ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2006. Серия 2. Том 13, № 1. 10–26

УДК 519.8

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ТРЁХИНДЕКСНОЙ ПЛАНАРНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ*)

Э. Х. Гимади, Ю. В. Глазков

Рассматривается m-слойная трёхиндексная планарная задача о назначениях, являющаяся модификацией классической трёхиндексной планарной задачи о назначениях. Эта задача NP-трудна при $m \geqslant 2$. Предложен приближённый алгоритм решения задачи при $1 < m < n/2$. Установлены оценки качества его работы в случае, когда входные данные (элементы матрицы размера $m \times n \times n$) являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами со значениями на отрезке $[a_n, b_n]$, где $b_n > a_n > 0$. Алгоритм имеет временну́ю сложность $O(mn^2 + m^{7/2})$. Показано, что в случае равномерного распределения (а также распределения минорируемого типа) алгоритм является асимптотически точным, если $m = \Theta(n^{1-\theta})$ и $b_n/a_n = o(n^\theta)$ для любой константы θ, $0 < \theta < 1$.

Введение

Хорошо изученной является двухиндексная задача о назначениях: построены эффективные алгоритмы для нахождения её точного решения, а также известны многие свойства, которые касаются существования целочисленного оптимального решения релаксации задачи, математического ожидания оптимального значения целевой функции на случайных входах, и других аспектов.

Естественным обобщением этой задачи является многоиндексная задача о назначениях (МЗН), имеющая много практических приложений. С более полным обзором по МЗН можно познакомиться в [22].

Более всего изучены МЗН с числом индексов, равным три (3–ЗН). В зависимости от вида ограничений выделяют аксиальные и планарные 3–ЗН [5].

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00395) и INTAS (грант 04–77–7173).

Трёхиндексная аксиальная задача о назначениях состоит в таком выборе n элементов кубической матрицы (c_{ijk}) порядка n (по одному в каждом сечении), чтобы сумма выбранных элементов была минимальна. (Под сечением матрицы понимается множество n^2 её элементов с фиксированным значением одного из индексов i, j или k, $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$.)

В классической трёхиндексной планарной задаче о назначениях требуется выбрать n^2 элементов указанной матрицы так, чтобы в каждом её сечении было выбрано ровно n элементов и при этом сумма выбранных элементов минимальна.

И аксиальные и планарные 3–ЗН являются NP-трудными. Для аксиальных и планарных 3–ЗН изучались свойства многогранника ограничений, которые могут быть использованы для построения алгоритмов локального поиска и частичного перебора типа метода ветвей и границ [5, 11, 12, 21, 23]. В [17, 18] представлен асимптотически точный подход к построению алгоритмов решения аксиальных МЗН большой размерности на случайных входах. Меньше результатов получено для планарной 3–ЗН. Попытка построения приближённого асимптотически точного алгоритма решения планарной 3–ЗН на случайных входах была предпринята М. К. Кравцовым и А.П. Крачковским [6]. Однако приведённые там обоснования основаны на ошибочном утверждении (лемме 1) из их же работы [7] (см. замечание 3 из [3], с. 14–15). Это, к сожалению, влечёт ошибочность и некоторых других работ этих авторов.

В настоящей статье рассматривается m-слойная трёхиндексная планарная задача о назначениях, которая является модификацией классической трёхиндексной планарной задачи о назначениях. Эта задача NP-трудна при $m \geqslant 2$ [14, 15].

В [20] была поставлена задача об m бродячих торговцах (m-peripatetic salesman problem, или m-PSP), которая является m-слойной трёхиндексной планарной задачей на одноциклических подстановках в случае, когда все слои трёхиндексной матрицы представлены одной и той же двухиндексной матрицей. Для решения задачи 2-PSP в [1, 2, 10] представлены приближённые алгоритмы с кубической временно́й сложностью и оценками точности решения 9/4 (в случае одинаковых матриц на обоих слоях) и 12/5 (в случае разных матриц). Оценка 9/4 для 2-PSP была передоказана в [13].

В [18] рассматривалась m-слойная планарная задача в случае, когда входные данные (элементы матрицы размера $m \times n \times n$) являются случайными независимыми величинами, принимающими значения из отрезка $[a_n, b_n]$, где $b_n > a_n > 0$, с одинаковой функцией распределения. В

ней был предложен приближённый алгоритм с временно́й сложностью $O(mn^2 + m^{7/2})$ и анонсированы условия его асимптотической точности для случая равномерного распределения элементов матрицы и $m \leqslant \ln n$.

В настоящей статье проведён вероятностный анализ алгоритма из [18], который работает с использованием принципа выбора минимального элемента в очередной строке матрицы, а также процедуры достройки частичного назначения до полного. Результатом анализа является обоснование условий асимптотической точности алгоритма для существенно более широкой области входных данных: $m = \Theta(n^{1-\theta})$ и $b_n/a_n = o(n^\theta)$ при любой константе θ, $0 < \theta < 1$ (как для равномерного распределения, так и в случае распределений минорируемого типа).

1. Постановка задачи

Трёхиндексная планарная задача о назначениях может быть сформулирована в виде следующей задачи линейного целочисленного программирования:

$$\text{минимизировать } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ijk}x_{ijk}$$

при условиях:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} = 1, \qquad j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,n,\\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 1, \qquad i = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,n,\\
&\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1, \qquad i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,n,\\
&x_{ijk} \in \{0,1\}, \qquad i,j,k = 1,\dots,n,
\end{aligned}$$

или в алгебраической форме:

$$\text{минимизировать } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij\pi^{(i)}(j)}$$

при условиях:

$$\begin{aligned}
&\pi^{(i)}(k) \neq \pi^{(s)}(k),\ 1 \leqslant i,s \leqslant n,\ i \neq s,\ 1 \leqslant k \leqslant n,\\
&\pi^{(i)} \in S_n,\ 1 \leqslant i \leqslant n,
\end{aligned}$$

где S_n — симметрическая группа подстановок порядка n.

Трёхиндексная планарная задача о назначении является NP-трудной [14, 15].

Трёхиндексная m–слойная планарная задача о назначениях формулируется в виде задачи линейного целочисленного программирования следующим образом:

$$\text{минимизировать } \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ijk}x_{ijk}$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \leqslant 1, \quad j=1,\ldots,n,\ k=1,\ldots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 1, \quad i=1,\ldots,n,\ k=1,\ldots,n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1, \quad i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n,$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \quad i,j,k=1,\ldots,n,$$

Алгебраическая форма этой задачи такова:

$$\text{минимизировать } \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij\pi^{(i)}(j)} \tag{1}$$

при условиях:

$$\pi^{(i)}(k) \neq \pi^{(s)}(k),\ 1 \leqslant i,s \leqslant m,\ i \neq s, 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{2}$$

$$\pi^{(i)} \in S_n,\ 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{3}$$

В обеих формулировках m — целое, $2 \leqslant m < n$, c_{ijk} — заданные вещественные числа, $1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j,k \leqslant n$.

Таким образом, под слоем понимается подматрица исходных данных размером $n \times n$, которая получается при фиксированном значении индекса i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Заметим, что m–слойная планарная задача о назначениях (1)–(3) является NP-трудной, начиная с числа слоёв, равного двум [15].

2. Алгоритм для приближённого решения m–слойной планарной задачи о назначениях

Для решения задачи (1)–(3) при числе слоёв $m < n/2$ предлагается алгоритм A_1. Этот алгоритм последовательно обрабатывает слои матрицы (c_{ijk}). В слое с номером s, $1 \leqslant s \leqslant m$, решение строится по принципу выбора минимального элемента в строке с учётом наличия запрещённых элементов, выбранных на предыдущих слоях. При этом в $2(s-1)$ последних строках слоя решение достраивается из соображений допустимости.

Алгоритм A_1.

Этап s, $1 \leqslant s \leqslant m$.

Из элементов исходной матрицы (c_{ijk}) формируется подматрица (d_{jk}) размера $n \times n$, где $d_{jk} = c_{sjk}$, $1 \leqslant j, k \leqslant n$. При этом если элемент c_{sjk} был запрещён, то запрещается и элемент d_{jk}.

Таким образом, как в каждой строке, так и в каждом столбце полученной матрицы имеется в точности $s-1$ запрещённых элементов.

Этап s состоит из выполнения процедур 1 и 2.

Процедура 1.

Шаг j, $1 \leqslant j \leqslant n - 2(s-1)$. Пусть k_j — номер столбца минимального среди незапрещённых элементов строки j матрицы (d_{jk}). Полагается $\pi^{(s)}(j) := k_j$, запрещаются элементы $d_{j'k_j}$ при $j' = j+1, ..., n$ и элементы $c_{s'jk_j}$ при $s' = s+1, ..., m$.

Таким образом, на каждом шаге j в строке с номером j имеется в точности $s-1$ элементов, запрещённых на предыдущих этапах, и выполнение $j-1$ шагов на текущем этапе запрещает ещё не более $j-1$ элементов.

Процедура 2.

Рассмотрим двудольный граф $G = (V_1, V_2, E)$, где $V_1 = \{n - 2(s-1)+1, ..., n\}$, $V_2 = \{1, ..., n\} \setminus \{k_1, ..., k_{n-2(s-1)}\}$, $(v_1, v_2) \in E \ \leftrightarrow$ элемент $d_{v_1 v_2}$ не запрещён в матрице (d_{jk}). В этом графе с помощью алгоритма Хопкрофта-Карпа [19] находится совершенное паросочетание. Подстановка $\pi^{(s)}$ доопределяется согласно полученному паросочетанию.

После выполнения m этапов алгоритма получено приближённое решение

$$f_A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij\pi^{(i)}(j)}.$$

Пример работы алгоритма на одном из слоёв проиллюстрирован ниже.

	1	k_6	k_1	k_5	k_3	k_2	7	k_4	9	10
		×	○				×			
			–	×		○		×		
			×	×	○	–				
			–		×	×		○		
	×		–	○	–	–	×	–		
		○	×	–	–	–		–		×
7		×	–	–	×	–		–	△	
8	△	–	–	–	–	–		×	×	
9	×	–	–	–	–	×		–		△
10		–	–	–	–	–	△	–	×	×

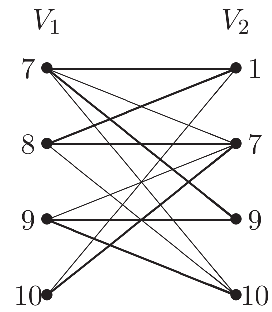
× — элементы, запрещённые на предыдущих этапах

○ — элементы, выбранные в текущей строке

– — элементы, запрещённые на текущем этапе

△ — элементы, выбранные в процедуре 2

граф G



ребра, вошедшие в паросочетание, построенное с помощью алгоритма Хопкрофта-Карпа, показаны толстыми линиями

Здесь показан третий слой матрицы размера $3 \times 10 \times 10$ после завершения работы третьего этапа, а также граф G, построенный в процедуре 2 этого этапа, с найденным в нём совершенным паросочетанием.

3. Корректность и временна́я сложность алгоритма

Заметим, что если на каждом этапе s в процедуре 2 совершенное паросочетание в графе G будет найдено, то достраиваемое с его помощью назначение $\pi^{(s)}$ и решение, построенное алгоритмом A_1, будут допустимыми.

Утверждение 1. *На каждом этапе в графе G, построенном в процедуре 2, существует совершенное паросочетание.*

Для доказательства утверждения воспользуемся следующим следствием теоремы 7.5.7 из [8, с. 154].

Следствие 1. *Если в двудольном графе $G = (V_1, V_2, E)$, $| V_1 |=| V_2 |= n$, каждая вершина $v \in V_1$ смежна не менее чем с $n/2$ вершинами из V_2 и наоборот, то в G существует совершенное паросочетание.*

Справедливость утверждения 1 следует из того, что в каждой доле G имеется ровно $2(s-1)$ вершин, а степень любой вершины в G не менее $s-1$.

Временна́я сложность алгоритма A_1 определяется временем работы процедур 1 и 2. Временна́я сложность процедуры 1 не превосходит $O(n^2)$, а временна́я сложность процедуры 2 не превосходит $O(m^{5/2})$ [19]. Во

время работы алгоритма A_1 процедуры 1 и 2 выполняются m раз. Таким образом, временна́я сложность алгоритма A_1 не превосходит $O(m(n^2 + m^{5/2})) = O(mn^2 + m^{7/2})$.

4. Вероятностный анализ алгоритма

4.1. Случайные входы

Перейдём к вероятностному анализу точности алгоритма A_1 для решения задачи на случайных входах, определяемых множеством $M_{m,n}$ матриц (c_{ijk}) размера $m \times n \times n$, где элементы c_{ijk}, $1 \leqslant j, k \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant m$, — независимые случайные величины, распределённые на отрезке $[a_n, b_n]$, $b_n > a_n > 0$, с одинаковой функцией распределения. Далее такие случайные входы будем называть $M_{m,n}$-входами и обозначать их через x.

Через $f_A(x)$ и $f(x)$ обозначим соответственно приближённое (полученное посредством алгоритма A) и оптимальное значение целевой функции задачи на входе x.

Будем говорить, что алгоритм A имеет оценки $(\varepsilon_A, \delta_A)$ на $M_{m,n}$-входах рассматриваемой задачи, если

$$\Pr\Big\{ f_A(x) > (1 + \varepsilon_A) f(x) \Big\} \leqslant \delta_A,$$

где ε_A есть *оценка относительной погрешности* решения, получаемого алгоритмом A, δ_A — *вероятность несрабатывания* алгоритма A, т. е. величина δ_A равна доле случаев, когда алгоритм не гарантирует погрешность, не превосходящую ε_A. Представляется интересным поведение оценок δ_A и ε_A при увеличении размерности задачи.

Алгоритм A называется *асимптотически точным* на классе рассматриваемых задач, если существуют оценки ε_A и δ_A, стремящиеся к нулю с ростом размерности задачи.

4.2. Общий вероятностный анализ алгоритма A_1

В дальнейшем для удобства перейдём к рассмотрению случайных величин, принимающих значения из отрезка $[0, 1]$. Пусть $\xi_{sj} = \pi^{(s)}(j)$ — элемент, выбранный в строке j матрицы d_{jk} на этапе s; $\xi'_{sj} = (\xi_{sj} - a_n)/(b_n - a_n)$; $c'_{ijk} = (c_{ijk} - a_n)/(b_n - a_n)$ — независимые случайные величины, одинаково распределённые на отрезке $[0, 1]$.

С учётом неравенства $f(x) \geqslant mna_n$ имеем

$$\Pr\Big\{ f_A(x) > (1 + \varepsilon_{A_1}) f(x) \Big\} = \Pr\Big\{ \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi_{sj} > (1 + \varepsilon_{A_1}) f(x) \Big\}$$

$$= \Pr\left\{ \frac{\sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\xi_{sj} - a_n)}{b_n - a_n} > \frac{(1 + \varepsilon_{A_1}) f(x) - nma_n}{b_n - a_n} \right\}$$

$$\leqslant \Pr\Big\{\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\xi'_{sj} > \varepsilon_{A_1} mn\frac{a_n}{b_n}\Big\}.$$

Применив очевидное неравенство $c_{\pi^{(s)}(j)} \leqslant b_n$ для элементов подстановок $\pi^{(s)}(j)$, выбранных с помощью алгоритма Хопкрофта-Карпа (или $\xi'_{sj} \leqslant 1$ при $j > n-2(s-1), s = 1, ..., m$), получаем

$$\Pr\Big\{\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\xi'_{sj} > \varepsilon_{A_1} mn\frac{a_n}{b_n}\Big\} \leqslant \Pr\Big\{\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-2(s-1)}\xi'_{sj} > \varepsilon_{A_1} mn\frac{a_n}{b_n} - m(m-1)\Big\}.$$

Отметим, что с использованием свойств алгоритма и независимости элементов входной матрицы может быть доказано следующее

Утверждение 2. *Случайные величины ξ'_{sj}, $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n-2(s-1)$, независимы.*

Далее заметим, что ξ'_{sj} есть минимум из не менее чем $n-j-s+2$ элементов матрицы (c'_{ijk}). Рассмотрим набор независимых случайных величин η_{sj}, $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n-2(s-1)$, где η_{sj} есть минимум в точности из $n-j-s+2$ элементов матрицы (c'_{ijk}). Поэтому предыдущее неравенство можно продолжить следующим образом

$$\Pr\Big\{\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-2(s-1)}\xi'_{sj} > \varepsilon_{A_1} mn\frac{a_n}{b_n} - m(m-1)\Big\}$$
$$\leqslant \Pr\Big\{\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-2(s-1)}\eta_{sj} > \varepsilon_{A_1} mn\frac{a_n}{b_n} - m(m-1)\Big\}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение

Лемма 1. *В случае произвольных $M_{m,n}$-входов верна следующая оценка*

$$\Pr\Big\{f_A(x) > (1+\varepsilon_{A_1})f(x)\Big\} \leqslant \Pr\Big\{\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-2(s-1)}\eta_{sj} > \varepsilon_{A_1} mn\frac{a_n}{b_n} - m(m-1)\Big\}.$$

Как будет показано ниже, лемма 1 позволит перенести оценки качества предложенного алгоритма с некоторого фиксированного распределения на целый класс распределений.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится

Теорема 1[9]. *Пусть $\eta_1, ..., \eta_n$ — независимые случайные величины и*

$S = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k$. *Если для некоторых положительных постоянных* $g_1, ..., g_n$, T *имеет место неравенство* $Me^{t\eta_k} \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}\, g_k t^2\right)$ *при любом* t, $0 \leqslant t \leqslant T$, *то*

$$\Pr\{S > x\} \leqslant \begin{cases} \exp(-\frac{1}{2}\, x^2/G), & \text{если } \ 0 \leqslant x \leqslant GT, \\ \exp(-\frac{1}{2}\, Tx), & \text{если } \ x \geqslant GT, \end{cases}$$

где $G = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$.

От величин η_{sj} легко перейти к величинам $\eta_{sj} - M\eta_{sj}$. Если последние удовлетворяют условиям теоремы 1, то нахождение оценок качества алгоритма сведётся к нахождению оценок для сумм $\sum\limits_{s=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n-2(s-1)} M\eta_{sj}$ и $\sum\limits_{s=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n-2(s-1)} g_{n-s-j+2}$. Справедлива

Лемма 2. *Пусть случайные величины* $\eta_{sj} - M\eta_{sj}$ $(s = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n-2(s-1))$ *удовлетворяют условиям теоремы 1 с постоянными* g_{sj}, T. *Тогда*

$$\varepsilon_{A_1} = \frac{m(m-1) + \overline{M} + T\overline{G}}{mn}\ \frac{b_n}{a_n}, \quad \delta_{A_1} = e^{-T\overline{G}/2},$$

где $\overline{M}$ *и* $\overline{G}$ *— верхние оценки для сумм*

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-2(s-1)} M\eta_{sj} \leqslant \overline{M}, \quad \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-2(s-1)} g_{n-s-j+2} \leqslant \overline{G}.$$

Доказательство. Продолжим неравенство из леммы 1

$$\Pr\{f_A(x) > (1+\varepsilon_{A_1}) f(x)\} \leqslant \Pr\Big\{\sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-2(s-1)} \eta_{sj} > \varepsilon_{A_1} mn \frac{a_n}{b_n} - m(m-1)\Big\}$$

$$\leqslant \Pr\Big\{\sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-2(s-1)} (\eta_{sj} - M\eta_{sj}) > \varepsilon_{A_1} mn \frac{a_n}{b_n} - m(m-1) - \overline{M}\Big\} \leqslant \delta_{A_1}.$$

Здесь последнее неравенство получено подстановкой ε_{A_1} и применением теоремы 1. Лемма 2 доказана.

4.3. Получение оценок в случае равномерного распределения

В этом разделе мы полагаем, что случайные величины c_{ijk} равномерно распределены на отрезке $[a_n, b_n]$. В этом случае, очевидно, величины c'_{ijk} равномерно распределены на отрезке $[0,1]$.

Подробное доказательство следующей леммы приведено в [16], здесь мы отметим лишь основные этапы.

Лемма 3. *Пусть $\eta_k, 1 \leqslant k \leqslant n$ — независимые случайные величины, каждая из которых равна минимальному из k элементов матрицы (c'_{ijk}), где c'_{ijk} — независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0,1]$. Тогда при любых t и k, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 3,\ 1 \leqslant k \leqslant n$, имеет место неравенство*

$$Me^{t(\eta_k - M\eta_k)} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}g_k t^2\right\},$$

где

$$g_k = \begin{cases} 1/12 & \text{при } k = 1\ , \\ 11/36 & \text{при } k = 2\ , \\ 11/(5(k+1)^2) & \text{при } 3 \leqslant k \leqslant n\ . \end{cases}$$

Основные этапы. Имеет место следующая реккурентность $Me^{t\eta_{k+1}} = \dfrac{k+1}{t}(Me^{t\eta_k} - 1)$. С помощью неё получаем следующее представление математических ожиданий:

$$Me^{t\eta_k} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{\prod\limits_{m=1}^{i}(k+1+m)}\ .$$

Эти представления и используются для получения указанных оценок.

Лемма 3 утверждает, что при равномерном распределении элементов входной матрицы величины $\eta_{sj} - M\eta_{sj}$ удовлетворяют условиям теоремы Петрова с указанными значениями постоянных. Теперь можно заняться поиском оценок из леммы 2.

Лемма 4. *В случае $M_{m,n}$-входов с равномерным распределением справедливо неравенство*

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-2(s-1)} M\eta_{sj} \leqslant 2n\ln\left(\frac{n}{n-m}\right) + m\ln\left(\frac{n}{m}\right). \qquad (4)$$

Доказательство. При равномерном распределении входов имеем $M\eta_{sj} = \dfrac{1}{n-s-j+3}$. Поэтому

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-2(s-1)} M\eta_{sj} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-2(s-1)} \frac{1}{n-s-j+3} \sum_{k=1}^{m}\frac{k}{n+2-k}$$
$$+ \sum_{k=m+1}^{n-m}\frac{m}{n+2-k} + \sum_{k=n-m+1}^{n}\frac{n-k+1}{n+2-k}$$
$$\leqslant \int\limits_{1}^{m+1}\frac{ydy}{n+2-y} + \int\limits_{m+1}^{n-m+1}\frac{mdy}{n+2-y} + m - \int\limits_{n-m}^{n}\frac{dy}{n+2-y}$$
$$\leqslant (n+2)\ln\left(\frac{n+1}{n-m+1}\right) - m + m\ln\left(\frac{n-m+1}{m+1}\right) + m - \ln\left(\frac{m+2}{2}\right)$$
$$\leqslant \text{ (при достаточно больших } n \text{ и } m \text{ с учётом } m < n/2)$$
$$2n\ln\left(\frac{n}{n-m}\right) + m\ln\left(\frac{n-m}{m}\right) - \ln\left(\frac{m+2}{2}\right)$$
$$\leqslant 2n\ln\left(\frac{n}{n-m}\right) + m\ln\left(\frac{n}{m}\right).$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *В случае $M_{m,n}$-входов с равномерным распределением справедливо неравенство*

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-2(s-1)} g_{n-s-j+2} \leqslant \frac{11}{5}\ln m + \frac{917}{180}. \tag{5}$$

Доказательство. Левую часть (5) представим в виде

$$\sum_{k=1}^{m} kg_{n+1-k} + \sum_{k=m+1}^{n-m} mg_{n+1-k} + \sum_{k=n-m+1}^{n}(n-k+1)g_{n+1-k}$$
$$= \text{(подставляем значения } g_i \text{ из леммы 2)}$$
$$\frac{11}{5}\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{(n+2-k)^2} + \frac{11}{5}m\sum_{k=m+1}^{n-m}\frac{1}{(n+2-k)^2} + \frac{11}{5}\sum_{k=n-m+1}^{n-2}\frac{n-k+1}{(n+2-k)^2}$$

$$+2\frac{11}{36}+\frac{1}{12}\leqslant\frac{11}{5}\int\limits_{1}^{m+1}\frac{ydy}{(n+2-y)^2}+\frac{11}{5}m\int\limits_{m+1}^{n-m+1}\frac{dy}{(n+2-y)^2}$$

$$+\frac{11}{5}\int\limits_{n-m+1}^{n-1}\frac{dy}{n+2-y}=-\frac{11}{5}\int\limits_{n-m}^{n-2}\frac{dy}{(n+2-y)^2}+2\frac{11}{36}$$

$$+\frac{1}{12}\frac{11}{5}\left(\frac{m(n+2)}{(n+1)(n-m+1)}-\ln\left(\frac{n+1}{n-m+1}\right)\right)$$

$$+\frac{11}{5}m\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n-m+1}\right)+\frac{11}{5}\left(\ln\frac{m+1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{m+2}\right)+2\frac{11}{36}+\frac{1}{12}$$

$$\leqslant\frac{11}{5}\left(\frac{m}{n-m}-\ln\left(\frac{n}{n-m}\right)+1\right)+\frac{11}{5}\left(2-\frac{m}{n-m}\right)+\frac{11}{5}(\ln m-1)$$

$$+2\frac{11}{36}+\frac{1}{12}=\frac{11}{5}\left(2+\ln m-\ln\left(\frac{n}{n-m}\right)\right)+2\frac{11}{36}+\frac{1}{12}\leqslant\frac{11}{5}\ln m+\frac{917}{180}.$$

Лемма 5 доказана.

Заметим, что оценки (4) и (5) являются достаточно точными. Однако для улучшения ε_{A_1} и δ_{A_1}, возможно, будут более удобны ослабленные оценки $\overline{G}$ и $\overline{M}$.

Алгоритм A_1 является асимптотически точным при наложении ограничений:

(а) на отрезок $[a_n, b_n]$, который является областью значений коэфициентов входной матрицы;

(б) на число слоёв m.

В приведённой ниже теореме 2 более слабы ограничения типа (а). Соотношения, аналогичные этому случаю, являются достаточными условиями асимптотической точности некоторых других алгоритмов. В теореме 3 ввиду усиления ограничений первого типа удаётся ослабить ограничения типа (б), что "приближает" трёхиндексную m-слойную планарную задачу о назначении к классической.

Теорема 2. *Если* $b_n/a_n=\dfrac{n}{\varphi(n)\ln n}$, $m=\Theta(\ln n)$, *где* $\varphi(n)\to\infty$ *и* $\varphi(n)=o\left(\frac{n}{\ln n}\right)$, *то алгоритм* A_1 *является асимптотически точным с оценками качества* $\varepsilon_{A_1}=O\left(\dfrac{1}{\varphi(n)}\right)$, $\delta_{A_1}=n^{-\frac{3}{2}\ln n}$.

Доказательство. Воспользуемся оценками (4) и (5). В условиях теоремы при $n\to\infty$ верна следующая эквивалентность

$$2n\ln\left(\frac{n}{n-m}\right)\sim 2n\frac{m}{n-m}\sim 2m.$$

Поэтому

$$2n\ln\left(\frac{n}{n-m}\right)+m\ln\left(\frac{n}{m}\right)\leqslant 3m+m\ln n\leqslant 2m\ln n:=\overline{M},$$
$$\frac{11}{5}\ln m+\frac{917}{180}\leqslant \ln^2 n:=\overline{G}.$$

Теперь согласно лемме 3 имеем

$$\varepsilon_{A_1}=\frac{m(m-1)+2m\ln n+3\ln^2 n}{m\ln n}\frac{1}{\varphi(n)}=O\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right),$$
$$\delta_{A_1}=e^{-\frac{3}{2}\ln^2 n}=n^{-\frac{3}{2}\ln n}.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если* $b_n/a_n=\dfrac{n^\theta}{\varphi(n)}$, $m=\Theta\left(n^{1-\theta}\right)$, *где* $\varphi(n)\to\infty$, $\varphi(n)=o(n^\theta)$, θ *— некоторая постоянная такая, что,* $0<\theta<1$, *то алгоритм* A_1 *является асимптотически точным с оценками качества*

$$\varepsilon_{A_1}=O\Big(\frac{1}{\varphi(n)}\Big),\quad \delta_{A_1}=\exp\Big(-\frac{3}{2}n^{2(1-\theta)}\Big).$$

Доказательство. Воспользуемся оценками (4) и (5). При $n\to\infty$ верна эквивалентность

$$2n\ln\left(\frac{n}{n-m}\right)\sim 2n\frac{m}{n-m}\sim 2n^{1-\theta}.$$

Поэтому

$$2n\ln\left(\frac{n}{n-m}\right)+m\ln\left(\frac{n}{m}\right)\leqslant 3n^{1-\theta}+\theta n^{1-\theta}\ln n\leqslant n^{1-\theta}\ln n:=\overline{M},$$
$$\frac{11}{5}\ln m+\frac{917}{180}\leqslant n^{2(1-\theta)}:=\overline{G}.$$

Воспользовавшись леммой 3, получим

$$\varepsilon_{A_1}=\frac{n^{2(1-\theta)}+n^{1-\theta}\ln n+3n^{2(1-\theta)}}{n^{2-\theta}}\frac{n^\theta}{\varphi(n)}=\left(4+n^{\theta-1}\ln n\right)\frac{1}{\varphi(n)}$$
$$=O\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right),$$

$$\delta_{A_1} = \exp\Big(-\frac{3}{2}n^{2(1-\theta)}\Big).$$

Теорема 3 доказана.

Оценки ε_{A_1} и δ_{A_1} из теорем 2 и 3 верны при достаточно больших значениях n.

Постоянная $3/2$, входящая в оценку δ_{A_1}, может быть увеличена за счёт незначительного ухудшения ε_{A_1}.

4.4. Получение оценок для минорируемых распределений

В этом разделе будет показано, что оценки качества алгоритма A_1, верные для одного исходного распределения $M_{m,n}$-входов, можно перенести на все распределения, минорируемые исходным.

Утверждение 3. *Пусть $\xi_1, ..., \xi_k$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения $F(x)$, $\hat{F}(x)$ — функция распределения случайной величины $\xi = \min\limits_{i=1,\dots,k}(\xi_i)$, $\eta_1, \dots, \eta_k$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения $G(x)$, $\hat{G}(x)$ — функция распределения случайной величины $\eta = \min\limits_{i=1\dots k}(\eta_i)$. Тогда при любом x*

$$(F(x) \leqslant G(x)) \Rightarrow (\hat{F}(x) \leqslant \hat{G}(x)).$$

Справедливость утверждения 3 непосредственно следует из равенств $\hat{F}(x) = 1 - (1 - F(x))^k$ и $\hat{G}(x) = 1 - (1 - G(x))^k$.

Утверждение 4. *Пусть $P_\xi, P_\eta, P_\zeta, P_\chi$ — функции распределения случайных величин ξ, η, ζ, χ соответственно, причем ξ и ζ независимы, η и χ независимы. Тогда*

$$(\forall x\ P_\xi(x) \leqslant P_\eta(x)) \wedge (\forall y\ P_\zeta(y) \leqslant P_\chi(y)) \Rightarrow (\forall z\ P_{\xi+\zeta}(z) \leqslant P_{\eta+\chi}(z)).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно выразить функции распределения сумм через функции распределения слагаемых следующим образом

$$P_{\xi+\zeta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_\xi(x-y)dP_\zeta(y) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_\eta(x-y)dP_\zeta(y)$$

$$= P_{\eta+\zeta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_\zeta(x-y)dP_\eta(y) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_\chi(x-y)dP_\eta(y) = P_{\eta+\chi}(x).$$

Теорема 4. *Пусть функция распределения $\mathbf{F}(x)$ случайной величины c'_{ijk} такова, что $\mathbf{F}(x) \geqslant \mathbf{P}(x)$. Тогда для алгоритма A_1 справедливы те же оценки качества $(\varepsilon_{A_1}, \delta_{A_1})$, что и в случае входов с функцией распределения $\mathbf{P}(x)$.*

Доказательство. Рассмотрим независимые случайные величины η_{sj}^P, равные минимуму из $n-j-s+2$ элементов матрицы (c'_{ijk}) в случае, когда функция распределения c'_{ijk} есть $\mathbf{P}(x)$, и аналогичные им независимые случайные величины η_{sj}^F в случае функции распределения $\mathbf{F}(x)$. Согласно лемме 1 имеем

$$\begin{aligned}\Pr\Big\{f_A(x) > (1+\varepsilon_{A_1})f(x)\Big\} & \\ \leqslant \Pr\Big\{\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-2(s-1)} \eta_{sj}^F > \varepsilon_{A_1} mn\frac{a_n}{b_n} - m(m-1)\Big\} & \\ = 1 - \Pr\Big\{\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-2(s-1)} \eta_{sj}^F \leqslant \varepsilon_{A_1} mn\frac{a_n}{b_n} - m(m-1)\Big\}&.\end{aligned}$$

Таким образом, достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$\begin{aligned}\Pr\Big\{\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-2(s-1)} \eta_{sj}^P \leqslant \varepsilon_{A_1} mn\frac{a_n}{b_n} - m(m-1)\Big\} & \\ \leqslant \Pr\Big\{\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-2(s-1)} \eta_{sj}^F \leqslant \varepsilon_{A_1} mn\frac{a_n}{b_n} - m(m-1)\Big\}&,\end{aligned}$$

которое доказывается при помощи индукции и утверждений 3 и 4. Теорема 4 доказана.

Следствие 2. *Для всех распределений $M_{m,n}$-входов, минорируемых равномерным распределением, верны теоремы 2 и 3.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агеев А. А., Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Коркишко Н. М.** Алгоритмы с константными оценками точности для отыскания двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов экстремального веса // Всероссийская конференция "Проблемы оптимизации и экономические приложения". Материалы конференции (Омск, 1–5 июля 2003 г.). Омск: Издательство Наследие, 2003. С. 9–12.

2. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Коркишко Н. М.** Приближённые алгоритмы для нахождения двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2004. Т. 11, № 1. С. 11–25.
3. **Вознюк И. П., Гимади Э. Х., Филатов М. Ю.** Асимптотически точный алгоритм для решения задачи размещения с ограниченными объёмами производства // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8, № 2. С. 3–16.
4. **Гимади Э. Х.** Асимптотически точный подход к решению многоиндексной аксиальной задачи о назначении // Труды XI Межд. Байкальской школы-семинара. Пленарные доклады. Иркутск, 1998. С. 62–65.
5. **Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. М.** Многогранники, графы, оптимизация. М: Наука, 1981.
6. **Кравцов М. К., Крачковский А. П.** О полиномиальном алгоритме нахождения асимптотически оптимального решения трёхиндексной планарной проблемы выбора // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41, № 2. С. 342–345.
7. **Кравцов М. К., Крачковский А. П.** Асимптотическая оптимальность плана транспортной задачи, построенного методом минимального элемента // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 1. С. 144–151.
8. **Оре О.** Теория графов. М: Наука, 1980.
9. **Петров В. В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
10. **Baburin A. Y., Gimadi E. Kh., Korkishko N. M.** Algorithms with performance guarantees for a metric problem of finding two edge-disjoint Hamiltonian circuits of minimum total weight // Operation Research Proceedings 2003. Berlin: Springer, 2004. P. 316–323.
11. **Balas E., Saltzman M. J.** Facets of the three-index assignment polytope // Discrete Appl. Math. 1989. V. 23, N 3. P. 201–229.
12. **Balas E., Saltzman M. J.** An algorithm for the three-index assignment problem // Oper. Res. 1991. V. 39, N 1. P. 150–161.
13. **Croce F. D., Pashos V. Th., Calvo R. W.** Approximating the 2-peripatetic salesman problem // 7th Workshop on models and algorithms for planning and scheduling problems. MAPS 2005 (Siena, Italy, June 6–10, 2005). P. 114–116.
14. **Fon-Der-Flaass D. G.** Array of distinct representatives — a very simple NP-complete problem // Discrete Math. 1997. V. 171, N 1–3. P. 295–298.
15. **Frieze A. M.** Complexity of a 3-dimensional assignment problem // European J. Oper. Res. 1983. V 13, N 2. P. 161–164.
16. **Gimadi E. Kh.** On some probability inequalities in some discrete optimization problems. // Operation Research Proceedings 2005, to appear in 2006.

17. Gimadi E. Kh., Kairan N. M. Multi-index assignment problem: an asymptotically optimal approach // Proc. 8th IEEE Intern. Conf. on emerging technologies and factory automation (Antibes - Juan les Pins, France, 2001). NY: IEEE, 2001. P. 707–710.

18. Gimadi E. Kh., Korkishko N. M. On some modifications of three index planar assignment problem // Discrete optimization methods in production and logistics. The second int. workshop (Omsk, July 20-27, 2004). Proc. DOM'2004, Omsk, 2004. P. 161-165.

19. Hopcroft J. E., Karp R. M. An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs // SIAM J. Comput. 1973. V. 2, N 4. P. 225–231.

20. Krarup J. The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications (Proc. NATO Advanced Study Inst., Versailles, 1974). Dordrecht: Reidel, 1975. P. 173–178.

21. Magos D. Tabu search for the planar three-index assignment problem // J. Global Optim., 1996. V. 8, N 1. P. 35–48.

22. Spieksma F. C. R. Multi index assignment problems: complexity, approximation, applications // Nonlinear assignment problems, algorithms and applications. 2000. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 1–12.

23. Vlach M. Branch and bound method for the three-index assignment problem // Ekonomicko-Matematicky Obzor. 1967. V. 3. P. 181–191.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.

Статья поступила
16 ноября 2005 г.