ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2006. Серия 1. Том 13, № 4. 26–32

УДК 621.391.15

О СЛАБЫХ ИЗОМЕТРИЯХ БУЛЕВА КУБА

В. Ю. Красин

Рассматриваются p-слабые изометрии булева куба, т. е. отображения куба на себя, сохраняющие фиксированное расстояние p. Получены необходимые и достаточные условия совпадения группы p-слабых изометрий с группой обычных изометрий, или автоморфизмов куба.

Введение

Задача о слабых изометриях в общем виде может быть сформулирована так: на некотором метрическом пространстве рассматриваются отображения, сохраняющие фиксированное расстояние (называемые слабыми изометриями). Требуется выяснить, как данные отображения соотносятся с изометриями этого пространства. В [2] показано, что в случае n-мерного евклидова пространства при $n > 1$ любая слабая изометрия является обычной изометрией, т. е. сохранение любого фиксированного расстояния влечёт сохранение всех расстояний. Для совершенных двоичных кодов аналогичный результат был получен в [1], т. е. слабая изометричность совершенных двоичных кодов влечёт их изометричность.

Вместе с тем в [2] доказано существование отображений евклидовой прямой на себя, которые сохраняют расстояние 1, но не являются изометриями прямой.

В данной статье рассматривается n-мерный булев куб E^n, т. е. векторное пространство размерности n над полем из двух элементов. Элементы этого пространства называются вершинами куба. Носителем вершины u называется множество индексов её ненулевых координат и обозначается через $[u] = \{i|u(i) \neq 0\}$. Мощность этого множества называется весом вершины u и обозначается через $\omega(u)$. Через L_k^n мы будем обозначать k-й слой куба, т. е. множество всех его вершин веса k. Будем говорить, что отображение W сохраняет k-й слой, если никакая вершина веса k не меняет свой вес под действием W, т. е. $W(L_k^n) \subseteq L_k^n$. Сумма всех координат вершины по модулю 2 называется модулем вершины u и обозначается

через $|u| = \sum_i u(i) (\text{mod } 2)$. Иными словами, $|u| = 0$ тогда и только тогда, когда вес вершины u чётен, в противном случае $|u| = 1$. Расстоянием между двумя вершинами u, v называется число координат, в которых эти вершины не совпадают, и обозначается через $d(u, v) = |\{i | u(i) \neq v(i)\}|$. Через $0^n = (00...0)$ и $1^n = (11...1)$ мы будем обозначать соответственно нулевую и единичную вершины куба E^n.

Взаимно однозначное отображение куба E^n на себя, сохраняющее расстояние p, называется *p-слабой изометрией*, или просто *p-изометрией*. Сразу заметим, что все такие отображения образуют группу, которую будем обозначать через $\mathrm{Iso}_p(E^n)$. Группа обычных изометрий обозначается через $\mathrm{Iso}(E^n)$.

1. Примеры

Рассмотрим отображение

$$I_v^2(u) = \begin{cases} u, & \text{если } |u| = 0, \\ u + v, & \text{если } |u| = 1, \end{cases}$$

которое все вершины чётного веса оставляет на месте, а нечётного — сдвигает на вектор v, где v — произвольная чётная вершина (это условие необходимо, так как в противном случае данное отображение не будет взаимно однозначным). Отображение I_v^2 является $2k$-изометрией при любом
$k = 1, 2, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$ (т. е. сохраняет все чётные расстояния), так как чётное расстояние возможно только между вершинами одной чётности, а на них данное отображение действует одинаково. С другой стороны, I_v^2, очевидно, не является обычной изометрией.

При $n = (4k + 3)$ и $p = (2k + 1) = (n - 1)/2$ рассмотрим отображение

$$I_i^-(u) = \begin{cases} u, & \text{если } u_i = |u|, \\ u + \overline{e_i}, & \text{если } u_i \neq |u|, \end{cases}$$

которое все вершины чётного веса с i-й координатой, равной 0, и нечётного веса с единичной i-й координатой оставляет на месте, а остальные вершины сдвигает на вектор $\overline{e_i}$. Сразу заметим, что при этом $\omega(\overline{e_i}) = 4k + 2, |\overline{e_i}| = 0$.

Покажем, что данное отображение является p-изометрией. Для этого рассмотрим две такие вершины u и v, что $I_i^-(u) = u, I_i^-(v) = v + \overline{e_i}$, и покажем, что если расстояние между u и v было равно p, то оно сохранится. Так как $p = 2k + 1$ нечётно, то $|u| \neq |v|$. С другой стороны, $|u| = u_i, |v| \neq v_i$, а значит, $u_i = v_i$. Отображение I_i^- вершину v переводит

в v', получаемую из v заменой всех координат, кроме i-й, на противоположные. Таким образом,

$$\begin{aligned} d(I_i^-(u), I_i^-(v)) = d(u,v') = \omega(u+v') = (u_i \oplus (v')_i) + \sum_{j\neq i}(u_j \oplus v'_j) \\ = (u_i \oplus v_i) + \sum_{j\neq i}(u_j \oplus v_j \oplus 1) = 0 + \sum_{j\neq i}(1-(u_j \oplus v_j)) \\ = (n-1) - \sum_{j\neq i}(u_j \oplus v_j) = (n-1) - \omega(u+v) = 2p - p = p. \end{aligned}$$

Замечание 1. В приведённом выше доказательстве нечётность p играет важную роль. В случае чётного p (или, что тоже самое $n = 4k+1$) данное отображение уже не будет являться p-изометрией (с помощью аналогичных вычислений легко показать, что в этом случае расстояние p будет переходить в $p+1$).

При $p = (n+1)/2$ таким примером является отображение

$$I_i^+(u) = \begin{cases} u, & \text{если } u_i = 0, \\ u + \overline{e_i}, & \text{если } u_i = 1. \end{cases}$$

Доказательство того, что I_i^+ является p-изометрией, аналогично. Чётность p в данном случае не играет никакой роли. Поэтому данное отображение является p-изометрией при любом нечётном n.

При чётном n и $p = n/2$ таким примером является отображение

$$H_v(u) = \begin{cases} u, & \text{если } u \neq v, u \neq \overline{v}, \\ \overline{u} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

которое меняет местами вершины v и $\overline{v}$, а все остальные вершины оставляет на месте. Ясно, что если $d(u,v) = n/2$, то $d(u,\overline{v}) = n - d(u,v) = n/2$ и расстояние $n/2$ сохраняется.

2. Условия существования слабых изометрий, не являющихся обычными изометриями

Приведённые выше примеры показывают, что существуют слабые изометрии куба E^n, не являющиеся изометриями. В этом разделе будут получены необходимые и достаточные условия существования таких слабых изометрий.

Для произвольной вершины u веса $2k$ её p-степенью называется число вершин веса p, находящихся на расстоянии p от u. Это число однозначно определяется весом вершины u и обозначается через

$$A_{2k}^p = |\{v \mid \omega(v) = p,\, d(u,v) = p\}|.$$

Утверждение 1. *При любых n, $p = 1, 2..., n-1$ и $k = 1, 2, \dots, \min\{p,\ n-p\}$ справедливо равенство $A^p_{2k} = \binom{k}{2k} \cdot \binom{p-k}{n-2k}$, причём если $k > \min\{p, n-p\}$, то $A^p_{2k} = 0$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную вершину u веса $2k$. Не теряя общности, положим $[u] = \{1, 2, ..., 2k\}$. Рассмотрим вершину v веса p, находящуюся на расстоянии p от вершины u. Схематически их взаимное расположение можно изобразить следующим образом:

$$u = (1, 1, ..., 1, 1, 1..., 1, 0, 0, ..., 0, 0, 0..., 0),$$

$$v = (\underbrace{1, 1, ..., 1}_{a}, \underbrace{0, 0..., 0}_{b}, \underbrace{1, 1, ..., 1}_{c}, \underbrace{0, 0..., 0}_{d}).$$

Числа a, b, c и d удовлетворяют условиям:

$$a + b = \omega(u) = 2k, \quad a + c = \omega(v) = p,$$
$$b + c = d(u, v) = p, \quad a + b + c + d = n.$$

Эта система имеет единственное решение

$$a = k, b = k, c = p - k, d = n - (p + k).$$

Учитывая неотрицательность всех четырёх чисел, получаем, что неравенство $k \leqslant p, p + k \leqslant n$ или $k \leqslant \min\{p, n-p\}$ является необходимым условием существования таких вершин v. В этом случае число таких вершин v, или p-степень вершины u, равна $\binom{k}{2k} \cdot \binom{p-k}{n-2k}$. В случае, когда $k >\min\{p, n-p\}$, таких вершин нет, а значит, p-степень вершины u равна нулю.

Утверждение 2. *При любых n, $p = 1, 2, ..., n-1$ и $k = 1, 2, \dots, \min\{p, n-p\}$ справедливо равенство $A^p_{2k} = A^{n-p}_{2k}$.*

Доказательство. Действительно,

$$A^p_{2k} = \binom{k}{2k} \cdot \binom{p-k}{n-2k} = \binom{k}{2k} \cdot \binom{n-2k-(p-k)}{n-2k} = \binom{k}{2k} \cdot \binom{(n-p)-k}{n-2k} = A^{n-p}_{2k}.$$

Замечание 2. Далее, не ограничивая общности, будем рассматривать лишь отображения, переводящие нулевую вершину куба в себя. При этом условии любая p-изометрия будет сохранять p-й слой. Значит, вершина веса $2k$ может перейти в вершину веса $2l$ только тогда, когда их p-степени совпадают, т. е. когда $A^p_{2k} = A^p_{2l}$.

Утверждение 3. *При любых n, $p \in \{1, 2, ...n-1\}$, $p \neq \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}$ и $k \in \{2, 3, ..., \lfloor n/2 \rfloor\}$ справедливо неравенство $A^p_2 > A^p_{2k}$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай нечётного n. Разобьём доказательство на этапы. Положим $p = (n-1)/2$. Рассмотрим отношение $H_k = A^p_{2k+2}/A^p_{2k}$. Используя выражение для A^p_{2k} из утверждения 1, получим $H_k = \frac{(2k+1)(p-k+1)}{(k+1)(n-2k)}$. При этом $H_k < 1$ (или, что то же самое, $A^p_{2k+2} < A^p_{2k}$) тогда и только тогда, когда $(2k+1)(p-k+1) < (n-2k)(k+1)$. После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим, что это неравенство эквивалентно неравенству $k < p/2$. Таким образом, $H_k < 1$ при $k < p/2$ и A^p_{2k} убывают с ростом k, а значит, $A^p_2 > A^p_{2k}$ при любом $k = 2, ..., \lfloor p/2 \rfloor$. С другой стороны, $H_k > 1$ при $k > p/2$ и A^p_{2k} возрастают с ростом k, а значит $A^p_{2p} > A^p_{2k}$ при любом $k = \lfloor p/2 \rfloor + 1, ..., p-1$. Кроме того,

$$A^p_2 = \binom{1}{2} \cdot \binom{p-1}{n-2} = 2\frac{(2p-1)!}{(p-1)!p!} = \frac{(2p)!}{p!p!} = \binom{p}{2p} \cdot \binom{0}{1} = A^p_{2p}.$$

Следовательно, при $p = (n-1)/2$ справедливо неравенство

$$A^p_2 \geqslant A^p_{2k}, k = 2, ..., p. \tag{1}$$

Покажем, что это неравенство становится строгим при уменьшении p на единицу. Возьмём отношение $B_k = \frac{A^{p-1}_{2k}}{A^p_{2k}} = \frac{p-k}{n-p-k+1}$. Рассмотрим B_k как функцию непрерывного аргумента k, тогда её производная

$$B'_k = \left(\frac{p-k}{n-p-k+1}\right)' = \frac{-n+2p-1}{(n-p-k+1)^2} < 0$$

(напомним, что мы рассматриваем случай $p = (n-1)/2$). Следовательно, B_k убывают с ростом k и выполняется неравенство

$$B_1 > B_k, k = 2, ..., p. \tag{2}$$

Далее, так как $A^{p-1}_{2k} = A^p_{2k} B_k$, то из (1) и (2) следует, что

$$A^{p-1}_2 = A^p_2 B_1 > A^p_{2k} B_k = A^{p-1}_{2k}, k = 2, \ldots, p.$$

Таким образом, при $p = (n-3)/2$ имеет место неравенство

$$A^p_2 > A^p_{2k}, k = 2, ..., p. \tag{3}$$

Аналогичным способом можно убедиться в справедливости (3) при всех $p = (n-5)/2, \ldots, 1$. Используя (3) и утверждение 2 при $p > n/2$, $p \neq (n+1)/2$, имеем

$$A_2^p = A_2^{n-p} > A_{2k}^{n-p} = A_{2k}^p, k = 2, ..., \lfloor n/2 \rfloor.$$

Перейдём к случаю чётного n. Если $p = n/2$, то $H_k = \frac{2k+1}{k+1}\frac{p-k}{2p-2k-1}$. Следовательно, $H_k < 1$ тогда и только тогда, когда

$$(2k+1)(p-k) < (k+1)(2p-2k-1),$$

т. е. $k < (p-1)/2$. Кроме того, согласно утверждению 1 $A_2^p = \binom{1}{2} \cdot \binom{p-1}{2p-2} = A_{2p-2}^p$. Поэтому в случае $p = n/2$ имеем $A_2^p \geqslant A_{2k}^p$ при $k = 2, ..., p-1$ и, как следствие,

$$A_2^p < A_n^p. \tag{4}$$

Неравенство (2) также сохраняется. Заметив, что $A_n^{p-1} = 0$ (т. е. правая часть неравенства (4) обращается в 0 при уменьшении p на 1; следовательно, знак неравенства меняется на противоположный), получаем неравенство (3) и для чётного n.

Утверждение 4. *При любых n, $p \in \{1, 2, ...n-1\}$ и $p \neq \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}$ любая p-изометрия сохраняет все чётные расстояния.*

Доказательство. Из утверждения 3 следует неравенство $A_2^p > A_{2k}^p$ при $k \in \{2, 3, ..., \lfloor n/2 \rfloor\}$. Из замечания 2 следует, что вершины веса 2 должны сохранять свой вес. А это означает сохранение расстояния 2 произвольной p-изометрией. Действительно, пусть существует p-изометрия W такая, что $\exists u, v\, (d(u,v) = 2, d(W(u), W(v)) \neq 2)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $u = 0^n$ и $W(u) = 0^n$. Тогда $\omega(v) = 2$. По доказанному изометрия W должно сохранять второй слой, а значит, $\omega(W(v)) = 2$, и $d(W(u), W(v)) = 2$. Противоречие. Из сохранения второго слоя и расстояния 2 вытекает сохранение 4-го слоя, а значит, и расстояния 4 и т. д.

Теорема 1. *При любом n равенство $\mathrm{Iso}(E^n) = \mathrm{Iso}_p(E^n)$ выполняется тогда и только тогда, когда p нечётно и $p \neq \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}, n/2$.*

Доказательство. Необходимость утверждения установлена ранее.

Достаточность. Из утверждения 4 следует, что любая p-изометрия сохраняет все чётные расстояния. Следовательно, сохраняются $(p-1)$-й и $(p+1)$-й слои куба. Теперь докажем вспомогательное утверждение: пусть вершина u такова, что все вершины, находящиеся на расстоянии p от вершины u, имеют вес либо $p-1$, либо $p+1$. Тогда $\omega(u) = 1$.

Пусть u — вершина веса k, а v — произвольная вершина, находящаяся

на расстоянии p от u:

$$u = (1, 1, ..., 1, 1, 1..., 1, 0, 0, ..., 0, 0, 0..., 0),$$
$$v = (\underbrace{1, 1, ..., 1}_{a}, \underbrace{0, 0..., 0}_{b}, \underbrace{1, 1, ..., 1}_{c}, \underbrace{0, 0..., 0}_{d}).$$

Числа a, b, c и d удовлетворяют следующим условиям:

$$a+b = \omega(u) = k, \quad a+c = \omega(v) = l, \quad b+c = d(u, v) = p, \quad a+b+c+d = n.$$

Решением это системы являются числа: $a = \frac{l+k-p}{2}$, $b = \frac{k+p-l}{2}$, $c = \frac{l+p-k}{2}$, $d = n - \frac{k+l+p}{2}$. Так как нас интересуют только неотрицательные решения, то получаем условия:

$$l \geqslant p - k, \quad l \leqslant p + k, \quad l \geqslant k - p, \quad l \leqslant 2n - (p + k)$$

или $|p - k| \leqslant l \leqslant \min\{p + k, 2n - (p + k)\}$. В рассматриваемом случае эти неравенства выполняются только при $l = p - 1$, $p + 1$, т. е. $|p - k| = p - 1$, $\min\{p + k, 2n - (p + k)\} = p + 1$. Первое из двух равенств справедливо при $k = 1$ и $k = 2p - 1$, второе — при $k = 1$ и $k = 2(n - p) - 1$. Если $k \neq 1$, то $2p - 1 = 2(n - p) - 1$ или $p = n/2$, что противоречит условиям теоремы.

Таким образом, если все вершины, находящиеся на расстоянии p от u, имеют вес $p - 1$, либо $p + 1$, то $\omega(u) = 1$. Поэтому сохранение слоёв $p - 1$ и $p + 1$ означает сохранение первого слоя, а значит, и расстояния 1, а следовательно, и всех остальных расстояний. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В.** К строению графов минимальных расстояний совершенных бинарных $(n, 3)$-кодов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1998. Т. 5, № 4. С. 3–5.
2. **Beckman F. S., Quarles D. A.** On isometries of Euclidean spaces // Proc. of the American Math. Soc. 1953. V. 4, N 5. P. 810–815.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.

Статья поступила
11 мая 2005 г.