперпозиции.*

Далее найдём простые условия того, что $Q_L(\rho_X) \subseteq Q_L(\rho_Y)$ для наборов X и Y из $L^{\times}$. Это нужно для того, чтобы сократить критериальную систему из следствия 9. Множество натуральных чисел $\{1, \ldots, n\}$ будем обозначать через N_n. Для произвольного набора Y из L^n и отображения $\pi : N_p \to N_n$ обозначим через $\pi \cdot Y$ набор $(Y_{(\pi(1))}, \ldots, Y_{(\pi(p))})$ из L^p.

Утверждение 11. *Для любого набора Y из L^n и любой сюръекции $\pi : N_p \to N_n$ справедливо включение* $\mathrm{Pol}(\rho_{\pi \cdot Y}) \subseteq \mathrm{Pol}(\rho_Y)$.

Доказательство. В силу определения набора $\pi \cdot Y$ для любых элементов $i_1, \ldots, i_r$ из N_p имеем

$$(\{i_1, \ldots, i_r\} \in U(\pi \cdot Y)) \Leftrightarrow (\{\pi(i_1), \ldots, \pi(i_r)\} \in U(Y)).$$

Из этого соотношения и сюръективности функции π следует, что

$$(U(X) \subset U(Y)) \Leftrightarrow (U(\pi \cdot X) \subset U(\pi \cdot Y))$$

для любого набора X из L^p. Остается заметить, что включение справа в последнем соотношении имеет место в том и только том случае, когда истинно выражение

$$\exists a_1 \dots \exists a_p (\rho_{\pi \cdot Y}(a_1, \dots, a_p) \wedge a_1 = X_{(\pi(1))} \wedge \dots \wedge a_p = X_{(\pi(p))}).$$

Утверждение 11 доказано.

Покажем, что имеет место утверждение в некотором смысле обратное утверждению 11.

Утверждение 12. *Пусть в наборах $Z \in L^p$ и $Y \in L^n$ нет несущественных компонент, и пусть $|U_0(Y)| > 1$ и $Q_L(\rho_Z) \subseteq Q_L(\rho_Y)$. Тогда существует сюръекция $\pi : N_p \to N_n$ такая, что $U(Z) = U(\pi \cdot Y)$.*

Доказательство. Рассмотрим квадратную матрицу $\widetilde{Y}$ размера n с элементами из полурешётки L, в которой i-й столбец $\widetilde{Y}^{(i)}$, рассматриваемый как вектор из L^n, получается из вектора Y заменой i-й компоненты на $\top$. Тогда i-я строка $\widetilde{Y}_{(i)}$ матрицы $\widetilde{Y}$ является вектором длины n, в котором i-я компонента равна $\top$, а остальные компоненты совпадают с i-й компонентой $Y_{(i)}$ вектора Y. Так как набор Y не содержит несущественных компонент, то ни одна из компонент вектора Y не равна $\top$. Следовательно, все строки матрицы $\widetilde{Y}$ различны. Это позволяет корректно определить функцию $f : L^n \to L$, значение которой в i-й строке матрицы $\widetilde{Y}$ равно i-й компоненте вектора Y, т. е. $f(\widetilde{Y}_{(i)}) = Y_{(i)}$, и значения которой во всех остальных наборах равно $\top$. Можно проверить, что функция f квазимонотонна (при этом важно условие $|U_0(Y)| > 1$), а также не сохраняет отношение ρ_Y (при этом важно, что набор Y не имеет несущественных компонент). В силу включения $Q_L(\rho_Z) \subseteq Q_L(\rho_Y)$ функция f не сохраняет отношение ρ_Z. Тогда по утверждению 5 найдутся наборы Z_j в L^p такие, что

$$U(Z_j) \subset U(Z), 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{2}$$

$$U(f^{[p]}(Z_1, \dots, Z_n)) = U(Z). \tag{3}$$

Из последнего равенства и того, что в наборе Z не содержится несущественных компонент, следует, что все компоненты набора $f^{[p]}(Z_1, \dots, Z_n)$ также существенные. В частности, ни одна из них не равна $\top$. В силу определения функции f это означает, что все наборы $\widetilde{Z}_j = (Z_{1(j)}, \dots,$

$Z_{n(j)})$, $j \in N_p$, содержатся среди наборов $\widetilde{Y}_{(j)}, j \in N_n$, т. е. для любого i из N_p в N_n найдётся такое $\pi(i)$, что $\widetilde{Z}_i = \widetilde{Y}_{(\pi(i))}$. Таким образом оказывается определенной функция $\pi : N_p \to N_n$, обладающая свойством $f^{[p]}(\widetilde{Z}_1, \ldots, \widetilde{Z}_n) = \pi \cdot Y$. С учетом (3) осталось доказать сюръективность функции π. Из определения функции f следует, что если среди значений функции π отсутствует некоторое значение j из N_n, то $\widetilde{Z}_j = f^{[p]}(\widetilde{Z}_1, \ldots, \widetilde{Z}_n)$. Но это противоречит соотношениям (2) и (3). Утверждение 12 доказано.

Из утверждений 11 и 12 получаем

Следствие 10. *Пусть Z и Y — наборы из $L^{\times}$ длины p и n соответственно. Тогда следующие условия равносильны*:

1) $Q_L(\rho_Z) \subseteq Q_L(\rho_Y)$;

2) *имеется такая сюръекция* $\pi : N_p \to N_n$, *что* $U(Z) = U(\pi \cdot Y)$.

Следствие 11. *Пусть Z и Y — наборы из $L^{\times}$ длины p и n соответственно. Тогда классы $Q_L(\rho_Z)$ и $Q_L(\rho_Y)$ совпадают тогда и только тогда, когда $n = p$ и для некоторой биекции $\pi : N_n \to N_n$ справедливо равенство $U(Z) = U(\pi \cdot Y)$.*

4. Доказательство теоремы 1

Пусть Y — набор длины n из $L^{\times}$. Поскольку в Y нет несущественных компонент и различных подобных компонент, множество $A = \{Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}\}$ особое, т. е. принадлежит классу $T(L)$. В силу этого с учетом следствия 9 для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что класс $Q_L(\rho_Y)$ содержится в классе $Q_L(\rho_{\lambda'(A)})$. Рассмотрим возможные случаи для множества A.

1) $A \in (T(L) \setminus T_0(L))$. Так как набор Y можно получить, перечислив (возможно с повторениями) все элементы из A, то по утверждению 11 имеем $Q_L(\rho_Y) \subseteq Q_L(\rho_{\lambda(A)}) = Q_L(\rho_{\lambda'(A)})$.

2) $A \in T_0(L)$. Так как $|U_0(Y)| > 1$, то некоторый элемент b встречается в наборе Y не менее двух раз. По утверждению 11 отсюда получаем, что $Q_L(\rho_Y) \subseteq Q_L(\rho_{(\lambda(A)b)})$. Осталось показать, что $Q_L(\rho_{(\lambda(A),b)}) = Q_L(\rho_{\lambda'(A)})$. Для этого заметим, что $U(\lambda'(A)) = \{N_{m+1}, N_m, N_{m+1} \setminus \{m\}\}$ и

$$U(\lambda(A), b) = \{N_{m+1}, N_m, N_{m+1} \setminus \{i\}\},$$

где $m = |A|$ и i — номер компоненты вектора $\lambda(A)$, равной b. Отсюда следует, что для любой подстановки π на множестве N_{m+1}, меняющей местами элементы m и i и оставляющей неподвижным элемент $m + 1$, верно равенство $U(\pi \cdot \lambda'(A)) = U(\lambda(A), b)$. По следствию 11 имеем

$Q_L(\rho_{(\lambda(A),b)}) = Q_L(\rho_{\lambda'(A)})$. Так как все случаи рассмотрены, то теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2

Нужно показать невозможность строгого включения

$$Q_L(\rho_{\lambda'(A)}) \subset Q_L(\rho_{\lambda'(B)})$$

для произвольных A и B из $T(L)$. Предположим, что это нестрогое включение имеет место. Обозначим через p и n длины векторов $Z = \lambda'(B)$ и $Y = \lambda'(A)$ соответственно. По следствиям 10 и 11 найдётся сюръективная, но не инъективная функция $\pi : N_p \to N_n$ такая, что $U(\pi \cdot Y) = U(Z)$. Пусть инъективность отображения π нарушается на элементах i и j из N_p таких, что $i \neq j$ и $\pi(i) = \pi(j)$. Тогда в силу равенства $U(\pi \cdot Y) = U(Z)$ для любых элементов $i_1, \ldots, i_r$ из N_p каждое из множеств

$$\{Z_{(i_1)}, \ldots, Z_{(i_r)}, Z_{(i)}\}, \{Z_{(i_1)}, \ldots, Z_{(i_r)}, Z_{(j)}\}$$

имеет или не имеет нижнюю грань в L одновременно с множеством

$$\{Y_{(\pi(i_1))}, \ldots, Y_{(\pi(i_r))}, Y_{(\pi(i))}\} = \{Y_{(\pi(i_1))}, \ldots, Y_{(\pi(i_r))}, Y_{(\pi(j))}\}.$$

Отсюда следует, что элементы $Z_{(i)}$ и $Z_{(j)}$ подобны относительно множества B. В действительности, эти элементы равны: $Z_{(i)} = Z_{(j)}$, поскольку множество B не содержит пары подобных элементов. Это возможно в единственном случае, когда $B \in T_0(L)$. В этом случае пара $\{i, j\} = \{p-1, p\}$ — единственная пара номеров из N_p, на которой нарушается инъективность отображения π. Вследствие этого сужение π' отображения π взаимно однозначно отображает N_{p-1} на N_n и $U(\lambda(B)) = U(\pi' \cdot Y)$. Отсюда следует, что $1 = |U(\lambda(B))| = |U(\pi' \cdot Y)| = |U(Y)|$. Это невозможно для набора Y. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

6. Доказательство теоремы 3

Пусть A и B — особые множества. Если эти множества подобны друг другу, то возможны два случая: 1) оба множества принадлежат $T_0(L)$, 2) оба множества находятся в $T(L) \setminus T_0(L)$. В первом случае $U(\lambda'(A)) = U(\lambda'(B))$. Следовательно, $Q_L(\rho_{\lambda'(A)}) = Q_L(\rho_{\lambda'(B)})$. Во втором случае из подобия множеств A и B по следствию 10 получаем, что $Q_L(\rho_{\lambda(A)}) = Q_L(\rho_{\lambda(B)})$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Предположим, что справедливо равенство $Q_L(\rho_Y) = Q_L(\rho_Z)$, где $Y = \lambda'(A)$, $Z = \lambda'(B)$, $A \in T(L)$ и $B \in T(L)$.

По следствию 10 векторы Y и Z имеют одинаковую длину, скажем n, и существует биекция $\pi : N_n \to N_n$ такая, что $U(\pi \cdot Y) = U(Z)$. Определим функцию $\pi' : B \to A$:

$$\pi' : Z_{(i)} \mapsto Y_{(\pi(i))}, 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Корректность этого определения проверяется непосредственно: равенство $Z_{(i)} = Z_{(j)}$ влечёт подобие $Z_{(i)} \sim_B Z_{(j)}$, которое в силу $U(\pi \cdot Y) = U(Z)$ влечёт подобие $Y_{(\pi(i))} \sim_A Y_{(\pi(j))}$. Так как множество A не содержит различных подобных элементов, то $Y_{(\pi(i))} = Y_{(\pi(j))}$. Осталось заметить, что равенство $U(\pi \cdot Y) = U(Z)$ влечёт равносильность

$$\left(\prod A' = \bot\right) \Leftrightarrow \left(\prod \pi'(A') = \bot\right),$$

справедливую при любом $A' \subseteq A$. Следовательно, множества A и B подобны. Теорема 3 доказана.

7. Доказательство теоремы 4

Верхняя оценка. Покажем, что при любом $k \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$|S(\Phi_{\widetilde{k}}, Q_{\widetilde{k}})| \leqslant \frac{2^{2^k}}{4k!} + \frac{(2^{2^k})^{3/4}}{4}. \tag{4}$$

Обозначим через B_k решётку, содержащую множество E_k и изоморфную решётке всех подмножеств множества E_k. Тогда полурешётка $\widetilde{E}_k$ получается из решётки B_k изъятием наименьшего элемента, т. е. $\widetilde{E}_k = B_k \setminus \{\bot\}$. Обозначим через S_k симметрическую группу подстановок на множестве E_k. Для произвольной подстановки π из S_k и элементов $e_1, \ldots, e_r$ из E_k положим

$$\pi(e_1 + \ldots + e_r) = \pi(e_1) + \ldots + \pi(e_r). \tag{5}$$

Это соотношение продолжает подстановку π, определённую на множестве E_k, до автоморфизма решётки B_k и тем самым определяет (левое) действие группы S_k на решётке B_k. В дальнейшем подстановки из S_k будем считать определёнными на решётке B_k в соответствии с соотношением (5). Поскольку $\pi(\top) = \top$ и $\pi(\bot) = \bot$ для любой подстановки π из S_k, соотношение (5) также определяет действие группы S_k на множестве $B_k \setminus \{\bot, \top\}$. Далее для подстановки π из S_k и элементов $a_1, \ldots, a_r$ из B_k положим

$$\pi(\{a_1, \ldots, a_r\}) = \{\pi(a_1), \ldots, \pi(a_r)\}. \tag{6}$$

Это соотношение определяет действие группы S_k на множестве всех подмножеств решётки B_k. Пусть $b(k)$ — число орбит этого действия. Соотношение (6) определяет также действие группы S_k на множестве всех подмножеств множества $B_k \setminus \{\bot, \top\}$, число орбит при этом действии равно $\frac{1}{4}b(k)$. Заметим, что в особых множествах полурешётки $\widetilde{E}_k$ нет элемента $\top$, т. е. эти множества являются подмножествами множества $B_k \setminus \{\bot, \top\}$. Также заметим, что подмножества, лежащие в одной орбите, подобны. Отсюда в силу теоремы 3 величина $|S(\Phi_{\widetilde{k}}, Q_{\widetilde{k}})|$ ограничена сверху числом орбит действия группы S_k на множестве всех подмножеств множества $B_k \setminus \{\bot, \top\}$, т. е. величиной $\frac{1}{4}b(k)$. Осталость оценить сверху $b(k)$. Подходящая для доказательства теоремы верхняя оценка величины $b(k)$ следует из [7]. Приведём независимое доказательство. По формуле Бернсайда имеем

$$b(k) = \frac{1}{k!}\sum_{\pi \in S_k} |\mathrm{Fix}(\pi)| = \frac{2^{2^k}}{k!} + \frac{1}{k!}\sum_{\pi \neq id} |\mathrm{Fix}(\pi)|,$$

где $\mathrm{Fix}(\pi)$ — множество всех подмножеств решётки B_k, остающихся неподвижными при действии подстановки π, и через id обозначена тождественная подстановка. Осталось доказать, что $|\mathrm{Fix}(\pi)| \leqslant (2^{2^k})^{3/4}$ для произвольной нетождественной подстановки π из S_k. Так как π — нетождественная подстановка, то в её разложении на независимые циклы π содержится цикл $\alpha = (e_1, \ldots, e_r)$ длины $r \geqslant 2$. Через B' обозначим подрешётку в B_k, порождённую элементами $e_1, \ldots, e_r$, а через B'' — подрешётку в B_k, порождённую элементами из $E_k \setminus \{e_1, \ldots, e_r\}$. Тогда любой элемент a из B_k можно (притом единственным образом) записать в виде $a = a' + a''$, где $a' \in B'$ и $a'' \in B''$. Рассмотрим произвольное множество $A \in \mathrm{Fix}(\pi)$. Для элемента $e \in B'$ через $A[e]$ обозначим множество всех элементов a из A таких, что $a' = e$. Заметим, что $A = \bigcup\limits_{e \in B'} A[e]$, так что множество A однозначно определяется заданием всех подмножеств $A[e], e \in B'$. Рассмотрим действие на множестве A циклической группы $\langle\pi\rangle$, порождённой подстановкой π. Это действие индуцирует действие группы $\langle\pi\rangle$ на множестве всех подмножеств вида $A[e], e \in B'$. Так как любая орбита однозначно определяется заданием любого одного своего элемента и при фиксированном e из B' существует ровно $2^{2^{k-r}}$ возможностей для выбора множества $A[e]$, то общее число возможностей для выбора самого множества A не превосходит $(2^{2^{k-r}})^{t(r)}$, где $t(r)$ — число орбит действия группы $\langle\pi\rangle$ на множестве всевозможных подмножеств вида $A[e]$. Заметим, что два подмножества $A[e']$ и $A[e'']$ лежат в одной орбите действия группы $\langle\pi\rangle$ тогда и только тогда, когда элементы e' и e'' лежат в одной орбите действия на решётке B' группы $\langle\alpha\rangle$, порождённой циклом α. Так что $t(r)$ есть число орбит действия циклической группы $\langle\alpha\rangle$ порядка r на решётке B'. Другими словами, $t(r)$ — это число ориентированных ожерелий длины r, составленных из жемчужин двух цветов (см. [4]), и для $t(r)$ хорошо известно выражение:

$$t(r) = \frac{1}{r}\sum_{d|r}\varphi(\frac{r}{d})2^d, \tag{7}$$

где φ — функция Эйлера. Осталось показать, что $t(r) \leqslant (3/4)2^r$ при $r \geqslant 2$. При $r = 2$ это проверяется непосредственно. При $r \geqslant 3$ из соотношения (7) получаем

$$\begin{aligned}
t(r) &= \frac{1}{r}(2^r + \sum_{d|r,d<r}\varphi(\frac{r}{d})2^d) \leqslant \frac{1}{r}(2^r + 2^{\lfloor r/2\rfloor}\sum_{d|r,d<r}\varphi(\frac{r}{d}))\\
&= \frac{2^r + 2^{\lfloor r/2\rfloor}(r-1)}{r} = \frac{2^r(1 + 2^{-\rfloor r/2\lfloor}(r-1))}{r}\\
&\leqslant \frac{2^r(1 + (1/4)(r-1))}{r} = \frac{2^r(3+r)}{4r} \leqslant \frac{2^r(2r)}{4r} = \frac{2^r}{2} < \frac{3}{4}2^r.
\end{aligned}$$

Неравенство (4) доказано.

Нижняя оценка. Покажем, что при любом $k \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$|S(\Phi_{\widetilde{k}}, Q_{\widetilde{k}})| \geqslant \frac{2^{2^k}}{4k!} - \frac{(2^{2^k})^{3/4}}{4(k-2)!}. \tag{8}$$

Пусть $A \subseteq B_k$ и $a \in B_k$. Обозначим через $A(a)$ множество всевозможных элементов $b \in A$ таких, что $a \leqslant b$. Заметим, что $a \leqslant \prod A(a)$, причём это неравенство может быть строгим. Если для любого элемента e из E_k выполняется равенство $\prod A(e) = e$, то множество A будем называть *специальным.* Через $C(k)$ и $C'(k)$ обозначим множества всех специальных подмножеств в B_k и $B_k\setminus\{\bot, \top\}$ соответственно. Заметим, что всякое специальное множество A, в котором нет элементов $\bot$ и $\top$, является особым, т. е. имеет место включение

$$C'(k) \subseteq T(\widetilde{E}_k). \tag{9}$$

Действительно, множество A непусто. Далее, пусть a — произвольный элемент из A. Так как $a \neq \top$, то в E_k найдётся элемент e такой, что $e \cdot a = \bot$. Следовательно,

$$a \cdot \prod A(e) = a \cdot e = \bot \neq e = \prod A(e).$$

Отсюда следует, что a — существенный относительно множества A элемент. Пусть a и b — элементы из A. Если $a \neq b$, то в E_k найдётся элемент e, имеющий в полурешётке $\widetilde{E}_k$ нижнюю грань с одним и только одним из элементов a или b. Пусть для определённости этим элементом является a. Тогда $a \cdot e = e$, $b \cdot e = \perp$ и

$$a \cdot \prod A(e) = a \cdot e = e \neq \perp = b \cdot e = b \cdot \prod A(e).$$

Отсюда следует, что элементы a и b не являются подобными относительно множества A. Включение (9) доказано. Из него с учётом теоремы 3 следует, что

$$|S(\Phi_{\widetilde{k}}, Q_{\widetilde{k}})| = |T(\widetilde{E}_k)/\sim| \geqslant |C'(k)/\sim|. \tag{10}$$

Осталось оценить снизу величину $|C'(k)/\sim|$ — число классов подобия на множестве $C'(k)$. Отметим, что группа S_k действует на каждом из множеств $C(k)$ и $C'(k)$, причём при первом действии число орбит в 4 раза больше чем при втором. Покажем, что подобные специальные множества попадают в одну орбиту; это будет означать, что разбиение на орбиты множества $C(k)$ совпадает с разбиением на классы подобия и

$$4|C'(k)/\sim| = |C(k)/\sim| \geqslant \frac{1}{k!}|C(k)|, \tag{11}$$

после чего останется оценить снизу величину $|C(k)|$ — число специальных множеств. Итак, пусть специальные множества A и B подобны, т. е. существует биекция $\pi : A \to B$ такая, что для любого подмножества A' из A верна равносильность

$$\left(\prod A' = \perp\right) \Leftrightarrow \left(\prod \pi(A') = \perp\right). \tag{12}$$

Покажем, что функция π продолжается до подстановки π' из S_k такой, что $\pi'(A) = B$ (при этом подстановки из S_k, как указывалось ранее, считаются определёнными на B_k в соответствии с (5)). Тем самым будет доказано, что A и B лежат в одной орбите и формула (11) будет доказана. Сначала покажем, что для любого e из E_k найдётся элемент $\pi'(e)$ из E_k такой, что $\pi(A(e)) = B(\pi'(e))$. Действительно, в полурешётке $\widetilde{E}_k$ множество $A(e)$ имеет нижнюю грань (равную e). В силу соотношения (12) множество $\pi(A(e))$ также имеет нижнюю грань в $\widetilde{E}_k$. Значит, $\pi(A(e))$ содержится в качестве подмножества в некотором множестве $B(\pi'(e))$, где $\pi'(e) \in E_k$, т. е. $\pi(A(e)) \subseteq B(\pi'(e))$ и $A(e) \subseteq \pi^{-1}(B(\pi'(e)))$, где π^{-1} — обратная для π функция. В силу того же соотношения (12) множество $\pi^{-1}(B(\pi'(e)))$ также имеет нижнюю грань в $\widetilde{E}_k$. Следовательно,

$\pi^{-1}(B(\pi'(e))) \subseteq A(e')$ для некоторого $e' \in E_k$. Имеем цепочку включений

$$A(e) \subseteq \pi^{-1}(B(\pi'(e))) \subseteq A(e'), \tag{13}$$

из которой следует, что $e = \prod A(e) \geqslant \prod A(e') = e'$. Так как элементы в E_k попарно несравнимы, то $e = e'$ и в соотношении (13) имеют место равенства. Таким образом, определена функция $\pi' : E_k \to E_k$ такая, что $\pi(A(e)) = B(\pi'(e))$ для любого e из E_k. Эта функция является подстановкой на E_k. Действительно, так как π — биекция, то множества $\pi(A(e)) = B(\pi'(e)), e \in E_k$, различны; это возможно только в случае, когда элементы $\pi'(e)), e \in E_k$, различны, т. е. когда π' — подстановка на E_k. Рассмотрим π' как подстановку на B_k, определённую в соответствии с (5). Нужно показать, что функции π и π' совпадают для элементов из A. Пусть a — произвольный элемент из A. Запишем его в виде $a = e_1 + \ldots + e_r$, где $e_1, \ldots, e_r$ — элементы из E_k . Тогда элемент a содержится в пересечении $A(e_1) \cap \ldots \cap A(e_r)$, а элемент $\pi(a)$ содержится в пересечении $\pi(A(e_1)) \cap \ldots \cap \pi(A(e_r)) = B(\pi'(e_1)) \cap \ldots \cap B(\pi'(e_r))$. Иными словами, $\pi(a) \geqslant \pi'(e_1) + \ldots + \pi'(e_r)$. В последнем выражении имеет место равенство, поскольку в противном случае $\pi(a) = \pi'(e_1) + \ldots + \pi'(e_r) + \pi'(e') + \ldots$ для некоторого элемента e' из E_k, отличного от элементов $e_1, \ldots, e_r$. Тогда $\prod(A(e') \cup \{a\}) = \prod A(e') \cdot a = e' \cdot a = \perp$. Вместе с тем

$$\prod \pi(A(e') \cup \{a\}) = \pi(a) \prod \pi(A(e')) = \pi(a) \prod B(\pi'(e')) = \pi(a)\pi'(e') \neq \perp,$$

что противоречит соотношению (12). Следовательно, $\pi(a) = \pi'(e_1) + \ldots + \pi'(e_r) = \pi'(a)$, функция π' действительно продолжает функцию π, $\pi'(A) = \pi(A) = B$, а множества A и B находятся в одной орбите. Соотношение (11) доказано.

В силу соотношений (10) и (11) для завершения доказательства теоремы осталось получить нижнюю оценку вида $2^{2^k} - k(k-1)(2^{2^k})^{3/4}$ для величины $|C(k)|$, или, что то же самое, получить верхнюю оценку вида $k(k-1)(2^{2^k})^{3/4}$ для величины $2^{2^k} - |C(k)|$, равной числу неспециальных подмножеств решётки B_k. Пусть A — произвольное неспециальное подмножество решётки B_k. Тогда $\prod A(e) = e + e' + \ldots$ для некоторых различных элементов e и e' из E_k. В этом случае множество $A(e)$ есть одно из $2^{2^{k-2}}$ подмножеств подрешётки $B_k(e + e')$, а множество $A \setminus A(e)$ — одно из $2^{2^{k-1}}$ подмножеств подрешётки, порождённой множеством $E_k \setminus \{e\}$. Поскольку пару (e, e') можно выбрать $k(k-1)$ способами, для выбора множества A имеется не более $k(k-1)2^{2^{k-2}}2^{2^{k-1}} = k(k-1)(2^{2^k})^{3/4}$ возможностей. Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агибалов Г. П.** Дискретные автоматы на полурешётках. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1993.
2. **Биркгоф Г.** Теория решёток. М.: Наука, 1984.
3. **Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.** Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. №3. С. 1–10; № 5. С. 1–9.
4. **Кострикин А. И.** Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры: Учебник для вузов. М.: Физико-математическая литература, 2001.
5. **Парватов Н. Г.** Функциональная полнота в замкнутых классах квазимонотонных и монотонных трёхзначных функций на полурешётке // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер 1. 2003. Т. 10, № 1. С. 61–73.
6. **Яблонский С. В.** Функциональные построения в k-значной логике // Сб. статей по математической логике и некоторым вопросам кибернетики. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 5–142 (Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова. Т. 51).
7. **Шеннон К.** Синтез двухполюсных переключательных схем. Работы по теории информации и кибернетике. Изд-во иностранной литературы. 1963. С. 59–105.

Адрес автора:

Томский гос. ун-т,
факультет прикл. матем. и киб.,
пр. Ленина, 36,
634050 Томск, Россия.
E-mail: parvatov@isc.tsu.ru

Статья поступила
12 октября 2005 г.