ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2006. Серия 1. Том 13, № 4. 18–25

УДК 519.718

ОБ ОЦЕНКАХ ИНЦИДЕНТОРНОГО ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ВЗВЕШЕННОГО ОРИЕНТИРОВАННОГО МУЛЬТИГРАФА*)

В. Г. Визинг

Раскраска инциденторов ориентированного взвешенного мультиграфа называется допустимой, если:

а) примыкающие к одной вершине инциденторы окрашены в различные цвета;

б) разность между цветами конечного и начального инциденторов любой дуги не меньше веса этой дуги.

Оценивается снизу и сверху минимальное число цветов, необходимых для допустимой раскраски всех инциденторов мультиграфа G. Верхняя и нижняя оценки отличаются на $\lceil \Delta/2 \rceil$, где Δ — степень мультиграфа G.

Введение

Под (взвешенным) мультиграфом $G = (V, E)$ понимается конечный ориентированный мультиграф без петель с множеством вершин V, множеством дуг E, в котором каждой дуге e сопоставлено целое неотрицательное число $p(e)$, называемое весом дуги. Через $d^-(v)$, $d^+(v)$ и $d(v)$ обозначаются соответственно полустепень захода, полустепень исхода и степень вершины v. Максимальные значения этих величин в мультиграфе G обозначаются через $\Delta^-(G)$, $\Delta^+(G)$ и $\Delta(G)$. Мультиграф G называется мультиграфом степени Δ, если $\Delta(G) = \Delta$. Если $e = uv \in E$, то пара (u, e) называется *начальным инцидентором* дуги e, *примыкающим* к вершине u. Пара (v, e) называется *конечным инцидентором* этой дуги, примыкающим к v. Начальный и конечный инциденторы одной и той же дуги называются *сопряженными*. Различные инциденторы, примыкающие к одной вершине, называются *смежными*.

Будем называть цветами натуральные числа. Если a и b цвета и $a \leqslant b$, то под *интервалом* $[a, b]$ понимается множество цветов c таких, что $a \leqslant c \leqslant b$.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (грант 04–77–7173).

Раскраска инциденторов называется *правильной*, если смежные инциденторы имеют разные цвета. Пусть при некоторой раскраске разность между цветом конечного и начального инциденторов дуги e равна $q(e)$; тогда будем говорить, что эта дуга раскрашена со *скачком* $q(e)$. Скачок $q(e)$ называется *допустимым*, если выполняется неравенство $p(e) \geqslant q(e)$. Правильная раскраска инциденторов называется *допустимой*, если каждая дуга раскрашена с допустимым скачком. *Инциденторным хроматическим числом* $\chi I(G)$ мультиграфа G называется наименьшее натуральное k такое, при котором существует допустимая раскраска всех инциденторов мультиграфа цветами из интервала $[1, k]$. Ясно, что $\chi I(G) \geqslant \Delta(G)$. Для краткости допустимую раскраску всех инциденторов мультиграфа G цветами из $[1, \chi I(G)]$ будем называть *минимальной раскраской мультиграфа* G.

В случае, когда веса всех дуг одинаковы, задача отыскания инциденторного хроматического числа решается точно с помощью полиномиального алгоритма. Эта задача начала изучаться в статье [3]; различным её аспектам посвящено довольно много работ (см., например, [1]). Однако для произвольного взвешенного мультиграфа задача отыскания инциденторного хроматического числа является NP-полной. Это доказано в статье [2]; там же имеется приближённый полиномиальный алгоритм, решающий задачу для мультиграфа степени Δ с абсолютной погрешностью, не превышающей $\Delta - 1$.

В настоящей статье для произвольного взвешенного мультиграфа G степени Δ даются верхняя и нижняя оценки для $\chi I(G)$, отличающиеся между собой на $\lceil \Delta/2 \rceil$.

1. Предварительные сведения

Нам потребуются некоторые утверждения, доказанные в статье [2].

Утверждение 1. *Пусть мультиграф G' получается из мультиграфа G переориентацией всех дуг. Тогда $\chi I(G') = \chi I(G)$.*

Двудольный мультиграф H будем записывать в виде (X, Y, E), где E — множество дуг, X и Y — множества вершин соответственно первой и второй доли. Двудольный мультиграф называется *односторонним*, если начало каждой дуги лежит в первой доле, а конец — во второй. Односторонний двудольный мультиграф $B(G) = (V', V'', E')$ называется *двудольной интерпретацией мультиграфа* $G = (V, E)$, если выполняются следующие условия:

а) $|V'| = |V''| = |V|$ и между множествами V и V' и множествами V и V'' установлены 1–1 соответствия (вершина $v \in V$ имеет образы $v' \in V'$

и $v'' \in V''$);

б) каждой дуге $e = uv \in E$ взаимно однозначным образом соответствует дуга $e' = u'v''$, имеющая тот же вес.

Очевидно, что $\Delta(B(G)) = \max\{\Delta^-(G), \Delta^+(G)\}$.

Утверждение 2. *Для любого мультиграфа G степени Δ имеет место равенство $\chi I(G) = \max\{\Delta, \chi I(B(G))\}$.*

Утверждение 2 показывает, что задача минимальной раскраски произвольного мультиграфа сводится к минимальной раскраске его двудольной интерпретации.

2. Нижняя оценка инциденторного хроматического числа

Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф. Введём понятия потенциала вершины и потенциала мультиграфа. Пусть v — вершина мультиграфа G. Предположим, что $d^+(v) > 0$. Пронумеруем исходящие из v дуги в порядке невозрастания их весов: $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_r (r = d^+(v))$. *Выходной потенциал* $m^+(v)$ вершины v определяется так: $m^+(v) = \max\limits_{j=1,\ldots,r}\{j + p_j\}$. Легко убедиться в том, что если пронумеровать в произвольном порядке веса дуг $p'_1, \ldots, p'_r$, исходящих из вершины v, то $\max\limits_{j=1,\ldots,r}\{j + p'_j\}$ окажется не меньше чем $m^+(v)$. Если $d^+(v) = 0$, то считается, что $m^+(v) = 0$. *Входной потенциал* $m^-(v)$ вершины v равен выходному потенциалу вершины v в мультиграфе, получающемуся из G переориентацией всех дуг. *Потенциал* $m(v)$ вершины v определяется так: $m(v) = \max\{m^+(v), m^-(v)\}$.

Величину $\mu(G) = \max\{m(v) \mid v \in V\}$ назовём *потенциалом мультиграфа* G. Так как веса всех дуг — неотрицательные числа, то

$$\mu(G) \geqslant \max\{\Delta^-(G), \Delta^+(G)\} \geqslant \lceil \Delta(G)/2 \rceil.$$

Теорема 1. *Для любого мультиграфа $G = (V, E)$ степени Δ имеет место неравенство*

$$\chi I(G) \geqslant \max\{\Delta, \mu(G)\}. \tag{1}$$

Доказательство. Так как $\chi I(G) \geqslant \Delta$, то нужно только доказать, что $\chi I(G) \geqslant \mu(G)$. Пусть v — вершина такая, что $m(v) = \mu(G)$. Сначала предположим, что $m^+(v) = \mu(G)$. Рассмотрим минимальную раскраску мультиграфа G. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что начальные инциденторы дуг, исходящих из вершины v, окрашены цветами $1, \ldots, d^+(v)$. Пусть p_j — вес дуги, начальный инцидентор которой окрашен в цвет j $(j = 1, \ldots, d^+(v))$. Тогда цвет сопряженного инцидентора не меньше $j + p_j$. Значит, $\chi I(G) \geqslant \max\{j + p_j\}$ $(j = 1, \ldots, d^+(v))$. Отсюда следует, что $\chi I(G) \geqslant \mu(G)$.

Пусть теперь $m^-(v) = \mu(G)$. Переориентируем все дуги мультиграфа G. Получим такой мультиграф G', что $m^+(v) = \mu(G')$. По доказанному имеем $\chi I(G') \geqslant \mu(G')$. Но $\mu(G') = \mu(G)$, а по утверждению 1 $\chi I(G') = \chi I(G)$. Поэтому $\chi I(G) \geqslant \mu(G)$. Теорема 1 доказана.

Легко видеть, что нижняя оценка (1) достигается на мультиграфе, в котором имеется вершина, из которой исходят все дуги мультиграфа.

3. Верхняя оценка инциденторного хроматического числа

Как уже отмечалось, утверждение 2 задачу минимальной раскраски произвольного мультиграфа сводит к минимальной раскраске одностороннего двудольного мультиграфа. Поэтому сначала установим верхнюю оценку инциденторного хроматического числа для одностороннего двудольного мультиграфа. Если H такой мультиграф, то $\mu(H) \geqslant \Delta(H)$. Поэтому при подходящем $s \geqslant 0$ имеет место равенство $\mu(H) = \Delta(H) + s$.

Пусть H — односторонний двудольный мультиграф. Раскраску его инциденторов назовём *квазидопустимой*, если выполняются следующие условия:

а) скачок при раскраске любой дуги не меньше веса этой дуги;

б) к каждой вершине примыкает не более двух одинаково окрашенных инциденторов.

Лемма 1. *Пусть $H = (X, Y, E)$ — односторонний двудольный мультиграф с $\Delta(H) = 2k$ и $\mu(H) = 2k + s$ $(k \geqslant 1, s \geqslant 0)$. Тогда существует квазидопустимая раскраска всех инциденторов мультиграфа H, при которой инциденторы, примыкающие к вершинам из X, окрашены цветами из $[1, k]$, а инциденторы, примыкающие к вершинам из Y, окрашены цветами из $[k + s + 1, 2k + s]$.*

Доказательство. Раскрасим инциденторы, примыкающие к вершинам множества X, руководствуясь следующим правилом. Пусть x — произвольная вершина из X. Пронумеруем дуги, исходящие из x, в порядке невозрастания их весов. Затем начальные инциденторы первых двух дуг окрасим в цвет 1, начальные инциденторы третьей и четвертой дуг — в цвет 2, пятой и шестой дуг — в цвет 3 и т. д. Поскольку $\Delta(H) = 2k$, все начальные инциденторы дуг, исходящих из x, будут окрашены цветами из $[1, k]$, причём одним цветом будут окрашены не более двух инциденторов. После раскраски всех начальных инциденторов мультиграфа H приступим к раскраске конечных инциденторов. Пусть y — произвольная вершина из множества Y. Пронумеруем заходящие в y дуги в порядке невозрастания их весов. Затем конечные инциденторы первых двух дуг окрасим в цвет $2k+s$, конечные инциденторы третьей и четвертой дуг — в цвет $2k+s-1$, пятой и шестой дуг — в цвет $2k+s-2$ и т. д. Все конечные инциденторы заходящих в y дуг будут окрашены цветами из $[k+s+1, 2k+s]$, причём одним цветом будут окрашены не более двух инциденторов. После описанной раскраски всех конечных инциденторов, примыкающих к вершинам из множества Y, мы получим раскраску всех инциденторов мультиграфа H. При этой раскраске к каждой вершине примыкает не более двух одинаково окрашенных инциденторов, причём для раскраски начальных и конечных инциденторов используются именно те цвета, которые указаны в формулировке леммы.

Чтобы убедиться в квазидопустимости полученной раскраски нужно доказать, что при раскраске каждой дуги скачок не меньше веса этой дуги. Докажем это. Пусть $e = xy$ — произвольная дуга. Предположим, что её начальный инцидентор окрашен в цвет $i \in [1, k]$, а конечный — в цвет $(2k+s+1-j) \in [k+s+1, 2k+s]$. Пусть $p(e)$ — вес дуги e. Нужно доказать, что

$$2k+s+1-j-i \geqslant p(e). \tag{2}$$

Так как цвет начального инцидентора дуги e равен i, то очевидно, что номер дуги e при вершине x равен либо $2i-1$, либо $2i$. В соответствии с определением выходного потенциала имеем либо $2i-1+p(e) \leqslant m^+(e)$, либо $2i+p(e) \leqslant m^+(e)$. В обоих случаях $2i-1+p(e) \leqslant m^+(e)$. Но $m^+(e) \leqslant \mu(H) = 2k+s$. Поэтому $2i-1+p(e) \leqslant 2k+s$, откуда

$$p(e) \leqslant 2k+s+1-2i. \tag{3}$$

Аналогично, тот факт, что конечный инцидентор дуги e окрашен в цвет $2k+s+1-j$, означает, что номер дуги e при вершине y равен либо $2j-1$, либо $2j$. Поэтому $2j-1+p(e) \leqslant m^-(e) \leqslant \mu(H) = 2k+s$. Следовательно,

$$p(e) \leqslant 2k+s+1-2j. \tag{4}$$

Неравенство (2) является полусуммой неравенств (3) и (4). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $H = (X, Y, E)$ — односторонний двудольный мультиграф степени Δ. Тогда*

$$\chi I(H) \leqslant \mu(H) + \lceil \Delta/2 \rceil. \tag{5}$$

Доказательство. При $\Delta = 1$ имеем $\chi I(H) = \mu(H)$ и, значит, неравенство (5) справедливо. Пусть $\Delta \geqslant 2$ и $\mu(H) = \Delta + s$, где $s \geqslant 0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\Delta = 2k$. Тогда $\mu(H) = 2k + s$, а неравенство (5) принимает вид $\chi I(H) \leqslant 3k + s$. Пусть φ — квазидопустимая раскраска инциденторов мультиграфа H, описанная в лемме 1. Построим неориентированный двудольный мультиграф $L(H)$ следующим образом. Вершинами первой доли мультиграфа $L(H)$ будут пары (x, i), где $x \in X$, $i \in [1, k]$. Вершинами второй доли будут пары (y, j), где $y \in Y$, $j \in [k + s + 1, 2k + s]$. Каждой дуге $e = xy$ мультиграфа H взаимно однозначным образом соответствует ребро мультиграфа $L(H)$ по следующему правилу: если при раскраске φ начальный инцидентор дуги e окрашен в цвет i, а конечный — в цвет j, то соответствующее ребро мультиграфа $L(H)$ имеет своими концами вершины (x, i) и (y, j). Очевидно, что $\Delta(L(H)) = 2$. Поэтому рёбра мультиграфа $L(H)$ можно правильно раскрасить двумя цветами. Пусть E' — подмножество дуг мультиграфа H, соответствующих рёбрам цвета 1 мультиграфа $L(H)$. Увеличим на k цвета начальных и конечных инциденторов дуг множества E', оставив без изменения цвета инциденторов остальных дуг. Получим допустимую раскраску всех инциденторов мультиграфа H цветами из $[1, 3k + s]$, что и требовалось доказать.

Случай 2. $\Delta = 2k + 1$. Тогда $\mu(H) = 2k + 1 + s$ и неравенство (5) принимает вид $\chi I(H) \leqslant 3k + 2 + s$. Увеличим на 1 веса всех дуг мультиграфа H. Получим такой мультиграф H', что $\mu(H') = 2k+2+s \geqslant \Delta+1$. Добавим к H' компоненту связности, которая имеет две вершины v_1 и v_2 и $\Delta+1$ дугу веса 0, идущие из v_1 в v_2. Получим мультиграф H'' степени $2k+2$ такой, что $\mu(H'') = 2k+2+s$. Как было доказано в случае 1, имеет место неравенство $\chi I(H'') \leqslant 3k+3+s$. Построим допустимую раскраску всех инциденторов мультиграфа H'' цветами из $[1, 3k+3+s]$. Удалим из H'' добавленные вершины и дуги. Получим мультиграф H' с допустимой раскраской всех инциденторов цветами из $[1, 3k+3+s]$. Так как веса всех дуг мультиграфа H' не меньше 1, то начальные инциденторы дуг будут окрашены цветами из $[1, 3k + 2 + s]$. Вернемся к мультиграфу H, уменьшив на 1 цвета конечных инциденторов всех дуг. Получим допустимую раскраску всех инциденторов мультиграфа H цветами из $[1, 3k + 2 + s]$. Лемма 2 доказана.

Обратимся теперь к мультиграфам произвольного вида.

Теорема 2. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф степени Δ. Тогда*

$$\chi I(G) \leqslant \mu(G) + \lceil \Delta/2 \rceil. \tag{6}$$

Доказательство. Построим двудольную интерпретацию $B(G)$ мультиграфа G. По утверждению 2 имеем $\chi I(G) = \max\{\Delta, \chi I(B(G))\}$. В силу леммы 2 выполняется неравенство $\chi I(B(G)) \leqslant \mu(B(G)) + \lceil \Delta(B(G))/2 \rceil$.

Отсюда и из соотношений $\mu(B(G)) = \mu(G)$, $\Delta(B(G)) \leqslant \Delta$ следует, что $\chi I(B(G)) \leqslant \mu(G) + \lceil \Delta/2 \rceil$. С другой стороны, $\Delta \leqslant \mu(G) + \lceil \Delta/2 \rceil$, так как $\mu(G) \geqslant \lceil \Delta/2 \rceil$. Таким образом, $\chi I(G) = \max\{\Delta, \chi I(B(G))\} \leqslant \mu(G) + \lceil \Delta/2 \rceil$. Теорема 2 доказана.

Опираясь на доказательство теоремы 2, можно построить алгоритм полиномиальной сложности, раскрашивающий инциденторы произвольного мультиграфа G степени Δ с использованием $\mu(G) + \lceil \Delta/2 \rceil$ цветов.

Из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие 1. *Пусть* $G = (V, E)$ — *мультиграф степени* Δ. *Тогда* $\mu(G) \leqslant \chi I(G) \leqslant \mu(G) + \lceil \Delta/2 \rceil$.

Остановимся на вопросе о точности верхней оценки инциденторного хроматического числа в (6).

При чётном Δ оценка всегда достигается в том смысле, что для любого $\Delta = 2k$ можно построить мультиграф G степени $2k$ с $\chi I(G) = \mu(G) + k$. Действительно, рассмотрим мультиграф G степени $2k$, имеющий две вершины x и y и $2k$ дуг с весами $0, 1, ..., 2k - 1$, идущими из x в y. Тогда $\mu(G) = 2k$. Покажем, что $\chi I(G) = \mu(G) + \lceil \Delta/2 \rceil = 3k$. В силу теоремы 2 достаточно убедиться в том, что $\chi I(G) > 3k - 1$. Предположим противное: пусть $\chi I(G) \leqslant 3k - 1$. Рассмотрим допустимую раскраску всех инциденторов мультиграфа G цветами из $[1, 3k - 1]$. При этой раскраске сумма цветов конечных инциденторов не больше чем $k + (k + 1) + \ldots + (3k - 1) = 4k^2 - k < 4k^2$. Эта сумма должна быть не меньше суммы цветов всех начальных инциденторов и весов всех дуг. Однако сумма цветов всех начальных инциденторов и весов всех дуг не меньше $1 + 2 + ... + 2k + 0 + 1 + ... + 2k - 1 = 4k^2$. Получившееся противоречие означает, что $\chi I(G) = 3k = \mu(G) + \lceil \Delta/2 \rceil$. Аналогично строится мультиграф H с $\Delta(H) = 2k + 1$ и с $\chi I(H) = \mu(H) + \lceil \Delta/2 \rceil$. Однако при произвольном нечётном $\Delta \geqslant 5$ автору не удалось построить такой мультиграф L степени Δ, что $\chi I(L) = \mu(L) + \lceil \Delta/2 \rceil$.

При $\Delta = 3$ такой мультиграф существует. На рис. 1 изображён мультиграф L степени 3. Имеем $\mu(L) = 3$. Веса дуг x_1y_1, x_2y_2 и x_3y_3 равны 2, веса дуг x_1y_2 и x_2y_3 равны 1, веса остальных дуг равны 0.

Нельзя построить допустимую раскраску всех инциденторов мультиграфа L с помощью цветов из [1, 4]. Действительно, уберем дугу x_3y_3 веса 2. Тогда, как нетрудно убедиться, при любой допустимой раскраске цветами из [1, 4] всех инциденторов оставшегося мультиграфа либо в вершине x_3 будут присутствовать цвета 1 и 2, либо в вершине y_3 будут присутствовать цвета 3 и 4. Поэтому цветами из [1, 4] построить допустимую раскраску всех инциденторов мультиграфа L не удастся. Таким образом, $\chi I(L) = \mu(L) + \lceil \Delta(L)/2 \rceil = 5$.

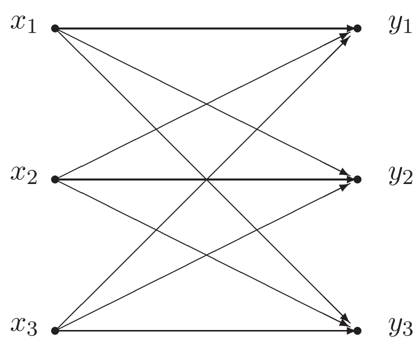

Рис. 1. Мультиграф L

Автор благодарен рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г., Пяткин А. В.** Задача раскраски инцидентеров мультиграфа // Российская конференция «Дискретный анализ и исследование операций»: Материалы конференции (Новосибирск, 28 июня–2 июля 2004 г.). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004. С. 6–11.
2. **Визинг В. Г., Пяткин А. В.** О раскраске инцидентеров в ориентированном взвешенном мультиграфе // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 1. С. 33–44.
3. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.

Адрес автора:

ул. Варненская, 18/2, кв. 26,
65070 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
10 июля 2006 г.