ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2006. Серия 1. Том 13, № 4. 3–17

УДК 519.718

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШИХ ПО НАДЁЖНОСТИ СХЕМАХ В БАЗИСЕ $\{\&, \vee, ^-\}$ ПРИ ИНВЕРСНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ

М. А. Алёхина, В. В. Чугунова

Показано, что в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов почти все булевы функции можно реализовать асимптотически наилучшими по надёжности схемами, функционирующими с ненадёжностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \to 0$ (ε — вероятность появления неисправности на каждом входе элемента).

Впервые задачу синтеза надёжных схем из ненадёжных элементов рассматривал Дж. фон Нейман [3]. Он предполагал, что элементы подвержены инверсным неисправностям на выходах, т. е. каждый функциональный элемент с приписанной ему булевой функцией $\varphi(\tilde{x})$ в неисправном состоянии, в которое элемент переходит с вероятностью ε, реализует функцию $\bar{\varphi}(\tilde{x})$. С помощью итерационного метода Дж. Нейман установил, что при любом ε, $0 < \varepsilon < 1/6$, произвольную булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно реализовать схемой, на выходе которой вероятность ошибки при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c_1\varepsilon$ (c_1 — некоторая абсолютная константа, зависящая только от базиса). Таким образом, при использовании метода Неймана вероятность ошибки на выходе схемы, построенной из ненадёжных элементов, не зависит от числа переменных функции f.

Схема из ненадёжных элементов имеет две важные характеристики: вероятность ошибки на выходе схемы (ненадёжность) и сложность схемы. Оптимизации сложности схем уделялось основное внимание в работах С. И. Ортюкова [4], Д. Улига [6] и некоторых других авторов. Задача построения асимптотически наилучших по надёжности схем их ненадёжных элементов решена в [2] в случае однотипных константных неисправностей элементов. В этой статье решается задача построения асимптотически наилучших по надёжности схем в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов.

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$. Схема реализует функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, если при отсутствии неисправностей поданный на входы схемы набор $\tilde{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ на выходе схемы перерабатывается в значение $f(\tilde{a})$ [5]. Предполагается, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon < 1/2$) подвержены инверсным неисправностям на входах. Эти неисправности характеризуются тем, что поступающее на вход элемента значение a ($a \in \{0, 1\}$) с вероятностью ε может превратиться в значение $\bar{a}$.

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ — вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$ при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадёжность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Надёжность схемы S равна $1 - P(S)$.

Пусть $P(f) = \inf P(S)$, где inf берётся по всем схемам S из ненадёжных элементов, реализующим булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Схему A из ненадёжных элементов, реализующую булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, назовём асимптотически наилучшей по надёжности, если $P(A) \sim P(f)$ при $\varepsilon \to 0$.

Верхнюю оценку ненадёжности схемы даёт следующая

Теорема 1. *При $\varepsilon \leqslant 1/150$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$, что $P(S) \leqslant 2\varepsilon + 19\varepsilon^2$.*

При доказательстве теоремы 1 используются теоремы 2–4 и лемма 3.

Пусть схема S_h реализует функцию штрих Шеффера $x|y = \bar{x} \vee \bar{y}$ с вероятностями ошибок на выходе $P_0(0,0) = \alpha$, $P_0(0,1) = \beta$, $P_0(1,0) = \delta$, $P_1(1,1) = \tau$. Пусть $\mu = \max\{\alpha, \beta, \delta, \tau\}$.

Теорема 2 [2]. *Пусть f — произвольная булева функция, S — схема, реализующая функцию f с ненадёжностью $P(S)$. Тогда можно построить схему $\varphi(S)$ (рис. 1), реализующую функцию f с ненадёжностью*

$$P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\alpha + \tau + 2(\beta + \delta)P(S) + 2P^2(S),$$
$$\alpha + (\beta + \delta)(\tau + 2P(S)) + (\tau + 2P(S))^2\}.$$

Теорема 3. *Если $\mu \leqslant 1/50$, то любую функцию f можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leqslant 4\mu$.*

Доказательство проводится индукцией по числу существенных переменных функций.

При $n = 0$ имеем константы 0 и 1. Моделируя формулу $(x|x)|x$, построим схему B из двух элементов, реализующую константу 1. Тогда

$P(B) \leqslant 2\mu$. Для реализации константы 0 построим схему D из трёх элементов, соединив выход схемы B с входами ещё одного функционального элемента. Тогда $P(D) \leqslant 3\mu$. Основание индукции проверено. Пусть утверждение теоремы верно для всех булевых функций, зависящих не более чем от $n-1$ переменной.

Индуктивный переход выполняется следующим образом: сначала строится схема $\tilde{S}$, реализующая произвольную булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, на основе следующего разложения функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$: $f = x_n \& f_1 \vee \bar{x}_n \& f_0 = (x_n|f_1)|((x_n|x_n)|f_0)$, причём согласно индуктивному предположению функции $f_0 = f(x_1, ..., x_{n-1}, 0)$ и $f_1 = f(x_1, ..., x_{n-1}, 1)$ можно реализовать схемами, ненадёжность которых не более 4μ.

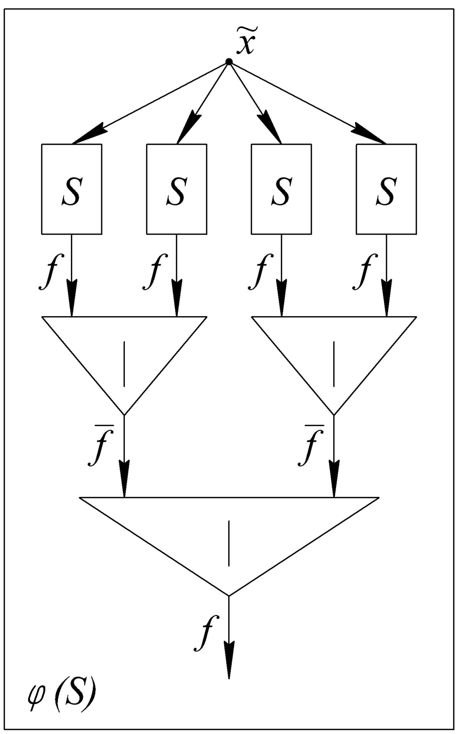

Рис. 1

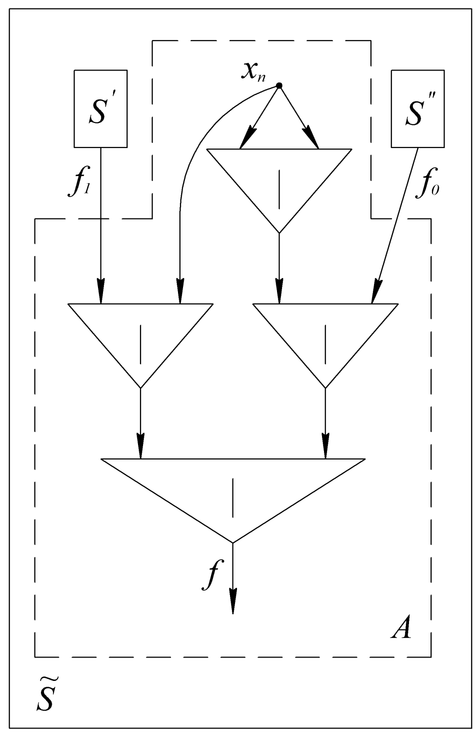

Рис. 2

Обозначим через A (рис. 2) подсхему схемы $\tilde{S}$, выход которой является выходом схемы $\tilde{S}$, а на входы подаются значения x_n, $f_0 = f(x_1, ..., x_{n-1}, 0)$ и $f_1 = f(x_1, ..., x_{n-1}, 1)$. Поскольку выделенная подсхема A состоит из четырёх элементов, её ненадёжность $P(A) \leqslant 4\mu$. Согласно индуктивному предположению функции $f_0 = f(x_1, ..., x_{n-1}, 0)$ и $f_1 = f(x_1, \ldots,$

$x_{n-1}, 1)$ можно реализовать схемами с ненадёжностью, не превосходящей 4μ.

Пусть $\tilde{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ — входной набор схемы $\tilde{S}$.

Если подсхема A исправна, а $a_n = 0$, то значение на выходе схемы $\tilde{S}$ равно значению на выходе схемы S'', причём неважно как сработает подсхема S', реализующая f_1.

Аналогично, если A исправна, а $a_n = 1$, то значение на выходе схемы $\tilde{S}$ равно значению на выходе схемы S', причём неважно как сработает подсхема S'', реализующая f_0.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
P_{\bar{f}(\tilde{a})}(\tilde{S}, \tilde{a}) \leqslant (1 - P_{\bar{f}(\tilde{a})}(A, \tilde{a})) \cdot \max\{P_{\bar{f}_1(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})}(S', \tilde{a}),& \\
P_{\bar{f}_0(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})}(S'', \tilde{a})\}& \\
+ P_{\bar{f}(\tilde{a})}(A, \tilde{a})[(1 - P_{\bar{f}_1(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})}(S', \tilde{a})) \cdot (1 - P_{\bar{f}_0(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})}(S'', \tilde{a}))& \\
+ (1 - P_{\bar{f}_1(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})}(S', \tilde{a})) \cdot P_{\bar{f}_0(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})}(S'', \tilde{a})& \\
+ P_{\bar{f}_1(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})}(S', \tilde{a}) \cdot (1 - P_{\bar{f}_0(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})}(S'', \tilde{a}))& \\
+ P_{\bar{f}_1(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})}(S', \tilde{a}) \cdot P_{\bar{f}_0(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})}(S'', \tilde{a})] \leqslant \max\{P(S'), P(S'')\}& \\
+ P(A) \leqslant 4\mu + 4\mu = 8\mu.&
\end{aligned}$$

Повысим надёжность схемы $\tilde{S}$. По теореме 2 построим схему $\varphi(\tilde{S})$, ненадёжность которой $P(\varphi(\tilde{S})) \leqslant \max\{3\mu + 4\mu P(\tilde{S}) + 2P^2(\tilde{S}),\ \mu + 2\mu(\mu + 2P(\tilde{S})) + (\mu + 2P^2(\tilde{S}))\}$. Так как $P(\tilde{S}) \leqslant 8\mu$, то $P(\varphi(\tilde{S})) \leqslant \max\{3\mu + 160\mu^2,\ \mu + 323\mu^2\}$. При $\mu \leqslant 1/50$ ненадёжность $P(\varphi(\tilde{S})) \leqslant \max\{3\mu + 160\mu^2,\ \mu + 323\mu^2\} \leqslant 7{,}5\mu$.

Применив ещё раз теорему 2, осуществим следующий шаг итерации: по схеме $\varphi(\tilde{S})$ построим такую схему $\varphi^2(\tilde{S})$, реализующую функцию f, что $P(\varphi^2(\tilde{S})) \leqslant \max\{3\mu + 142{,}5\mu^2,\ \mu + 288\mu^2\} \leqslant 6{,}8\mu$ при $\mu \leqslant 1/50$.

Третий шаг итерации позволяет построить схему $\varphi^3(\tilde{S})$ с

$$P(\varphi^3(\tilde{S})) \leqslant \max\{3\mu + 119{,}68\mu^2,\ \mu + 242{,}36\mu^2\} \leqslant 5{,}9\mu.$$

Процесс итерации продолжим дальше:
$P(\varphi^4(\tilde{S})) \leqslant \max\{3\mu + 93{,}22\mu^2,\ \mu + 189{,}44\mu^2\} \leqslant 4{,}9\mu$;
$P(\varphi^5(\tilde{S})) \leqslant \max\{3\mu + 67{,}62\mu^2,\ \mu + 138{,}24\mu^2\} \leqslant 4{,}4\mu$;
$P(\varphi^6(\tilde{S})) \leqslant \max\{3\mu + 56{,}32\mu^2,\ \mu + 115{,}64\mu^2\} \leqslant 4{,}2\mu$;
$P(\varphi^7(\tilde{S})) \leqslant \max\{3\mu + 52{,}08\mu^2,\ \mu + 107{,}16\mu^2\} \leqslant 4{,}05\mu$;
$P(\varphi^8(\tilde{S})) \leqslant \max\{3\mu + 49{,}005\mu^2,\ \mu + 101{,}01\mu^2\} \leqslant 4\mu$.
Схема $\varphi^8(\tilde{S})$ искомая, т. е. $S = \varphi^8(\tilde{S})$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть $\varepsilon \leqslant 1/150$, f — произвольная функция, S — схема, реализующая функцию f с ненадёжностью $P(S)$. Тогда можно построить схему $\varphi(S)$, реализующую функцию f с ненадёжностью $P(\varphi(S)) \leqslant \max\{2\varepsilon + \varepsilon^2 + 4\varepsilon P(S) + 2P^2(S),\ 9\varepsilon^2 + 12\varepsilon P(S) + 4P^2(S)\}$.*

Следующие леммы будут использованы при доказательстве теоремы 4.

Лемма 1. *Пусть S — произвольная схема, реализующая булеву функцию f, отличную от константы, а её выходному элементу E приписана конъюнкция. Пусть первый вход элемента E соединён с выходом некоторой подсхемы S_1, второй вход элемента E соединён с выходом некоторой подсхемы S_2, причём S_1 и S_2 не имеют общих элементов (рис. 3). Пусть $P_{\bar{f}_i}(S_i, \tilde{a})$ — вероятность ошибки на входном наборе $\tilde{a}$ схемы S_i, реализующей функцию f_i, $i = 1, 2$.*

Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S равны:

$$1)\ P_1(S,\tilde{a}) = \varepsilon^2 + (P_1(S_1,\tilde{a}) + P_1(S_2,\tilde{a}))\varepsilon(1-2\varepsilon) + P_1(S_1,\tilde{a})P_1(S_2,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2,$$

если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$ и $f_2(\tilde{a}) = 0$;

$$2)\ P_0(S,\tilde{a}) = 2\varepsilon - \varepsilon^2 + (P_0(S_1,\tilde{a}) + P_0(S_2,\tilde{a}))(1-3\varepsilon+\varepsilon^2) - P_0(S_1,\tilde{a})P_0(S_2,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2,$$

если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$ и $f_2(\tilde{a}) = 1$;

$$3)\ P_1(S,\tilde{a}) = \varepsilon - \varepsilon^2 + P_1(S_1,\tilde{a})(1-3\varepsilon+\varepsilon^2) - P_0(S_2,\tilde{a})\varepsilon(1-2\varepsilon) - P_1(S_1,\tilde{a})P_0(S_2,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2,$$

если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$ и $f_2(\tilde{a}) = 1$;

$$4)\ P_1(S,\tilde{a}) = \varepsilon - \varepsilon^2 - P_0(S_1,\tilde{a})\varepsilon(1-2\varepsilon) + P_1(S_2,\tilde{a})(1-3\varepsilon+2\varepsilon^2) - P_0(S_1,\tilde{a})P_1(S_2,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2,$$

если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$ и $f_2(\tilde{a}) = 0$.

Доказательство. Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок.

1) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$ и $f_2(\tilde{a}) = 0$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$\begin{aligned}P_1(S,\tilde{a}) &= (1-P_1(S_1,\tilde{a}))(1-P_1(S_2,\tilde{a}))\varepsilon^2 + ((1-P_1(S_1,\tilde{a}))P_1(S_2,\tilde{a}) \\ &+ P_1(S_1,\tilde{a})(1-P_1(S_2,\tilde{a})))\varepsilon(1-\varepsilon) + P_1(S_1,\tilde{a})P_1(S_2,\tilde{a})(1-\varepsilon)^2 \\ &= \varepsilon^2 + (P_1(S_1,\tilde{a}) + P_1(S_2,\tilde{a}))\varepsilon(1-2\varepsilon) + P_1(S_1,\tilde{a})P_1(S_2,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2.\end{aligned}$$

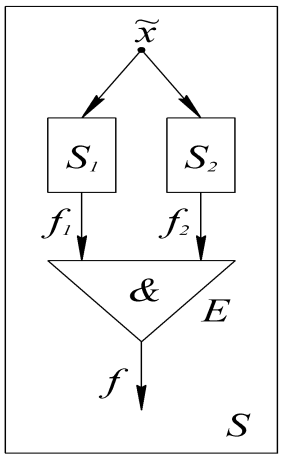

Рис. 3

2) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$ и $f_2(\tilde{a}) = 1$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$\begin{aligned}P_0(S,\tilde{a}) &= P_0(S_1,\tilde{a})P_0(S_2,\tilde{a})((1-\varepsilon)^2 + 2\varepsilon(1-\varepsilon)) \\ &+ (P_0(S_1,\tilde{a})(1-P_0(S_2,\tilde{a})) \\ &+ (1-P_0(S_1,\tilde{a}))P_0(S_2,\tilde{a}))\ (\varepsilon(1-\varepsilon) + (1-\varepsilon)^2 + \varepsilon^2) \\ &+ (1-P_0(S_1,\tilde{a}))(1-P_0(S_2,\tilde{a}))(\varepsilon^2 + 2\varepsilon(1-\varepsilon)) \\ &= 2\varepsilon - \varepsilon^2 + (P_0(S_1,\tilde{a}) + P_0(S_2,\tilde{a}))(1-3\varepsilon+\varepsilon^2) \\ &- P_0(S_1,\tilde{a})P_0(S_2,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2.\end{aligned}$$

3) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$ и $f_2(\tilde{a}) = 1$; то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$\begin{aligned}P_1(S,\tilde{a}) &= (1-P_1(S_1,\tilde{a}))P_0(S_2,\tilde{a})\varepsilon^2 + (1-P_1(S_1,\tilde{a}))(1-P_0(S_2,\tilde{a}))\varepsilon(1-\varepsilon) \\ &+ P_1(S_1,\tilde{a})P_0(S_2,\tilde{a})\varepsilon(1-\varepsilon) + P_1(S_1,\tilde{a})(1-P_0(S_2,\tilde{a}))(1-\varepsilon)^2 \\ &= \varepsilon - \varepsilon^2 + P_1(S_1,\tilde{a})(1-3\varepsilon+2\varepsilon^2) - P_0(S_2,\tilde{a})\varepsilon(1-2\varepsilon) \\ &- P_1(S_1,\tilde{a})P_0(S_2,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2.\end{aligned}$$

4) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$ и $f_2(\tilde{a}) = 0$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$\begin{aligned}P_1(S,\tilde{a}) &= P_0(S_1,\tilde{a})(1-P_1(S_2,\tilde{a}))\varepsilon^2 + P_0(S_1,\tilde{a})P_1(S_2,\tilde{a})\varepsilon(1-\varepsilon) \\ &+ (1-P_0(S_1,\tilde{a}))(1-P_1(S_2,\tilde{a}))\varepsilon(1-\varepsilon) + (1-P_0(S_1,\tilde{a}))P_1(S_2,\tilde{a})(1-\varepsilon)^2 \\ &= \varepsilon - \varepsilon^2 - P_0(S_1,\tilde{a})\varepsilon(1-2\varepsilon) + P_1(S_2,\tilde{a})(1-3\varepsilon+2\varepsilon^2) \\ &- P_0(S_1,\tilde{a})P_1(S_2,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2.\end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть S — произвольная схема, реализующая булеву функцию f, отличную от константы, а её выходному элементу E приписана дизъюнкция. Пусть первый вход элемента E соединен с выходом некоторой подсхемы S_1, второй вход элемента E соединен с выходом некоторой подсхемы S_2, причём S_1 и S_2 не имеют общих элементов (рис. 4), и пусть $P_{\bar{f}_i}(S_i, \tilde{a})$ — вероятность ошибки на входном наборе схемы S_i, реализующей функцию f_i, $i = 1, 2$. Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S равны:*

$$1)\ P_1(S, \tilde{a}) = 2\varepsilon - \varepsilon^2 + (P_1(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}))(1 - 3\varepsilon + \varepsilon^2) - P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})(1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2),$$

если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$ и $f_2(\tilde{a}) = 0$;

$$2)\ P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon^2 + (P_0(S_1, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a}))\varepsilon(1 - 2\varepsilon) + P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})(1 - 2\varepsilon)^2,$$

если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$ и $f_2(\tilde{a}) = 1$;

$$3)\ P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon - \varepsilon^2 + P_0(S_2, \tilde{a})(1 - 3\varepsilon + 2\varepsilon^2) - P_1(S_1, \tilde{a})\varepsilon(1 - 2\varepsilon) - P_1(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})(1 - 2\varepsilon)^2,$$

если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$ и $f_2(\tilde{a}) = 1$;

$$4)\ P_0(S, \tilde{a}) = \varepsilon - \varepsilon^2 - P_1(S_2, \tilde{a})\varepsilon(1 - 2\varepsilon) + P_0(S_1, \tilde{a})(1 - 3\varepsilon + 2\varepsilon^2) - P_0(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})(1 - 2\varepsilon)^2,$$

если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$ и $f_2(\tilde{a}) = 0$.

Доказательство. Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок.

1) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$ и $f_2(\tilde{a}) = 0$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$P_1(S, \tilde{a}) = (1 - P_1(S_1, \tilde{a}))(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))(\varepsilon^2 + 2\varepsilon(1 - \varepsilon)) + ((1 - P_1(S_1, \tilde{a}))P_1(S_2, \tilde{a}) + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a})))((1 - \varepsilon)^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon(1 - \varepsilon)) + P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})((1 - \varepsilon)^2 + 2\varepsilon(1 - \varepsilon)) = 2\varepsilon - \varepsilon^2 + (P_1(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}))(1 - 3\varepsilon + \varepsilon^2) - P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a})(1 - 2\varepsilon)^2.$$

2) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$ и $f_2(\tilde{a}) = 1$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$P_0(S,\tilde{a}) = P_0(S_1,\tilde{a})P_0(S_2,\tilde{a})(1-\varepsilon)^2 + P_0(S_1,\tilde{a})(1-P_0(S_2,\tilde{a}))\varepsilon(1-\varepsilon)$$
$$+ (1-P_0(S_1,\tilde{a}))P_0(S_2,\tilde{a})\varepsilon(1-\varepsilon) + (1-P_0(S_1,\tilde{a}))(1-P_0(S_2,\tilde{a}))\varepsilon^2$$
$$= \varepsilon^2 + (P_0(S_1,\tilde{a}) + P_0(S_2,\tilde{a}))\varepsilon(1-2\varepsilon) + P_0(S_1,\tilde{a})P_0(S_2,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2.$$

3) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, $f_1(\tilde{a}) = 0$ и $f_2(\tilde{a}) = 1$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

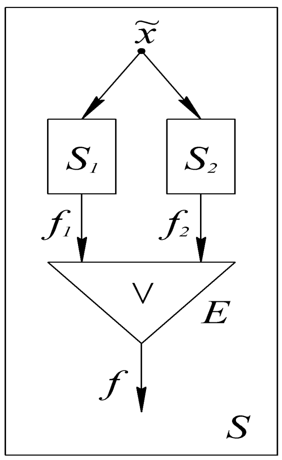

Рис. 4

$$P_0(S,\tilde{a}) = (1-P_1(S_1,\tilde{a}))P_0(S_2,\tilde{a})(1-\varepsilon)^2$$
$$+ (1-P_1(S_1,\tilde{a}))(1-P_0(S_2,\tilde{a}))\varepsilon(1-\varepsilon)$$
$$+ P_1(S_1,\tilde{a})P_0(S_2,\tilde{a})\varepsilon(1-\varepsilon)$$
$$+ P_1(S_1,\tilde{a})(1-P_0(S_2,\tilde{a}))\varepsilon^2 = \varepsilon - \varepsilon^2$$
$$+ P_0(S_2,\tilde{a})(1-3\varepsilon+2\varepsilon^2) - P_1(S_1,\tilde{a})\varepsilon(1-2\varepsilon)$$
$$- P_0(S_1,\tilde{a})P_1(S_2,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2.$$

4) Если входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$ и $f_2(\tilde{a}) = 0$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$P_0(S,\tilde{a}) = P_0(S_1,\tilde{a})(1-P_1(S_2,\tilde{a}))(1-\varepsilon)^2$$
$$+ P_0(S_1,\tilde{a})P_1(S_2,\tilde{a})\varepsilon(1-\varepsilon)$$
$$+ (1-P_0(S_1,\tilde{a}))(1-P_1(S_2,\tilde{a}))\varepsilon(1-\varepsilon) + (1-P_0(S_1,\tilde{a}))P_1(S_2,\tilde{a})\varepsilon^2$$
$$= \varepsilon - \varepsilon^2 + P_0(S_1,\tilde{a})(1-3\varepsilon+2\varepsilon^2) - P_1(S_2,\tilde{a})\varepsilon(1-2\varepsilon)$$
$$- P_0(S_1,\tilde{a})P_1(S_2,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть f — произвольная булева функция, а S — схема, реализующая f. По схеме S построим схему $\varphi(S)$ (рис. 5). Пусть $\tilde{a}$ — входной набор функции f. Вычислим вероятности ошибок на выходе подсхемы A:

1) $P_1(A,\tilde{a}) = \varepsilon^2 + P_1^2(S,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2 + 2P_1(S,\tilde{a})\varepsilon(1-2\varepsilon)$ при любом нулевом входном наборе $\tilde{a}$ функции f ($f(\tilde{a}) = 0$),

2) $$P_0(A,\tilde{a}) = 2\varepsilon - \varepsilon^2 + 2P_0(S,\tilde{a})(1-3\varepsilon+\varepsilon^2) - P_0^2(S,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2$$
$$\leqslant 2\varepsilon - \varepsilon^2 + 2P_0(S,\tilde{a})(1-3\varepsilon+\varepsilon^2)$$

при любом единичном входном наборе $\tilde{a}$ функции f $(f(\tilde{a}) = 1)$.

Вычислим вероятности ошибок на выходе схемы $\varphi(S)$. Учитывая полученные выше оценки, имеем:

1) При нулевых входных наборах $\tilde{a}$ функции f $(f(\tilde{a}) = 0)$

$$\begin{gathered}P_1(\varphi(S),\tilde{a}) = 2\varepsilon - \varepsilon^2 + 2P_1(A,\tilde{a})(1-3\varepsilon) - P_1^2(A,\tilde{a})(1-4\varepsilon+\varepsilon^2)\\ \leqslant 2\varepsilon - \varepsilon^2 + 2P_1(A,\tilde{a})(1-3\varepsilon) = 2\varepsilon - \varepsilon^2 + 2(1-3\varepsilon)(\varepsilon^2 + 2P_1(S,\tilde{a})\varepsilon\\ \times(1-2\varepsilon) + P_1^2(S,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2) = 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 6\varepsilon^3 + 4P_1(S,\tilde{a})\varepsilon(1-2\varepsilon)\\ \times(1-3\varepsilon) + 2P_1^2(S,\tilde{a})(1-3\varepsilon)(1-2\varepsilon)^2 \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon^2 + 4\varepsilon P_1(S,\tilde{a}) + 2P_1^2(S,\tilde{a}).\end{gathered}$$

Следовательно,

$$P_1(\varphi(S),\tilde{a}) \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon^2 + 4\varepsilon P(S,\tilde{a}) + 2P^2(S,\tilde{a}). \tag{1}$$

2) При единичных входных наборах $\tilde{a}$ функции f $(f(\tilde{a}) = 1)$

$$\begin{gathered}P_0(\varphi(S),\tilde{a}) = \varepsilon^2 + P_0^2(A,\tilde{a})(1-2\varepsilon)^2 + 2P_0(A,\tilde{a})\varepsilon(1-2\varepsilon)\\ \leqslant \varepsilon^2 + (2\varepsilon - \varepsilon^2 + 2P_0(S,\tilde{a})(1-3\varepsilon+\varepsilon^2))^2 + 2\varepsilon(1-2\varepsilon)(2\varepsilon - \varepsilon^2\\ + 2P_0(S,\tilde{a})(1-3\varepsilon+\varepsilon^2)) = 5\varepsilon^2 - 10\varepsilon^3 + 4\varepsilon^4 + 4\varepsilon^2(1-2\varepsilon)^2(1-3\varepsilon+\varepsilon^2)P_0(S,\tilde{a})\\ + 4\varepsilon(1-2\varepsilon)(1-3\varepsilon+\varepsilon^2)P_0(S,\tilde{a})\\ + (4\varepsilon^2 + 8\varepsilon(1-3\varepsilon+\varepsilon^2)P_0(S,\tilde{a}) + 4(1-3\varepsilon+\varepsilon^2)^2P_0^2(S,\tilde{a}))(1-2\varepsilon)^2\\ \leqslant 9\varepsilon^2 + 12\varepsilon P_0(S,\tilde{a}) + 4P_0^2(S,\tilde{a}).\end{gathered}$$

Следовательно,

$$P_0(\varphi(S),\tilde{a}) \leqslant 9\varepsilon^2 + 12\varepsilon P(S,\tilde{a}) + 4P^2(S,\tilde{a}). \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что

$$\begin{aligned}P(\varphi(S),\tilde{a}) \leqslant \max\{&2\varepsilon + \varepsilon^2 + 4\varepsilon P(S,\tilde{a}) + 2P^2(S,\tilde{a});\\ &9\varepsilon^2 + 12\varepsilon P(S,\tilde{a}) + 4P^2(S,\tilde{a})\}.\end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Следующая лемма будет использована при доказательстве теоремы 1.

Лемма 3. *Пусть S — произвольная схема, реализующая неконстантную булеву функцию f, такова, что вход её выходного элемента E — инвертора — соединён с выходом некоторой подсхемы C (рис. 6), и пусть $P_1(C,\tilde{a})$ и $P_0(C,\tilde{a})$ — вероятности ошибок на выходе схемы C на входном наборе $\tilde{a}$ схемы S. Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S равны:*

$P_1(S,\tilde{a}) = \varepsilon + P_0(C,\tilde{a})(1-2\varepsilon)$, если набор $\tilde{a}$ является нулевым для f, т. е. $f(\tilde{a}) = 0$;

$P_0(S,\tilde{a}) = \varepsilon + P_1(C,\tilde{a})(1-2\varepsilon)$, если набор $\tilde{a}$ является единичным для f, т. е. $f(\tilde{a}) = 1$.

Доказательство. Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок.

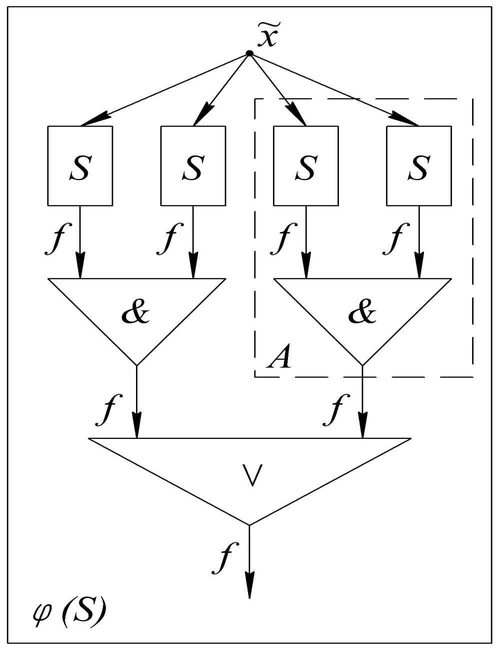

Рис. 5

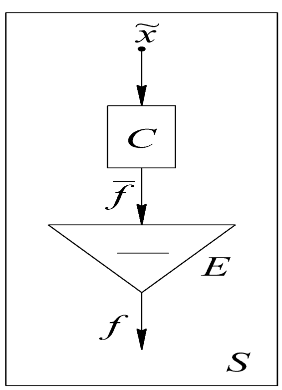

Рис. 6

1) Если набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 0$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$P_1(S,\tilde{a}) = P_0(C,\tilde{a})(1-\varepsilon) + (1 - P_0(C,\tilde{a}))\varepsilon = \varepsilon + P_0(C,\tilde{a})(1-2\varepsilon).$$

2) Если набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 1$, то вероятность ошибки на выходе схемы S равна

$$P_0(S,\tilde{a}) = (1 - P_1(C,\tilde{a}))\varepsilon + P_1(C,\tilde{a})(1-\varepsilon) = \varepsilon + P_1(C,\tilde{a})(1-2\varepsilon).$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1. В базисе $\{\&, \vee, ^{-}\}$ построим схему S_h, реализующую функцию $x|y = \bar{x} \vee \bar{y}$ (рис. 7). Вычислим вероятности ошибок на выходе построенной схемы S_h: на наборе (0, 0) имеем $P_0 = \varepsilon + \varepsilon^2$, на наборах (0, 1) и (1, 0) имеем $P_0 = 2\varepsilon - 3\varepsilon^2$, на наборе (1, 1) имеем $P_1 = 3\varepsilon - 5\varepsilon^2$. Следовательно, $\mu \leqslant 3\varepsilon$.

По теореме 3 при $\varepsilon \leqslant 1/150$ любую булеву функцию можно реализовать схемой $\tilde{S}$, ненадёжность которой $P(\tilde{S}) \leqslant 12\varepsilon$. Применяя теорему 4, по схеме $\tilde{S}$ построим схему $\varphi(\tilde{S})$, ненадёжность которой

$$P(\varphi(\tilde{S})) \leqslant \max\{2\varepsilon + 337\varepsilon^2; 729\varepsilon^2\} \leqslant 4\varepsilon + 129\varepsilon^2$$

при $\varepsilon \leqslant 1/150$. Применяя теорему 4 еще раз, получим схему $\varphi^2(\tilde{S})$, для которой

$$P(\varphi^2(\tilde{S})) \leqslant \max\{2\varepsilon + 49\varepsilon^2 + 2580\varepsilon^3 + 33282\varepsilon^4; 121\varepsilon^2 + 5676\varepsilon^3 + 66564\varepsilon^4\} \leqslant 2\varepsilon + 68\varepsilon^2$$

при $\varepsilon \leqslant 1/150$. На трерьем шаге итерации построим такую схему $\varphi^3(\tilde{S})$, что

$$P(\varphi^3(\tilde{S})) \leqslant \max\{2\varepsilon + 17\varepsilon^2 + 816\varepsilon^3 + 9248\varepsilon^4; 49\varepsilon^2 + 1904\varepsilon^3 + 18496\varepsilon^4\} \leqslant 2\varepsilon + 23\varepsilon^2$$

при $\varepsilon \leqslant 1/150$. По схеме $\varphi^3(\tilde{S})$ построим схему $\varphi^4(\tilde{S})$, реализующую f с ненадёжностью

$$P(\varphi^4(\tilde{S})) \leqslant \max\{2\varepsilon + 17\varepsilon^2 + 276\varepsilon^3 + 1058\varepsilon^4; 49\varepsilon^2 + 644\varepsilon^3 + 2116\varepsilon^4\} \leqslant 2\varepsilon + 19\varepsilon^2$$

при $\varepsilon \leqslant 1/150$. Схема $\varphi^4(\tilde{S})$ искомая, т. е. $S = \varphi^4(\tilde{S})$. Теорема 1 доказана.

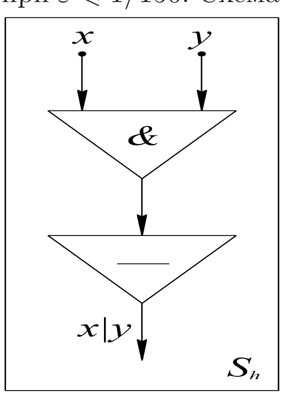

Рис. 7

Пусть $K(n)$ — множество булевых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вида $f(\tilde{x}) = x_i^a$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $a \in \{0, 1\}$, и констант 1 и 0.

Очевидно, что функции x_1, x_2, …, x_n можно реализовать абсолютно надёжно, а функции $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, …, $\bar{x}_n$ — с ненадёжностью ε (см. пример 1). Константы 1 и 0 можно реализовать с ненадёжностью асимптотически равной ε^2 при $\varepsilon \to 0$ (см. пример 2).

Следующая лемма будет использована при доказательстве теоремы 5.

Лемма 4 [1]. *Пусть f — произвольная булева функция, отличная от константы, и S — любая схема, реализующая f. Пусть подсхема B схемы S содержит выход схемы S и реализует булеву функцию f' с ненадёжностью $P(B) \leqslant 1/2$, и пусть p^1 — минимум вероятностей ошибок на выходе схемы B по таким входным наборам $\tilde{b}$, что $f'(\tilde{b}) = 0$. Аналогично, пусть p^0 — минимум вероятностей ошибок на выходе схемы B по таким входным наборам $\tilde{b}$, что $f'(\tilde{b}) = 1$. Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют условиям: $P_1(S, \tilde{a}) \geqslant p^1$, если $f(\tilde{a}) = 0$; $P_0(S, \tilde{a}) \geqslant p^0$, если $f(\tilde{a}) = 1$.*

Замечание 1 [1]. Из леммы 4 следует, что $P(S) \geqslant \max\{p^0, p^1\}$.

Пример 1. Функцию $\bar{x}$ можно реализовать наилучшей по надёжности схемой, функционирующей с ненадёжностью, равной ε ($\varepsilon \leqslant 1/4$).

Используя один инвертор, построим схему I, реализующую инверсию $\bar{x}$ с ненадёжностью, равной ε.

Нетрудно видеть, что схема I является наилучшей для функции $\bar{x}$. Действительно, пусть S — произвольная схема, реализующая функцию $\bar{x}$. Выделим в ней элемент E, содержащий выход схемы. Если элемент E реализует инверсию, то вероятность ошибки на его выходе при поступлении на вход значения 1 равна $P_1 = \varepsilon = p^1$ и при $\varepsilon < 1/2$ по лемме 4 (см. замечание 1) равна $P(S) \geqslant \varepsilon$. Если выходной элемент E реализует конъюнкцию, то вероятность ошибки на его выходе при поступлении на входы набора (1, 1) равна $P_0 = 2\varepsilon - \varepsilon^2 = p^0$ и при $\varepsilon \leqslant 1/4$ по лемме 4 (см. замечание 1) равна $P(S) \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon^2$. Если выходной элемент E реализует дизъюнкцию, то вероятность ошибки на его выходе при поступлении на входы набора (0, 0), равна $P_1 = 2\varepsilon - \varepsilon^2 = p^1$ и при $\varepsilon \leqslant 1/4$ по лемме 4 (см. замечание 1) равна $P(S) \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon^2$. Тем самым, ненадёжность $P(S) \geqslant \varepsilon$ для любой схемы S, реализующей функцию $\bar{x}$. Следовательно, схема I является наилучшей для инверсии $\bar{x}$ и функционирует с ненадёжностью, равной ε ($\varepsilon \leqslant 1/4$).

Пример 2. Константы 1 и 0 можно реализовать асимптотически наилучшими по надёжности схемами, функционирующими с ненадёжностью, асимптотически равной ε^2 при $\varepsilon \to 0$.

Моделируя формулу $\bar{x} \vee x$, строим схему S_1 из двух элементов. Нетрудно проверить, что $P(S_1) \leqslant 2\varepsilon$. Возьмём два экземпляра схемы S_1 и соединим их выходы со входами дизъюнктора. По лемме 2 ненадёжность построенной схемы $S_1^{(1)}$ удовлетворяет неравенству

$$P(S_1^{(1)}) \leqslant \varepsilon^2 + (1 - 2\varepsilon)8\varepsilon^2 \leqslant 9\varepsilon^2.$$

Аналогично (взяв два экземпляра схемы $S_1^{(1)}$ и дизъюнктор) построим такую схему $S_1^{(2)}$, что

$$P(S_1^{(2)}) \leqslant \varepsilon^2 + (1-2\varepsilon)(18\varepsilon^3 + 81\varepsilon^4) \leqslant \varepsilon^2 + 18\varepsilon^3 + 81\varepsilon^4.$$

С другой стороны, пусть S — произвольная схема, реализующая константу 1. Выделим в ней выходной элемент E. Каким бы он ни был в рассматриваемом базисе (см. леммы 1 — 3), для него $p^0 \geqslant \varepsilon^2$. Следовательно, $P(S) \geqslant \varepsilon^2$. Поэтому схема $S_1^{(2)}$ является асимптотически наилучшей и функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной ε^2 при $\varepsilon \to 0$.

Заменив в предыдущих рассуждениях $\vee$ на &, получим аналогичный результат для константы 0.

Теорема 5. *Пусть $\varepsilon \leqslant 1/6$, $f(\tilde{x})$ — булева функция, $f \notin K(n)$, и S — любая схема, реализующая f. Тогда $P(S) \geqslant 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.*

Доказательство. Пусть f — булева функция, удовлетворяющая условиям теоремы, а S — произвольная схема, реализующая f. Поскольку $f \notin K(n)$, в схеме S содержится хотя бы один элемент. Обозначим через E_1 элемент, содержащий выход схемы S. Возможны три случая.

1) Выходной элемент E_1 является инвертором, вход которого соединён с выходом некоторого элемента E_2.

1.1) Вход инвертора E_1 соединён с выходом другого инвертора E_2. По лемме 3 вероятность ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1 и E_2 при поступлении на её вход значения 1, равна $P_0 = \varepsilon + \varepsilon(1-2\varepsilon) = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$. Следовательно, $p^0 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$. При $\varepsilon \leqslant 1/6$ ненадёжность рассматриваемой подсхемы не больше $1/2$. Применяя лемму 4, получаем (см. замечание 1) $P(S) \geqslant 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.

1.2) Вход инвертора E_1 соединён с выходом дизъюнктора E_2. Вероятность ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1 и E_2, при поступлении на её входы набора (0, 0), равна $P_0 = \varepsilon + (2\varepsilon - \varepsilon^2)(1-2\varepsilon) = 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$ и равна p^0. При $\varepsilon \leqslant 1/6$ ненадёжность рассматриваемой подсхемы не больше $1/2$. Применяя лемму 4, имеем (см. замечание 1) $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$. Поскольку неравенство $3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 \geqslant 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$ верно при $\varepsilon \leqslant 1/6$, утверждение теоремы справедливо.

1.3) Вход инвертора E_1 соединён с выходом конъюнктора E_2. Вероятность ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1 и E_2 при поступлении на её входы набора (1, 1), равна $P_1 = \varepsilon + (2\varepsilon - \varepsilon^2)(1-2\varepsilon) = 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$ и равна p^1 . При $\varepsilon \leqslant 1/6$ ненадёжность рассматриваемой подсхемы не больше $1/2$. Применяя лемму 4, имеем (см. замечание 1)

$P(S) \geqslant 3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$. Поскольку неравенство $3\varepsilon - 5\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 \geqslant 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$ верно при $\varepsilon \leqslant 1/6$, утверждение теоремы справедливо.

2) Выходной элемент E_1 является конъюнктором. Вероятность ошибки на его выходе при поступлении набора (1, 1), равна $P_0 = 2\varepsilon - \varepsilon^2 = p^0$. При $\varepsilon \leqslant 1/6$ применима лемма 4. Поэтому (см. замечание 1) $P(S) \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon^2$.

3) Выходной элемент E_1 является дизъюнктором. Вероятность ошибки на его выходе при поступлении набора (0, 0), равна $P_1 = 2\varepsilon - \varepsilon^2 = p^1$. При $\varepsilon \leqslant 1/6$ применима лемма 4. Поэтому (см. замечание 1) $P(S) \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon^2$. Теорема 5 доказана.

Из теоремы 5 следует, что любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 1 и реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$, $f \notin K(n)$, является асимптотически наилучшей по надёжности и функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \to 0$. Число функций в классе $K(n)$ равно $2n + 2$ и мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных.

Таким образом, при инверсных неисправностях на входах элементов в базисе $\{\&, \vee, ^{-}\}$ функции $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно реализовать абсолютно надёжно, функции $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ можно реализовать схемами с ненадёжностью ε, константы 0 и 1 — с ненадёжностью асимптотически равной ε^2, а все остальные булевы функции — асимптотически наилучшими по надёжности схемами, функционирующими с ненадёжностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алехина М. А.** Нижние оценки ненадёжности схем в некоторых базисах при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 3. С. 3–28.

2. **Алехина М. А.** Синтез, надёжность и сложность схем из ненадёжных функциональных элементов // Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Пенза, 2004.

3. **Нейман Дж.** Вероятностная логика и синтез надёжных организмов из ненадёжных компонент // Автоматы. М.: ИЛ, 1956. С. 68–179.

4. **Ортюков С. И.** Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадёжных элементов // Тр. семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 27–29 января 1987 г.). М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 166–168.

5. **Редькин Н. П.** Надёжность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992.

6. **Uhlig D.** Reliable networks from unreliable gates with almost minimal comlexity // Fundamentals of computation theory. Intern. conf. FCT'87 (Kazan, June 1987). Proc. Berlin: Springer-Verl., 1987. P. 462–469. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 278).

Адрес авторов:

Пензенский гос. ун-т,
кафедра дискретной математики,
ул. Красная, 40,
440026 Пенза, Россия.
E-mail: ama@sura.ru

Статья поступила
2 декабря 2005 г.