ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2006. Серия 2. Том 13, № 1. 77–94

УДК 519.852

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ФУРЬЕ–МОЦКИНА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИИ И ЕЁ ЗВЁЗДНОЙ РАЗВЁРТКИ*)

В. Н. Шевченко, Д. В. Груздев

Вводится понятие звёздной развёртки симплициального комплекса и предлагается алгоритм одновременного построения триангуляции и звёздной развёртки симплициального комплекса её граней для точечной конфигурации в общем положении.

Введение

Рассмотрим выпуклый многогранник M размерности $\dim(M) = d$, который является выпуклой оболочкой конечного множества точек и далее называется d-мерным *политопом*. Через $\mathrm{int}(M)$ обозначим множество внутренних точек политопа M, а через $\Gamma_i(M)$ — множество его i-мерных граней, $i = -1, \dots, d$. Пустое множество $\varnothing$ считается гранью политопа M размерности -1. Таким образом, $\Gamma_{-1}(M) = \{\varnothing\}$ и $\Gamma_d(M) = \{M\}$. Положим $\Gamma(M) = \bigcup\limits_{i=-1}^{d} \Gamma_i(M)$. Грани из $\Gamma(M) \backslash \{M\}$ называются *собственными гранями* политопа M, а $(d-1)$-мерные грани политопа M называются его *гипергранями*. Если $|\Gamma_0(M)| = d + 1$, то M называется *d-мерным симплексом*. Таким образом, d-мерный симплекс есть выпуклая оболочка $d + 1$ аффинно независимых точек. Политоп M называется *симплициальным*, если все его собственные грани являются симплексами. Заметим, что для симплициальности политопа достаточно потребовать, чтобы его гиперграни являлись симплексами.

Выпуклую оболочку множества точек A обозначим через $[A]$, а его аффинную оболочку — через $\mathrm{aff}(A)$. Конечное множество точек $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ из $\mathbb{R}^d$ называется *точечной конфигурацией*. Точечная конфигурация $A \subset \mathbb{R}^d$, для которой выпуклая оболочка $[A]$ является

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00552) и Министерства образования РФ (СПбКЦ, грант А03–2.8–475).

d-мерным политопом, называется *d-мерной* точечной конфигурацией. Говорят, что точки $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathbb{R}^d$ находятся *в общем положении*, если любое их подсемейство $a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}$, $p \leqslant d+1$, аффинно независимо. Точечная конфигурация $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ из $\mathbb{R}^d$, точки $a_1, \ldots, a_n$ которой находятся в общем положении, называется точечной конфигурацией *в общем положении*. Если порядок точек в множестве A зафиксирован, то последовательность точек будем обозначать через $\widehat{A} = (a_1, \ldots, a_n)$. Размерность d при получении оценок временно́й сложности алгоритмов будем считать константой.

Фундаментальный факт теории линейных неравенств — теорема Минковского–Вейля — утверждает, что множество $M \subset \mathbb{R}^d$ является политопом тогда и только тогда, когда M совпадает с множеством решений некоторой конечной системы линейных неравенств и ограничено, причём если $\dim(M) = d$, то такой системой является система неравенств, соответствующая гиперграням политопа M. Для перехода от одного описания политопа к другому в разное время было предложено несколько алгоритмов. Одним из них и, по всей вероятности, первым по времени создания является алгоритм Минковского (см., например, [7]), требующий для начала работы всего входного описания политопа и непосредственно следующий из теоремы Минковского–Вейля. Другим алгоритмом является алгоритм Фурье–Моцкина, основная идея которого, восходящая к Фурье и развитая Моцкиным, выражена в методе двойного описания [4, 12] (см. также [7]) и методе «под-над» [6, 13]. Пусть d-мерный политоп M задан выпуклой оболочкой конечного множества точек $A = \{a_1, \ldots, a_N\} \subset \mathbb{R}^d$. Алгоритм Минковского для каждого аффинно независимого d-элементного подмножества $A' \subseteq A$, по одну сторону аффинной оболочки которого располагаются все точки множества A, получает неравенство, задающее соответствующее полупространство. Полученная система неравенств является выходом алгоритма Минковского, который имеет временну́ю сложность $O(N^d)$. В то же время алгоритм Фурье–Моцкина, являясь итерационным, на каждой итерации получает очередную точку множества A и строит систему неравенств, описывающую выпуклую оболочку полученного множества точек, что позволяет оценить временну́ю сложность его модификации (метод «под-над») величиной $O(N^{\lfloor d/2 \rfloor + 1})$.

Говорят, что симплексы, составляющие некоторое конечное множество, расположены *правильно* [5], если пересечение любых двух симплексов является их общей гранью (возможно, пустой).

Триангуляцией d-мерной точечной конфигурации $A \subset \mathbb{R}^d$ называется такое множество $T(A)$ правильно расположенных d-мерных симплексов с вершинами из A, что их объединение есть политоп $[A]$. Грани симплексов триангуляции называются *гранями* триангуляции. Тогда при $i = -1, 0, \ldots, d$ множество $\Gamma_i(T(A)) = \bigcup\limits_{\tau=1}^{t} \Gamma_i(S_\tau)$ является множеством i-мерных граней триангуляции $T(A) = \{S_1, \ldots, S_t\}$ и $\Gamma(T(A)) = \bigcup\limits_{i=-1}^{d} \Gamma_i(T(A))$ есть множество всех граней триангуляции $T(A)$. Легко видеть, что $(d-1)$-мерная грань F триангуляции $T(A)$, которой принадлежит внутренняя точка из $[A]$, является общей гранью ровно двух симплексов из $T(A)$; в противном случае F является гранью единственного симплекса из $T(A)$. Грань F триангуляции $T(A)$ назовём *внутренней*, если в F имеется внутренняя точка из $[A]$, в противном случае назовём её внешней. Множество внешних $(d-1)$-мерных граней триангуляции $T(A)$ точечной конфигурации A обозначим через $H(T(A))$, а множество всех триангуляций точечной конфигурации A — через $\mathcal{T}(A)$. Множество всех триангуляций d-мерных точечных конфигураций обозначим через $\mathcal{T}_d$.

Симплициальным комплексом называется конечное непустое множество C правильно расположенных симплексов из $\mathbb{R}^d$ (называемых *гранями* комплекса C), которое содержит все грани своих симплексов. *Размерностью* $\dim(C)$ симплициального комплекса C считается наибольшая из размерностей симплексов из C. Симплициальный комплекс C называется *однородным*, если каждый симплекс из C имеет размерность $\dim(C)$. Таким образом, все максимальные по включению грани однородного симплициального комплекса C, называемые его *гипергранями*, и только они имеют размерность $\dim(C)$. Через $\Gamma_i(C)$ обозначим множество i-мерных граней симплициального комплекса C, $i = -1, 0, \ldots, \dim(C)$. *Звездой*

$$\mathrm{star}(F, C) = \{F' \in C \mid F \subseteq F'\} \bigcup \Gamma(F)$$

грани F симплициального комплекса C называется его подкомплекс, состоящий из всех граней комплекса C, содержащих F, и всех граней комплекса C, содержащихся в F. Заметим, что множество $\Gamma(T)$ всех граней триангуляции $T \in \mathcal{T}_d$ является d-мерным однородным симплициальным комплексом. В дальнейшем будут рассматриваться только однородные симплициальные комплексы, которые будем называть симплициальными комплексами.

Симплициальные комплексы C_1 и C_2 называются *изоморфными*, если между ними можно установить биекцию φ, сохраняющую отношение включения: для любых граней F_1, F_2 из C_1 включение $F_1 \subseteq F_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(F_1) \subseteq \varphi(F_2)$. Заметим, что такая биекция φ сохраняет также и размерность: $\dim(F) = \dim(\varphi(F))$ для любой грани $F \in C_1$.

Развёрткой симплициального комплекса C называется такая последовательность его гиперграней $L = (S_1, \ldots, S_t)$, что при $l = 1, \ldots, t$ множество $\Gamma(S_l) \setminus (\bigcup\limits_{\tau=1}^{l-1} \Gamma(S_\tau))$ имеет единственный минимальный по включению элемент, называемый l-м *разделителем* развёртки L и обозначаемый через $G_l(L)$. Для грани F симплекса S положим

$$\lfloor F, S \rfloor = \{F' \in \Gamma(S) \ \mid \ F \in \Gamma(F')\}.$$

Тогда $C = \lfloor G_1(L), S_1 \rfloor \cup \lfloor G_2(L), S_2 \rfloor \cup \cdots \cup \lfloor G_t(L), S_t \rfloor$, причём $\lfloor G_j(L), S_j \rfloor \cap \lfloor G_k(L), S_k \rfloor = \varnothing$ при $j \neq k$. Последовательность разделителей развёртки L обозначим через $G(L) = (G_l(L), \ldots, G_t(L))$. Из определения развёртки следует, что все разделители развёртки L различны, $G_1(L) = \varnothing$, $\dim(G_2(L)) = 0$ и справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть $L = (S_1, \ldots, S_t)$ является развёрткой симплициального комплекса C. Если грань F из $\Gamma(C)$ принадлежит единственному симплексу S_j развёртки L, то $G_j(L) \in \Gamma(F)$.*

Пусть $L = (S_1, \ldots, S_t)$ — развёртка симплициального комплекса C. Через $\tau(L) = (\tau_1, \ldots, \tau_q)$ обозначим вектор, называемый далее τ-*вектором*, в котором $\tau_1, \ldots, \tau_q$ являются упорядоченными по возрастанию номерами нульмерных разделителей развёртки L. Так как $q = |\Gamma_0(C)| - \dim(C) - 1$, то

$$\begin{aligned} C = \lfloor \varnothing, S_1 \rfloor \cup \lfloor G_{\tau_1}(L), S_2 \rfloor \cup \lfloor G_{\tau_1+1}(L), S_3 \rfloor \cup \cdots \cup \lfloor G_{\tau_2-1}(L), S_{\tau_2-1} \rfloor \\ \cup \lfloor G_{\tau_2}(L), S_{\tau_2} \rfloor \cup \lfloor G_{\tau_2+1}(L), S_{\tau_2+1} \rfloor \cup \cdots \cup \lfloor G_{\tau_3-1}(L), S_{\tau_3-1} \rfloor \cup \ldots \\ \cup \lfloor G_{\tau_q}(L), S_{\tau_q} \rfloor \cup \lfloor G_{\tau_q+1}(L), S_{\tau_q+1} \rfloor \cup \ldots \cup \lfloor G_t(L), S_t \rfloor. \end{aligned}$$

Если в любой строке первый разделитель является гранью каждого из следующих в ней разделителей ($G_{\tau_\mu}(L) \in \Gamma(G_\tau)$ при любом $\mu = 1, \ldots, q$ и при любом $\tau = \tau_\mu, \ldots, \tau_{\mu+1} - 1$, где $\tau(L) = (\tau_1, \ldots, \tau_q)$ и $\tau_{q+1} = t + 1$), то развёртку L назовём *звёздной*. Положим $\Delta_0(L) = \Gamma(S_1)$ и $\Delta_n(L) = \bigcup\limits_{j=1}^{\tau_{n+1}-1} \Gamma(S_j)$ при $n = 1, \ldots, q$. Тогда нетрудно доказать следующее утверждение, дающее эквивалентное определение введенного понятия.

Лемма 2. *Развёртка $L = (S_1, \ldots, S_t)$ симплициального комплекса C*

является звёздной тогда и только тогда, когда

$$\Delta_n(L) = \Delta_{n-1}(L) \cup \mathrm{star}(G_{\tau_n}(L), \Delta_n(L)) \text{ при каждом } n = 1, \dots q,$$

где $\tau(L) = (\tau_1, \dots, \tau_q)$ *и* $\tau_{q+1} = t + 1$.

Теперь становится почти очевидной следующая конкретизация леммы 1, которая понадобится в разделе 2.

Лемма 3. *Пусть* $G_k(L)$ *является последним нульмерным разделителем звёздной развёртки* $L = (S_1, \dots, S_t)$ *симплициального комплекса* C. *Если для грани* $F \in \Gamma(C)$ *существует единственная гипергрань* S_j *симплициального комплекса* C *такая, что* $S_j \supseteq F$, *и если* $v \in \Gamma_0(S_j) \setminus \Gamma_0(F)$, *то* $G_k(L) \neq v$.

Следствие 1. *Если для каждой вершины* $v \in \Gamma_0(C)$ *симплициального комплекса* C *существуют грань* F *и гипергрань* S *такие, что* $v \in \Gamma_0(S) \setminus \Gamma_0(F)$ *и гипергрань* S *является единственной гипергранью симплициального комплекса* C *такой, что* $S \supseteq F$, *то симплициальный комплекс* C *не имеет звёздной развёртки.*

Развёрткой триангуляции $T \in \mathcal{T}_d$ называется развёртка симплициального комплекса $\Gamma(T)$ её граней. Триангуляцию назовём *разворачиваемой*, если она имеет развёртку, и *неразворачиваемой* в противном случае. Триангуляцию, имеющую звёздную развёртку, назовём *звёздно разворачиваемой*.

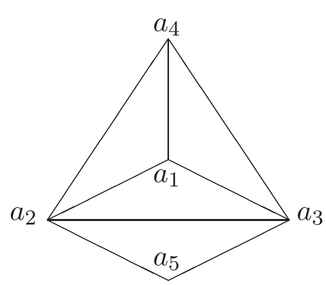

Рис. 1

В качестве примера рассмотрим плоскую ($d = 2$) точечную конфигурацию (см. рис. 1) $A_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, где $a_1 = (0, 1)$, $a_2 = (-2, 0)$, $a_3 = (2, 0)$, $a_4 = (0, 3)$, $a_5 = (0, -1)$, и её триангуляцию $T = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, где $S_1 = [a_1, a_2, a_3]$, $S_2 = [a_1, a_2, a_4]$, $S_3 = [a_1, a_3, a_4]$, $S_4 = [a_2, a_3, a_5]$. Последовательность симплексов $L_1 = (S_2, S_3, S_4, S_1)$ не является развёрткой триангуляции T, поскольку множество

$$\Gamma(S_4) \setminus \left(\bigcup_{\tau=2}^{3} \Gamma(S_\tau) \right) = \{a_5, [a_2, a_3], [a_2, a_5], [a_3, a_5], [a_2, a_3, a_5]\}$$

имеет два минимальных по включению элемента: a_5 и $[a_2, a_3]$. Последовательности симплексов $L_2 = (S_1, S_2, S_3, S_4)$ и $L_3 = (S_1, S_2, S_4, S_3)$ являются развёртками триангуляции T с последовательностями разделителей $G(L_2) = (\varnothing, a_4, [a_3, a_4], a_5)$, $G(L_3) = (\varnothing, a_4, a_5, [a_3, a_4])$ и τ-векторами $\tau(L_2) = (2, 4)$, $\tau(L_3) = (2, 3)$ соответственно. Так как $a_5 \notin [a_3, a_4]$, то L_3 не является звёздной развёрткой триангуляции T, в то время как L_2 является таковой. Поэтому триангуляция T является звёздно разворачиваемой.

Известен пример [15] неразворачиваемой триангуляции трехмерной точечной конфигурации. Таким образом, естественной оказывается задача одновременного построения триангуляции и её развёртки для точечной конфигурации. Известно (см., например, [14]), что это можно сделать.

В настоящей статье получены следующие результаты. В разделе 1 построен пример разворачиваемой триангуляции, не имеющей звёздной развёртки. В разделе 2 описана модификация алгоритма Фурье–Моцкина (ТФМ-алгоритм, см. [10]) для построения триангуляции точечной конфигурации. Из [11] (см. также [16]) следует алгоритм построения развёртки комплекса собственных граней выпуклой оболочки точечной конфигурации в общем положении, практическая реализация которого представлена в разделе 3. В разделе 4 предлагается анонсированная в [9] модификация алгоритма Фурье-Моцкина (РТФМ-алгоритм), которая для точечной конфигурации в общем положении одновременно строит триангуляцию, используя ТФМ-алгоритм, и звёздную развёртку этой триангуляции. Основной результат представлен в теореме 3, которая утверждает, что РТФМ-алгоритм строит с временно́й сложностью $O(N^{\lfloor d/2 \rfloor + 1}) + O(N^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor} \log N)$ звёздно разворачиваемую триангуляцию $T(A_N)$ и её звёздную развёртку L_N для d-мерной точечной конфигурации $A_N \subset \mathbb{R}^d$ в общем положении, заданной последовательностью точек $\widehat{A}_N = (a_1, \ldots, a_N)$.

1. Пример разворачиваемой триангуляции, не имеющей звёздной развёртки

Покажем, что существует пример разворачиваемой триангуляции, не имеющей звёздной развёртки.

Пусть $V_7 = \{v_1, \ldots, v_7\}$ и $T(V_7) = \{S_1, \ldots, S_{10}\}$, где $v_1 = (0, 0, 9)$, $v_2 = (-1, -6, 8)$, $v_3 = (-4, 4, 8)$, $v_4 = (6, 2, 8)$, $v_5 = (1, -6, 0)$, $v_6 = (-6, 2, 0)$, $v_7 = (4, 4, 0)$ и $S_1 = [v_1, v_5, v_6, v_7]$, $S_2 = [v_1, v_4, v_6, v_7]$, $S_3 = [v_1, v_3, v_4, v_6]$, $S_4 = [v_1, v_2, v_5, v_7]$, $S_5 = [v_1, v_2, v_4, v_7]$, $S_6 = [v_1, v_3, v_5, v_6]$,

$S_7 = [v_1, v_2, v_3, v_5]$, $S_8 = [v_3, v_4, v_6, v_7]$, $S_9 = [v_2, v_4, v_5, v_7]$, $S_{10} = [v_2, v_3, v_5, v_6]$.

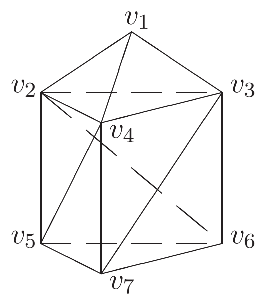

Рис. 2

Политопиальным разбиением d-мерного политопа M называется такое множество $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_h\}$ d-мерных политопов, вершины которых являются вершинами политопа M, что объединение этих политопов совпадает с M, а пересечение любых двух из них является их общей гранью (возможно, пустой). *Триангуляцией* политопа называется триангуляция точечной конфигурации его вершин. Положим $P_1 = [v_1, v_3, v_4, v_6, v_7]$, $P_2 = [v_1, v_2, v_4, v_5, v_7]$, $P_3 = [v_1, v_2, v_3, v_5, v_6]$. Тогда $\Gamma_2(P_1) = \{[v_1, v_3, v_4], [v_1, v_4, v_7], [v_1, v_6, v_7], [v_1, v_3, v_6], [v_3, v_4, v_7], [v_3, v_6, v_7]\}$, $\Gamma_2(P_2) = \{[v_1, v_2, v_4], [v_1, v_4, v_7], [v_1, v_5, v_7], [v_1, v_2, v_5], [v_2, v_4, v_5], [v_4, v_5, v_7]\}$, $\Gamma_2(P_3) = \{[v_1, v_2, v_3], [v_1, v_3, v_6], [v_1, v_5, v_6], [v_1, v_2, v_5], [v_2, v_3, v_6], [v_2, v_5, v_6]\}$. Теперь заметим, что $\mathcal{P} = \{S_1, P_1, P_2, P_3\}$ является политопиальным разбиением политопа $[V_7]$, а множества симплексов $T_1 = \{S_2, S_3, S_8\}$, $T_2 = \{S_4, S_5, S_9\}$, $T_3 = \{S_6, S_7, S_{10}\}$ являются триангуляциями политопов P_1, P_2, P_3 соответственно. Поэтому $T(V_7) = \{S_1, \ldots, S_{10}\}$ является триангуляцией точечной конфигурации $V_7 = \{v_1, \ldots, v_7\}$.

Теорема 1. *Триангуляция $T(V_7)$ является разворачиваемой, но не является звёздно разворачиваемой.*

Доказательство. Действительно, легко проверить, что триангуляция $T(V_7)$ имеет развёртку $L' = (S_1, \ldots, S_{10})$ с последовательностью разделителей $G(L') = (\varnothing, v_4, v_3, v_2, [v_2, v_4], [v_3, v_5], [v_2, v_3], [v_3, v_7], [v_4, v_5], [v_2, v_6])$. Покажем, что триангуляция $T(V_7)$ не имеет звёздной развёртки. Предположим, что звёздная развёртка $L = (S_{i_1}, \ldots, S_{i_{10}})$ существует. Пусть $G_k(L)$ является её последним нульмерным разделителем в последовательности разделителей $G(L)$. Тогда $G_k(L) \in \{v_1, \ldots, v_7\}$.

Из леммы 3 следует, что:
$G_k(L) \neq v_1$, так как симплекс $S_1 = [v_1, v_5, v_6, v_7]$ является единственным

симплексом триангуляции $T(V_7)$, имеющим грань $F_1 = [v_5, v_6, v_7]$;
$G_k(L) \neq v_2, v_7$, так как симплекс $S_9 = [v_2, v_4, v_5, v_7]$ является единственным симплексом триангуляции $T(V_7)$, имеющим грань $F_2 = [v_4, v_5]$;
$G_k(L) \neq v_3, v_5$, так как симплекс $S_{10} = [v_2, v_3, v_5, v_6]$ является единственным симплексом триангуляции $T(V_7)$, имеющим грань $F_3 = [v_2, v_6]$;
$G_k(L) \neq v_4, v_6$, так как симплекс $S_8 = [v_3, v_4, v_6, v_7]$ является единственным симплексом триангуляции $T(V_7)$, имеющим грань $F_4 = [v_3, v_7]$.

Таким образом, $G_k(L) \notin \{v_1, \ldots, v_7\}$. Полученное противоречие показывает неверность сделанного предположения. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим d-мерную точечную конфигурацию $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ из $\mathbb{R}^d$ и в случае $n \geqslant d+2$ такие вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что $\dim([A']) = d+1$, где $a'_i = (a_i, \lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$, и $A' = \{a'_1, \ldots, a'_n\}$. Пусть T'^{+} — множество тех d-мерных граней политопа $[A']$, внутренняя нормаль к которым имеет положительную последнюю компоненту. Если все такие грани симплициальны, то $T^{+} = \{[a_{i_1}, \ldots, a_{i_{d+1}}] \mid [a'_{i_1}, \ldots, a'_{i_{d+1}}] \in T'^{+}\}$ является триангуляцией точечной конфигурации A и называется *регулярной триангуляцией* (см., например, [14, 16]). В случае $n = d+1$ точечная конфигурация A имеет единственную триангуляцию $T = \{[A]\}$, которая также называется *регулярной триангуляцией*. В [14] введено понятие *слаборегулярной* триангуляции: триангуляция T d-мерной точечной конфигурации A называется *слаборегулярной* [14], если существует d-мерная точечная конфигурация A^*, имеющая такую регулярную триангуляцию T^*, что симплициальный комплекс $\Gamma(T^*)$ её граней изоморфен симплициальному комплексу $\Gamma(T)$ граней триангуляции T. Регулярные триангуляции, а следовательно, и слаборегулярные триангуляции являются разворачиваемыми (см., например, [14]).

В [14] предложен пример слаборегулярной триангуляции, не являющейся регулярной. Пример, рассмотренный в этом разделе, является его целочисленной модификацией, что существенно облегчает компьютерную обработку данных. Вопрос о связи понятий «слаборегулярная триангуляция» и «звёздно разворачиваемая триангуляция» остается открытым, как и вопрос о связи понятий «регулярная триангуляция» и «звёздно разворачиваемая триангуляция».

2. ТФМ-алгоритм

Сначала введём необходимые понятия. Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ — d-мерная точечная конфигурация в общем положении. Если $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ и $b = (b_0, b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, то положим $\overline{x} = (1, x_1, \ldots, x_d)$ и $(b, \overline{x}) = b_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_d x_d$. Для $F \in \Gamma_{d-1}([A])$ через $b_F^A = b_F^{[A]}$ обозначим такой вектор из $\mathbb{R}^{d+1}$, что $(b_F^A, \overline{x}) = 0$ при любом $x \in F$ и $(b_F^A, \overline{x}) \geqslant 0$ при любом

$x \in [A]$. Тогда из доказательства теоремы Минковского–Вейля (см., например, [2, 3]) следует, что политоп $[A] = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (b_F^A, \overline{x}) \geqslant 0$ при любом F из $\Gamma_{d-1}([A]))\}$. Заметим, что если $T(A) \in \mathcal{T}(A)$ является триангуляцией d-мерной точечной конфигурации $A \subset \mathbb{R}^d$ в общем положении, то множество $H(T(A))$ внешних $(d-1)$-мерных граней триангуляции $T(A)$ совпадает с множеством $\Gamma_{d-1}([A])$ гиперграней политопа $[A]$.

Пусть H — конечное множество k-мерных симплексов. Положим $\Gamma_i(H) = \bigcup\limits_{S \in H} \Gamma_i(S)$, $i = -1, 0, \ldots, k$, и $\Gamma(H) = \bigcup\limits_{i=-1}^{k} \Gamma_i(H)$. Два k-мерных симплекса S_1, S_2 назовём *смежными*, если их пересечение является их общей $(k-1)$-мерной гранью. Граф $G^*(H) = (H, E(H))$ с множеством вершин H и множеством рёбер

$$E(H) = \{\{S_1, S_2\} \subseteq H \;\mid\; S_1 \cap S_2 \in \Gamma_{k-1}(S_1) \cap \Gamma_{k-1}(S_2)\}$$

назовём *графом смежности* множества k-мерных симплексов H.

В [10] описана модификация алгоритма Фурье–Моцкина для построения триангуляции d-мерной точечной конфигурации $A \subset \mathbb{R}^d$, названная ТФМ-алгоритмом. Предполагается, что входом ТФМ-алгоритма является произвольная d-мерная точечная конфигурация $A_N = \{a_1, \ldots, a_N\}$ из $\mathbb{R}^d$ в общем положении, заданная последовательностью точек $\widehat{A}_N = (a_1, \ldots, a_N)$. Положим $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $\widehat{A}_n = (a_1, \ldots, a_n)$ при $n = d+1, \ldots, N$. Сначала ТФМ-алгоритм полагает

$$T(A_{d+1}) = \{[A_{d+1}]\} \in \mathcal{T}([A_{d+1}]),\; H_{d+1} = H(T(A_{d+1})) = \Gamma_{d-1}([A_{d+1}]),$$
$$E_{d+1} = \{\{F_1, F_2\} \;\mid\; F_1, F_2 \in H_{d+1},\; F_1 \neq F_2\}$$

и далее последовательно при $n = d+1, \ldots, N-1$ производит итерацию, на которой по уже построенным $T(A_n) \in \mathcal{T}(A_n)$, $H_n = H(T(A_n)) = \Gamma_{d-1}([A_n])$, $G^*(H_n) = (H_n, E_n)$ и $b_F^{A_n}$ для каждой грани $F \in H_n$ строит $TFM_{\mathcal{T}}(T(A_n), H_n, a_{n+1}) = T(A_{n+1}) \in \mathcal{T}(A_{n+1})$, $TFM_{\partial}(H_n, E_n, a_{n+1}) = (H_{n+1}, E_{n+1}) = G^*(H_{n+1})$, где $H_{n+1} = H(T(A_{n+1})) = \Gamma_{d-1}([A_{n+1}])$, а также $b_F^{A_{n+1}}$ для каждой грани $F \in H_{n+1}$. ТФМ-алгоритм на итерации, соответствующей появлению на его входе точки a_{n+1}, производит следующие действия: построить $H_n^- = \{F \in H_n \;\mid\; (b_F^{A_n}, \overline{a_{n+1}}) < 0\}$, если $H_n^- = \varnothing$ $(a_{n+1} \in [A_n])$, то положить $T(A_{n+1}) = T(A_n)$ и $H_{n+1} = H_n$, если же $H_n^- \neq \varnothing$ $(a_{n+1} \notin [A_n])$, то построить множество $T(A_{n+1}) = T(A_n) \bigcup \{[F^-, a_{n+1}] \;\mid\; F^- \in H_n^-\}$, оказывающееся триангуляцией точечной конфигурации A_{n+1}, и $H_{n+1} = H(T(A_{n+1})) = \Gamma_{d-1}([A_{n+1}])$. Выходом ТФМ-алгоритма является триангуляция $T(A_N) \in \mathcal{T}(A_N)$ и множество

$H_N = H(T(A_N)) = \Gamma_{d-1}([A_N])$. Временна́я сложность ТФМ-алгоритма не превосходит $O(N^{\lfloor d/2 \rfloor + 1})$.

Описание ТФМ-алгоритма содержится в [10]. Заметим, что для осуществления итерации ТФМ-алгоритма вместо всей граневой структуры триангуляции оказалось возможным использовать граф смежности $G^*(H_n)$ и триангуляцию $T(A_n)$. Справедлива следующая

Лемма 4 [10]. *Если $A_N = \{a_1, \ldots, a_N\} \subset \mathbb{R}^d$ является d-мерной точечной конфигурацией в общем положении и $n \in \{d+1, \ldots N-1\}$, то* ТФМ*-алгоритм по $T(A_n) \in \mathcal{T}(A_n)$, $H_n = H(T(A_n)) = \Gamma_{d-1}([A_n])$, графу смежности $G^*(H_n)$ и $b_F^{A_n}$ для каждой грани $F \in H_n$ строит $T(A_{n+1})$ из множества $\mathcal{T}(A_{n+1})$, $H_{n+1} = H(T(A_{n+1})) = \Gamma_{d-1}([A_{n+1}])$, граф смежности $G^*(H_{n+1}) = (H_{n+1}, E_{n+1})$ и $b_F^{A_{n+1}}$ для каждой грани $F \in H_{n+1}$.*

Таким образом, на вход ТФМ-алгоритма последовательно подаются точки $a_1, a_2, \ldots, a_N$ из $\mathbb{R}^d$, задающие d-мерную точечную конфигурацию A_N в общем положении.

ТФМ-алгоритм выдает $TFM_{\mathcal{T}}(\widehat{A}_N) = T(A_N)$ из $\mathcal{T}(A_N)$ и

$$TFM_{\partial}(\widehat{A}_N) = H_N = H(T(A_N)) = \Gamma_{d-1}([A_N]),$$

а также $b_F^{A_N}$ для каждой грани $F \in H_N$, выполнив следующие шаги.

Шаг 1. Положить $T(A_{d+1}) = \{[A_{d+1}]\}$, $H_{d+1} = \Gamma_{d-1}([A_{d+1}])$, $E_{d+1} = \{\{F_1, F_2\} \mid F_1, F_2 \in H_{d+1},\ F_1 \neq F_2\}$ и для каждой грани $F \in H_{d+1}$ найти $b_F^{A_{d+1}}$.

Шаг 2. Последовательно для $n = d+1, \ldots, N-1$ выполнить итерацию ТФМ-алгоритма, построив $T(A_{n+1}) = TFM_{\mathcal{T}}(T(A_n), H_n, a_{n+1})$, $(H_{n+1}, E_{n+1}) = TFM_{\partial}(H_n, E_n, a_{n+1})$ и $b_F^{A_{n+1}}$ для каждой грани $F \in H_{n+1}$.

Справедлива следующая

Теорема 2 [10]. *Если $A_N = \{a_1, \ldots, a_N\} \subset \mathbb{R}^d$ является d-мерной точечной конфигурацией в общем положении, заданной последовательностью точек $\widehat{A}_N = (a_1, \ldots, a_N)$, то* ТФМ*-алгоритм строит с временно́й сложностью $O(N^{\lfloor d/2 \rfloor + 1})$ триангуляцию $T(A_N) \in \mathcal{T}(A_N)$ и множество $H_N = H(T(A_N)) = \Gamma_{d-1}([A_N])$.*

3. Развёртка симплициального комплекса собственных граней выпуклой оболочки точечной конфигурации в общем положении

Рассмотрим d-мерный симплициальный политоп $M \subset \mathbb{R}^d$ и в соответствии с [11] (см. также [16]) покажем, как можно построить развёртку симплициального комплекса его собственных граней. Пусть v — внутренняя точка политопа M и вектор a таковы, что аффинные оболочки различных гиперграней политопа M пересекают прямую $l = \{v+ta \mid t \in \mathrm{R}\}$ в различных точках. Тогда если двигаться вдоль прямой $l = \{v + ta \mid t \in \mathrm{R}\}$ из точки v, увеличивая t от 0 до ∞, а затем — от $-\infty$ до 0, то все гиперграни политопа будут строго упорядочены в соответствии с моментами пересечения их аффинных оболочек при описанном движении вдоль прямой. Действительно, множество гиперграней $\Gamma_{d-1}(M)$ политопа M упорядочивается таким образом, что $\Gamma_{d-1}(M) = \{F_1, \dots, F_m\}$, $v + t_j a = \mathrm{aff}(F_j) \cap l$ и

$$\frac{1}{t_1} > \frac{1}{t_2} > \cdots > \frac{1}{t_m}.$$

Тогда из [11] (см. также [16, стр. 241]) следует

Лемма 5. *Последовательность $(F_1, \dots, F_j)$ является развёрткой симплициального комплекса $\bigcup\limits_{i=1}^{j} \Gamma(F_i)$, $j = 1, \dots, m$.*

Пусть $n \geqslant d + 1$, точки $a_1, \dots, a_n, a$ из $\mathbb{R}^d$ находятся в общем положении и $a \notin M = [a_1, \dots, a_n]$. Заметим, что M является d-мерным симплициальным политопом, а точки $a_1, \dots, a_{d+1}$ аффинно независимы. Положим $V = (a_1, \dots, a_{d+1})$, $H^- = \{F \in \Gamma_{d-1}(M) \mid (b_F^M, \overline{a}) < 0\}$ и $H^+ = \{F \in \Gamma_{d-1}(M) \mid (b_F^M, \overline{a}) > 0\}$. Тогда $H = H^- \cup H^+ = \Gamma_{d-1}(M)$. Покажем, каким образом могут быть построены развёртки симплициальных комплексов $\Gamma(H)$ и $\Gamma(H^-)$.

На множестве векторов введём лексикографический порядок, считая вектор $q^1 = (q_1^1, \dots, q_k^1) \in \mathbb{R}^k$ *лексикографически меньше* вектора $q^2 = (q_1^2, \dots, q_k^2) \in \mathbb{R}^k$ и обозначая это через $q^1 \prec q^2$, если существует такое $i \in \{1, \dots, k\}$, что $q_j^1 = q_j^2$ при $j = 1, \dots, i-1$ и $q_i^1 < q_i^2$. Тогда, очевидно, справедлива

Лемма 6. *Если $q^1 = (q_1^1, \dots, q_k^1) \in \mathbb{R}^k$ и $q^2 = (q_1^2, \dots, q_k^2) \in \mathbb{R}^k$, то существует такое $\delta' > 0$, что при любом положительном $\delta < \delta'$:*
$q^1 \prec q^2$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{j=0}^{k-1} \delta^j q_{j+1}^1 < \sum\limits_{j=0}^{k-1} \delta^j q_{j+1}^2$,
$q^1 = q^2$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{j=0}^{k-1} \delta^j q_{j+1}^1 = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \delta^j q_{j+1}^2$,
$q^1 \succ q^2$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{j=0}^{k-1} \delta^j q_{j+1}^1 > \sum\limits_{j=0}^{k-1} \delta^j q_{j+1}^2$.

При $\delta > 0$ положим $v_\delta = v_\delta(V) = \sum\limits_{j=0}^{d} \delta^j a_{j+1} / \sum\limits_{j=0}^{d} \delta^j$. Заметим, что $v_\delta(V) \in \mathrm{int}(M)$ при $\delta > 0$, так как $V \subset M$. Рассмотрим прямую $l_\delta = \{v_\delta + t(a - v_\delta) \mid t \in \mathrm{R}\}$ и покажем, что при любом достаточно малом $\delta > 0$ прямая l_δ пересекает аффинные оболочки гиперграней политопа в различных точках и задача построения развёрток симплициальных комплексов $\Gamma(H)$ и $\Gamma(H^-)$ может быть сведена к задаче лексикографического упорядочивания определённым образом построенной совокупности векторов.

Для $b \in \mathbb{R}^{d+1}$ положим $(b, V) = ((b, \overline{a_1}), \ldots, (b, \overline{a_{d+1}}))$. Пусть $F \in \Gamma_{d-1}(M)$ — произвольная гипергрань политопа M. Положим $b_F = b_F^M$ и $t(F, v_\delta, a) = \left(1 - \dfrac{(b_F, \overline{a})}{(b_F, \overline{v_\delta})}\right)^{-1}$. Заметим, что $\mathrm{aff}(F) \cap l_\delta = v_\delta + t(F, v_\delta, a)(a - v_\delta)$. Справедлива

Лемма 7. *Пусть $n \geqslant d + 1$, точки $a_1, \ldots, a_n, a \in \mathbb{R}^d$ находятся в общем положении, $a \notin M = [a_1, \ldots, a_n]$ и $V = (a_1, \ldots, a_{d+1})$. Пусть также $F_1, F_2 \in \Gamma_{d-1}(M)$, $F_1 \neq F_2$, $b_i = b_{F_i}^M$, $v_\delta = v_\delta(V) = \sum\limits_{j=0}^{d} \delta^j a_{j+1} / \sum\limits_{j=0}^{d} \delta^j$, $t_i(\delta) = t(F_i, v_\delta, a)$ при $i = 1, 2$ и $\delta > 0$. Тогда $(b_1, V)/(b_1, \overline{a}) \neq (b_2, V)/(b_2, \overline{a})$ и существует такое $\delta'(F_1, F_2) > 0$, что при любом положительном $\delta < \delta'(F_1, F_2)$ неравенство $1/t_1(\delta) > 1/t_2(\delta)$ справедливо тогда и только тогда, когда $-(b_1, V)(b_2, \overline{a}) \prec -(b_2, V)(b_1, \overline{a})$.*

Доказательство. Сначала докажем, что $(b_1, V)/(b_1, \overline{a}) \neq (b_2, V)/(b_2, \overline{a})$, заметив, что $(b_i, \overline{a}) \neq 0$ при $i = 1, 2$, поскольку $F_1, F_2 \in \Gamma_{d-1}(M) = H^- \cup H^+$. Предположим, что $(b_1, V)/(b_1, \overline{a}) = (b_2, V)/(b_2, \overline{a})$. Пусть $\beta = (b_1, \overline{a})/(b_2, \overline{a})$ и пусть $(b, V) = \beta(b_2, V)$ — уравнение относительно неизвестного вектора $b = (b_1, \ldots, b_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Так как точки $a_1, \ldots, a_{d+1}$ аффинно независимы и $V = (a_1, \ldots, a_{d+1})$, то система линейных уравнений $(b, \overline{a_j}) = \beta(b_2, \overline{a_j})$, $1 \leqslant j \leqslant d + 1$, является крамеровской и её решение единственно. Таким образом, $b = b_1$ и $b = \beta b_2$. Положим $\pi_i = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (b_i, \overline{x}) = 0\}$ при $i = 1, 2$. Так как $b_1 = \beta b_2$, то $\pi_1 = \pi_2$ и $F_1 = M \cap \pi_1 = M \cap \pi_2 = F_2$, что противоречит условию леммы. Поэтому предположение неверно. Следовательно, $(b_1, V)/(b_1, \overline{a}) \neq (b_2, V)/(b_2, \overline{a})$.

Поскольку $1/t_i(\delta) = 1 - (b_i, \overline{a})/(b_i, \overline{v_\delta})$ при $i = 1, 2$, то $1/t_1(\delta) > 1/t_2(\delta)$ тогда и только тогда, когда $-(b_1, \overline{a})/(b_1, \overline{v_\delta}) > -(b_2, \overline{a})/(b_2, \overline{v_\delta})$. Так как $F_1, F_2 \in \Gamma_{d-1}(M) = H^- \cup H^+$ и $v_\delta(V) \in \mathrm{int}(M)$ при $\delta > 0$, то $(b_i, \overline{a}) \neq 0$ и $(b_i, \overline{v_\delta}) > 0$ при $i = 1, 2$. Поэтому $1/t_1(\delta) > 1/t_2(\delta)$ тогда и только тогда, когда $-(b_1, \overline{v_\delta})(b_2, \overline{a}) < -(b_2, \overline{v_\delta})(b_1, \overline{a})$. Тогда по лемме 6 существует такое $\delta'(F_1, F_2) > 0$, что при любом положительном $\delta < \delta'(F_1, F_2)$

неравенство $1/t_1(\delta) > 1/t_2(\delta)$ справедливо тогда и только тогда, когда $-(b_1, V)(b_2, \overline{a}) \prec -(b_2, V)(b_1, \overline{a})$. Лемма 7 доказана.

Пусть $n \geqslant d+1$, точки $a_1, \ldots, a_n, a \in \mathbb{R}^d$ находятся в общем положении, $a \notin M = [a_1, \ldots, a_n]$, $H^- = \{F \in \Gamma_{d-1}(M) \mid (b_F^M, \overline{a}) < 0\}$ и $H^+ = \{F \in \Gamma_{d-1}(M) \mid (b_F^M, \overline{a}) > 0\}$. Заметим, что $\Gamma_{d-1}(M) = H^- \cup H^+$. Пусть также $V = (a_1, \ldots, a_{d+1})$ и $V' = (a_1, \ldots, a_{d+1}, a)$. Тогда будем говорить, что гипергрань $F_1 \in \Gamma_{d-1}(M)$ *предшествует* гиперграни $F_2 \in \Gamma_{d-1}(M)$ (обозначив это через $F_1 \prec_M^{V'} F_2$), если

$$-(b_{F_1}^M, V)(b_{F_2}^M, \overline{a}) \prec -(b_{F_2}^M, V)(b_{F_1}^M, \overline{a}).$$

Теперь рассмотрим произвольную гипергрань $F \in \Gamma_{d-1}(M) = H^- \cup H^+$, $\delta > 0$, $b_F = b_F^M$ и $t(\delta) = t(F, v_\delta, a)$. Тогда $1/t(\delta) = 1 - (b_F, \overline{a})/(b_F, \overline{v_\delta}) \neq 1$. Следовательно, $1/t(\delta) > 1$ тогда и только тогда, когда $F \in H^-$, и $1/t(\delta) < 1$ тогда и только тогда, когда $F \in H^+$. Тогда из леммы 5 и леммы 7 получаем

Следствие 2. *Пусть $n \geqslant d+1$, точки $a_1, \ldots, a_n, a \in \mathbb{R}^d$ находятся в общем положении, $a \notin M = [a_1, \ldots, a_n]$ и $V' = (a_1, \ldots, a_{d+1}, a)$. Тогда на множествах $H = H^- \cup H^+ = \Gamma_{d-1}(M)$ и H^- отношение предшествия $\prec_M^{V'}$ является отношением строгого линейного порядка. Если $H = \{F_1, \ldots, F_m\}$ и $F_k \prec_M^{V'} F_{k+1}$ при $k = 1, \ldots, m-1$, то последовательность симплексов $F_1, \ldots, F_m$ является развёрткой симплициального комплекса $\Gamma(H)$. Если $H^- = \{F_1, \ldots, F_p\}$ и $F_k \prec_M^{V'} F_{k+1}$ при $k = 1, \ldots, p-1$, то последовательность симплексов $F_1, \ldots, F_p$ является развёрткой симплициального комплекса $\Gamma(H^-)$.*

4. РТФМ-алгоритм

На вход РТФМ-алгоритма подаётся произвольная d-мерная точечная конфигурация $A_N = \{a_1, \ldots, a_N\} \subset \mathbb{R}^d$ в общем положении, заданная последовательностью точек $\widehat{A}_N = (a_1, \ldots, a_N)$. Положим $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $\widehat{A}_n = (a_1, \ldots, a_n)$ при $n = d+1, \ldots, N$. Вначале РТФМ-алгоритм полагает $T(A_{d+1}) = \{[A_{d+1}]\} \in \mathcal{T}([A_{d+1}])$, $L_{d+1} = ([A_{d+1}])$, $H_{d+1} = H(T(A_{d+1})) = \Gamma([A_{d+1}])$, $E_{d+1} = \{\{F_1, F_2\} \mid F_1, F_2 \in H_{d+1},\ F_1 \neq F_2\}$ и далее последовательно при $n = d+1, \ldots, N-1$ производит следующие действия: если $a_{n+1} \in [A_n]$, то РТФМ-алгоритм полагает $T(A_{n+1}) = T(A_n)$, $L_{n+1} = L_n$, $H_{n+1} = H_n$ и $E_{n+1} = E_n$; если же $a_{n+1} \notin [A_n]$, то РТФМ-алгоритм строит триангуляцию $T(A_{n+1}) \in \mathcal{T}(A_{n+1})$ и её звёздную развёртку L_{n+1}, дополняя полученную на предыдущем этапе триангуляцию $T(A_n)$ и её звёздную развёртку L_n новыми симплексами, а также строит $H_{n+1} = H(T(A_{n+1})) = \Gamma_{d-1}([A_{n+1}])$ и $E_{n+1} = E(H_{n+1})$.

Выходом РТФМ-алгоритма является триангуляция $T(A_N) \in \mathcal{T}(A_N)$ и её звёздная развёртка L_N.

Итерация РТФМ-алгоритма заключается в том, что он по построенной триангуляции $T(A_n) \in \mathcal{T}(A_n)$, её звёздной развёртке L_n, $H_n = H(T(A_n)) = \Gamma_{d-1}([A_n])$, графу смежности $G^*(H_n) = (H_n, E_n)$ и векторам $b_F^{A_n}$ для каждой грани $F \in H_n$, получив новую точку $a_{n+1} \in \mathbb{R}^d$, строит триангуляцию $TFM_{\mathcal{T}}(T(A_n), H_n, a_{n+1}) = T(A_{n+1}) \in \mathcal{T}(A_{n+1})$, её звёздную развёртку $STFM_{\mathcal{S}}(L_n, H_n, a_{n+1}) = L_{n+1}$, граф смежности $TFM_{\partial}(H_n, E_n, a_{n+1}) = (H_{n+1}, E_{n+1}) = G^*(H_{n+1})$, где

$$H_{n+1} = H(T(A_{n+1})) = \Gamma_{d-1}([A_{n+1}]),$$

и векторы $b_F^{A_{n+1}}$ для каждой грани $F \in H_{n+1}$. Итерация РТФМ-алгоритма состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Разделить H_n на $H_n^- = \{F \in H_n \mid (b_F^{A_n}, \overline{a_{n+1}}) < 0\}$ и $H_n^{+,0} = \{F \in H_n \mid (b_F^{A_n}, \overline{a_{n+1}}) \geqslant 0\}$. Для каждой $F \in H_n^{+,0}$ положить $b_F^{A_{n+1}} = b_F^{A_n}$.

Шаг 2. Если $H_n^- = \varnothing$, то положить $H_{n+1} = H_n$, $G^*(H_{n+1}) = G^*(H_n)$, $T(A_{n+1}) = T(A_n)$, $L_{n+1} = L_n$, $b_F^{A_{n+1}} = b_F^{A_n}$ для каждой грани $F \in H_n$ и закончить итерацию.

Шаг 3. Применяя ТФМ-алгоритм, построить

$$T(A_{n+1}) = TFM_{\mathcal{T}}(T(A_n), H_n, a_{n+1}),$$

$(H_{n+1}, E_{n+1}) = TFM_{\partial}(H_n, E_n, a_{n+1})$ и $b_F^{A_{n+1}}$ для каждой грани $F \in H_{n+1}$.

Шаг 4. Упорядочить симплексы из H_n^- так, что $H_n^- = \{F_1, \ldots, F_p\}$ и $-(b_{F_k}^{A_n}, V)/(b_{F_k}^{A_n}, \overline{a_{n+1}}) \prec -(b_{F_{k+1}}^{A_n}, V)/(b_{F_{k+1}}^{A_n}, \overline{a_{n+1}})$ при $k = 1, \ldots, p-1$, где $V = (a_1, \ldots, a_{d+1})$. Положить $L_{n+1} = (L_n, [F_1, a_{n+1}], \ldots, [F_p, a_{n+1}])$.

Лексикографическое упорядочивание векторов на шаге 4, порождающее требуемое упорядочивание симплексов, производится сортировкой слиянием (см., например, [1, стр. 82]).

Лемма 8. *Пусть $A_N \subset \mathbb{R}^d$ является d-мерной точечной конфигурацией в общем положении и $n \in \{d+1, \ldots, N-1\}$. Тогда РТФМ-алгоритм по триангуляции $T(A_n) = TFM_{\mathcal{T}}(\widehat{A}_n) \in \mathcal{T}(A_n)$, её звёздной развёртке L_n, $H_n = H(T(A_n)) = \Gamma_{d-1}([A_n])$, графу смежности $G^*(H_n)$ и $b_F^{A_n}$ для каждой грани $F \in H_n$ строит триангуляцию $T(A_{n+1}) \in \mathcal{T}(A_{n+1})$, её звёздную развёртку L_{n+1}, $H_{n+1} = H(T(A_{n+1})) = \Gamma_{d-1}([A_{n+1}])$, граф смежности $G^*(H_{n+1}) = (H_{n+1}, E_{n+1})$ и $b_F^{A_{n+1}}$ для каждой грани $F \in H_{n+1}$.*

Доказательство. Если $a_{n+1} \in [A_n]$, то утверждение леммы очевидно. Рассмотрим случай, когда $a_{n+1} \notin [A_n]$. Из леммы 4 следует, что

РТФМ-алгоритм строит $T(A_{n+1}) \in \mathcal{T}(A_{n+1})$, $H_{n+1} = H(T(A_{n+1})) = \Gamma_{d-1}([A_{n+1}])$, граф смежности $G^*(H_{n+1}) = (H_{n+1}, E_{n+1})$ и $b_F^{A_{n+1}}$ для каждой грани $F \in H_{n+1}$. Покажем, что L_{n+1} является звёздной развёрткой триангуляции $T(A_{n+1})$.

Так как $A_N \subset \mathbb{R}^d$ является d-мерной точечной конфигурацией в общем положении и $n \in \{d+1, \ldots, N-1\}$, то политоп $[A_n]$ симплициален, $H_n = \Gamma_{d-1}([A_n])$ и $a_{n+1} \notin \operatorname{aff}(F)$ для любой грани $F \in H_n$. Поэтому $H_n^+ = \{F \in H_n \mid (b_F^{A_n}, \overline{a_{n+1}}) > 0\} = H_n^{+,0}$ и $H_n = H_n^+ \cup H_n^-$. Пусть $V_n' = (a_1, \ldots, a_{d+1}, a_{n+1})$. Тогда на шаге 4 итерации РТФМ-алгоритм выполняет упорядочивание симплексов из H_n^- по отношению предшествия $\prec_{[A_n]}^{V_n'}$ таким образом, что $H_n^- = \{F_1, \ldots, F_p\}$ и $F_k \prec_{[A_n]}^{V_n'} F_{k+1}$ при $k = 1, \ldots, p-1$. Из следствия 2 вытекает, что последовательность $(d-1)$-мерных симплексов $(F_1, \ldots, F_p)$ является развёрткой симплициального комплекса $\Gamma(H_n^-)$. Поскольку триангуляциия $T(A_{n+1}) = T(A_n) \bigcup \{[F^-, a_{n+1}] \mid F^- \in H_n^-\}$ и L_n является развёрткой триангуляции $T(A_n)$, то $L_{n+1} = (L_n, [F_1, a_{n+1}], \ldots, [F_p, a_{n+1}])$ является развёрткой триангуляции $T(A_{n+1})$.

Покажем, что L_{n+1} является звёздной развёрткой триангуляции $T(A_{n+1})$. Действительно, пусть $L_n = (S_1, \ldots, S_t)$, $G(L_n) = (G_1, \ldots, G_t)$ и $\tau(L_n) = (\tau_1, \ldots, \tau_q)$. Поскольку $L_{n+1} = (L_n, [F_1, a_{n+1}], \ldots, [F_p, a_{n+1}])$, то $G(L_{n+1}) = (G_1, \ldots, G_t, G_{t+1}, \ldots, G_{t+p})$, где $G_l = G_l(L_{n+1})$ при $l = 1, \ldots, t+p$. Заметим также, что $G_{t+1} = a_{n+1}$ и $\tau(L_n) = (\tau_1, \ldots, \tau_q, \tau_{q+1})$, где $\tau_{q+1} = t+1$. Докажем, что $a_{n+1} \in \Gamma(G_\tau)$ при $\tau = \tau_{q+1}, \ldots, t+p$. Предположим, что существует такое $\tau \in \{\tau_{q+1}, \ldots, t+p\}$, что $a_{n+1} \notin \Gamma(G_\tau)$. Поскольку $G_\tau \in \Gamma([F_{\tau-t}, a_{n+1}])$, то $G_\tau \in \Gamma(F_{\tau-t})$. Поэтому из условия $F_{\tau-t} \in H_n = H(T(A_n))$ следует, что $G_\tau \in \bigcup\limits_{j=1}^{t} \Gamma(S_j)$, чего не может быть, поскольку L_{n+1} является развёрткой и $\tau \geqslant \tau_{q+1} = t+1$. Из полученного противоречия вытекает, что $G_{t+1} = a_{n+1} \in \Gamma(G_\tau)$ при $\tau = \tau_{q+1}, \ldots, t+p$. Так как L_n является звёздной развёрткой триангуляции $T(A_n)$, то $G_{\tau_\mu} \in \Gamma(G_\tau)$ при $\mu = 1, \ldots, q+1$ и $\tau = \tau_\mu, \ldots, \tau_{\mu+1}-1$, где $\tau_{q+2} = t+p+1$. Следовательно, L_{n+1} является звёздной развёрткой триангуляции $T(A_{n+1})$. Лемма 8 доказана.

Таким образом, на вход РТФМ-алгоритма последовательно подаются точки $a_1, a_2, \ldots, a_N$ из $\mathbb{R}^d$, составляющие d-мерную точечную конфигурацию A_N в общем положении.

РТФМ-алгоритм выдаёт триангуляцию $TFM_{\mathcal{T}}(\widehat{A}_N) = T(A_N) \in \mathcal{T}(A_N)$ и её звёздную развёртку $STFM_{\mathcal{S}}(\widehat{A}_N) = L_N$, выполнив следующие шаги:

Шаг 1. Положить $T(A_{d+1}) = \{[A_{d+1}]\}$, $L_{d+1} = ([A_{d+1}])$, $H_{d+1} =$

$\Gamma_{d-1}([A_{d+1}])$, $E_{d+1} = \{\{F_1, F_2\} \mid F_1, F_2 \in H_{d+1},\ F_1 \neq F_2\}$ и для каждой грани $F \in H_{d+1}$ найти $b_F^{A_{d+1}}$.

Шаг 2. Последовательно для $n = d+1, \ldots, N-1$ выполнить итерацию РТФМ-алгоритма, построив $T(A_{n+1}) = TFM_{\mathcal{T}}(T(A_n), H_n, a_{n+1})$, $L_{n+1} = STFM_{\mathcal{S}}(L_n, H_n, a_{n+1})$, $(H_{n+1}, E_{n+1}) = TFM_{\partial}(H_n, E_n, a_{n+1})$ и $b_F^{A_{n+1}}$ для каждой грани $F \in H_{n+1}$.

Теорема 3. *Если $A_N = \{a_1, \ldots, a_N\} \subset \mathbb{R}^d$ является d-мерной точечной конфигурацией в общем положении, заданной последовательностью точек $\widehat{A}_N = (a_1, \ldots, a_N)$, то* РТФМ-*алгоритм строит с временно́й сложностью $O(N^{\lfloor d/2 \rfloor + 1}) + O(N^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor} \log N)$ звёздно разворачиваемую триангуляцию $T(A_N)$ и её звёздную развёртку L_N для точечной конфигурации A_N.*

Доказательство. Действительно, $T(A_N)$ является триангуляцией точечной конфигурации A_N и L_N является звёздной развёрткой триангуляции $T(A_N)$ в силу леммы 8.

Из теоремы 2 следует, что суммарная временна́я сложность выполнения шагов 1–3 на всех итерациях РТФМ-алгоритма не превосходит $O(N^{\lfloor d/2 \rfloor + 1})$.

Положим $H_n^- = \{F \in H_n \mid (b_F^{A_n}, \overline{a_{n+1}}) < 0\}$ при $n = d+1, \ldots, N-1$. Поскольку упорядочивание симплексов из H_n^- на шаге 4 производится с помощью сортировки слиянием, то, используя оценку её временно́й сложности (см., например, [1, стр. 82]), получаем, что временна́я сложность выполнения шага 4 итерации РТФМ-алгоритма при $n = d+1, \ldots, N-1$ не превосходит $O(|H_n^-| \log(|H_n^-|))$. Из [8] следует, что любая триангуляция d-мерной точечной конфигурации, состоящей из N точек, содержит не более $O(N^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor})$ симплексов. Так как вместе с этим $|T(A_N)| = 1 + \sum\limits_{n=d+1}^{N-1} |H_n^-|$ по построению ТФМ-алгоритма, то суммарная временна́я сложность выполнения шага 4 на всех итерациях РТФМ-алгоритма не превосходит $O(\sum\limits_{n=d+1}^{N-1} |H_n^-| \log(|H_n^-|))$, что не превосходит

$$O(|T(A_N)| \log(|T(A_N)|))$$

и, следовательно, не превосходит $O(N^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor} \log N)$.

Поэтому временна́я сложность РТФМ-алгоритма не превосходит $O(N^{\lfloor d/2 \rfloor + 1}) + O(N^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor} \log N)$. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.** Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир. 1979.
2. **Бренстед А.** Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988.
3. **Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.** Многогранники, графы, оптимизация. М: Наука, 1981.
4. **Моцкин Т. С., Райфа Х., Томпсон Дж. Л., Тролл Р. М.** Метод двойного описания // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 81–109.
5. **Понтрягин Л. С.** Основы комбинаторной топологии. М.: ОГИЗ, 1947.
6. **Препарата Ф., Шеймос М.** Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989.
7. **Черников С. Н.** Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.
8. **Шевченко В. Н.** О максимальных триангуляциях выпуклых политопов // Международная конференция «Дискретный анализ и исследование операций»: Материалы конференции (Новосибирск, 26 июня–1 июля 2000). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 163.
9. **Шевченко В. Н., Груздев Д. В.** Модификация алгоритма Фурье–Моцкина для построения триангуляции и её развёртки // Материалы XIII Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Пенза, 14–20 октября 2002 г.). Часть I. М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2002. С. 200–205.
10. **Шевченко В. Н., Груздев Д. В.** Модификация алгоритма Фурье–Моцкина для построения триангуляции // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2003. Сер. 2. Т. 10, № 1. С. 53–64.
11. **Bruggesser H., Mani P.** Shellable decompositions of cells and spheres // Math. Scand. 1971. V. 29. P. 197–205.
12. **Burger E.** Über homogene lineare Ungleichungssysteme // Zeitschrift Angewandte Math. und Mech. 1956. V. 36. P. 135–139.
13. **Grünbaum B.** Convex polytopes. N.Y.: Wiley, 1967.
14. **Lee C. W.** Regular triangulations of convex polytopes // Applied geometry and discrete mathematics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. P. 443–456. (DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. V. 4).
15. **Rudin M. E.** An unshellable triangulation of a tetrahedron // Bulletin Amer. Math. Soc. 1958. V. 64. P. 90–91.

16. Ziegler G. I. Lectures on convex polytopes. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

Адрес авторов:

Нижегородский гос. университет,
фак-т вычислит. матем. и кибернетики,
пр. Гагарина, 23,
603950 Нижний Новгород, Россия.
E-mail: shevgru@mail.ru, shev@uic.nnov.ru,
zny@uic.nnov.ru

Статья поступила
16 ноября 2005 г.