ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2006. Серия 2. Том 13, № 2. 3–20

УДК 519.8

ПРИБЛИЖЁННЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА d-ОДНОРОДНОГО СВЯЗНОГО ОСТОВНОГО ПОДГРАФА МАКСИМАЛЬНОГО ВЕСА В ПОЛНОМ ГРАФЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВЕСАМИ РЁБЕР*)

А. Е. Бабурин, Э. Х. Гимади

Предложен приближённый полиномиальный алгоритм для решения задачи поиска d-однородного связного остовного подграфа максимального веса в полном неориентированном взвешенном n-вершинном графе. Проведён вероятностный анализ алгоритма для решения задачи со случайными входными данными (весами рёбер) в случае равномерного распределения весов рёбер и в случае распределений минорирующего типа. Показано, что предложенный алгоритм временно́й сложности $O\big(n^2 + nd\ln n\big)$ находит асимптотически точное решение задачи при $d = o(n)$. В случае $d \leqslant n/\ln n$ асимптотически точное решение может быть получено с временно́й сложностью $O(n^2)$. Для минимизационной версии задачи к условию асимптотической точности модифицированного алгоритма добавляется дополнительное ограничение на величину разброса значений весов рёбер графа.

Введение

В данной статье исследуется естественное обобщение задачи коммивояжёра на максимум (см. [6]).

Задан полный неориентированный граф $G(V,E)$ без петель с n вершинами. Определена функция $w : E \to R^+$ и натуральное число d, $1 < d < n$. В графе G требуется найти связный остовный d-однородный подграф $\widetilde{G}$ максимального суммарного веса. При $d = 2$ это задача коммивояжёра на максимум.

В [1] для более общей задачи, когда степени вершин подграфа $\tilde{G}$ могут быть разными, предложен алгоритм с временно́й сложностью

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00395) и INTAS (грант 04–77–7173).

$O(Mn^2)$ (M — число рёбер в $\widetilde{G}$) и гарантированной относительной погрешностью $O\Big(\frac{1}{d(d-1)}\Big)$, где d — минимальная степень вершины искомого подграфа $\widetilde{G}$.

Для поиска d-однородного остовного связного подграфа максимального суммарного веса в предположении, что число вершин n в графе G кратно $d-1$, в [5] предложен приближённый алгоритм. Временна́я сложность алгоритма равна $O(n^2)$. В [4, 5] представлены результаты вероятностного анализа этого алгоритма в случае, когда входные данные (веса рёбер графа G) — случайные независимые переменные с одинаковой функцией равномерного распределения.

При анализе алгоритмов используются обозначения и определения из [2].

Суммарный вес рёбер оптимального решения задачи на входе I обозначим через $F^*(I)$. Суммарный вес рёбер решения, полученного с применением приближённого алгоритма A на входе I, обозначим через $F_A(I)$.

Алгоритм A *имеет оценки* $(\varepsilon_n, \delta_n)$ в классе K_n задач максимизации размерности n, когда при каждом n: $\mathbf{Pr}\{1 - \dfrac{F_A(I)}{F^*(I)} > \varepsilon_n\} \leqslant \delta_n$, где $\mathbf{Pr}\{J\}$ — вероятность события J, ε_n — *относительная погрешность*, δ_n — *вероятность несрабатывания* алгоритма A. Алгоритм называется *асимптотически точным* в классе задач $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, если существуют такие оценки $(\varepsilon_n,\, \delta_n)$, что $\varepsilon_n \to 0$ и $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

В статье описывается новый приближённый алгоритм с улучшенными оценками качества работы по сравнению с теми, что получены в [4, 5]. При этом удалось снять ограничение на то, что число вершин n в графе G кратно $d-1$. Проведён вероятностный анализ алгоритма на случайных исходных данных и получены условия асимптотической точности предложенного алгоритма как в случае равномерного распределения весов рёбер, так и в случае распределений минорирующего типа. Этот алгоритм имеет временну́ю сложность $O\big(n^2 + nd\ln n\big)$ и позволяет получать асимптотически точное решение при $d = o(n)$. Таким образом, при $d \leqslant n/\ln n$ асимптотически точное решение может быть получено с временно́й сложностью $O(n^2)$.

В заключение статьи алгоритм модифицируется на случай минимизационной версии задачи. К условию асимптотической точности модифицированного алгоритма добавляется дополнительное ограничение на разброс весов рёбер графа.

1. Приближённый алгоритм решения задачи

Заметим, что решение задачи существует, когда nd чётно и $d < n$. Для обоснования этого факта рассмотрим следующую конструкцию допустимого решения. Пусть вершины графа G занумерованы числами от 1 до n. При чётном d считаем, что ребро (i, j) входит в подграф $\tilde{G}$ графа G только при $|i-j| \leqslant d/2$ или $|i-j| \geqslant n-d/2$. При нечётном d считакм, что ребро (i, j) входит в подграф $\tilde{G}$ графа G только при $|i-j| < d/2$, или $|i-j| > n-d/2$, или $|i-j| = n/2$. Очевидно, что построенный таким образом подграф $\tilde{G}$ является связным, остовным и d-однородным.

Пусть $m = \lfloor n/(d-1) \rfloor$, $q = n(\bmod\ (d-1))$, $n' = n - q$.

Разобьём квадратную матрицу порядка n' расстояний w_{ij} между вершинами $1, \ldots, n'$ на $d-1$ квадратную матрицу D_r размера m, $1 \leqslant r \leqslant d-1$, и $2(d-2)$ прямоугольных матриц H_r и V_r, $1 \leqslant r \leqslant d-2$. Тогда

$$D_r = \{(w_{jk}) \,|\, (r-1)m < j \leqslant rm,\ (r-1)m < k \leqslant rm\},\ 1 \leqslant r \leqslant d-1;$$

$$H_r = V_r^{\tau} = \{(w_{jk}) \,|\, (d-r-1)m < j \leqslant (d-r)m,\ (d-r)m < k \leqslant n'\}, \\ 1 \leqslant r \leqslant d-2.$$

Это разбиение изображено на рис. 1.

<table>
<tr><td>D_1</td><td colspan="4">H_{d-2}</td></tr>
<tr><td></td><td>D_2</td><td colspan="3">H_{d-3}</td></tr>
<tr><td rowspan="3">V_{d-2}</td><td rowspan="3">V_{d-3}</td><td colspan="3">$\ddots$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>D_{d-2}</td><td>H_1</td></tr>
<tr><td>V_1</td><td>D_{d-1}</td></tr>
</table>

Рис. 1. Блочное представление матрицы расстояний

Алгоритм A решения задачи.

Шаг 1. Для $r = 1, \ldots, d-1$ эвристикой «Иди в наиболее удалённый город» находится приближённое решение задачи TSP^r коммивояжёра на максимум для матрицы расстояний D_r, задающей расстояния на множестве вершин с номерами из отрезка $[(r-1)m+1, rm]$. Выбранное ребро, соединяющее последнюю вершину обхода эвристики и вершину с номером $(r-1)m+1$, обозначим через e_r.

Шаг 2. В каждой матрице H_r, $1 \leqslant r \leqslant d-2$, выбирается по r элементов в каждой строке и по одному элементу в каждом столбце жадной

эвристикой (выбором максимальных элементов в каждой строке). При этом порядок рассмотрения строк, в которых выбираются элементы, выбран тем же, что и порядок обхода вершин $(d-r-2)m+1, \ldots, (d-r-1)m$ циклом, построенным на шаге 1 для задачи TSP^{d-r-1}. Множество рёбер, соответствующих выбранным элементам последней рассмотренной строки в каждой матрице H_r, вместе с ребром e_{d-r-1} обозначим через $E_{r+1} = \{e_1^{r+1}, \ldots, e_{r+1}^{r+1}\}$.

Шаг 3. Наряду с выбранными элементами матриц $H_1, \ldots, H_{d-2}$ выбираются также симметричные им элементы матриц $V_1, \ldots, V_{d-2}$.

Шаг 4. Выбранные на шагах 2 и 3 элементы матриц H_r, V_r, а также циклы, построенные на шаге 1, задают рёбра подграфа $\widetilde{G}(V, \widetilde{E})$. Пусть $K = \{v_1, \ldots, v_q\}$ — множество вершин с номерами $n-q+1, \ldots, n$ исходного графа.

Если d чётно, то множество $\widetilde{E}$ рёбер графа $\widetilde{G}$ дополним произвольным циклом, содержащим вершины множества K. Если d нечётно, то множество $\widetilde{E}$ рёбер графа $\widetilde{G}$ дополним произвольным совершенным паросочетанием на множестве вершин K.

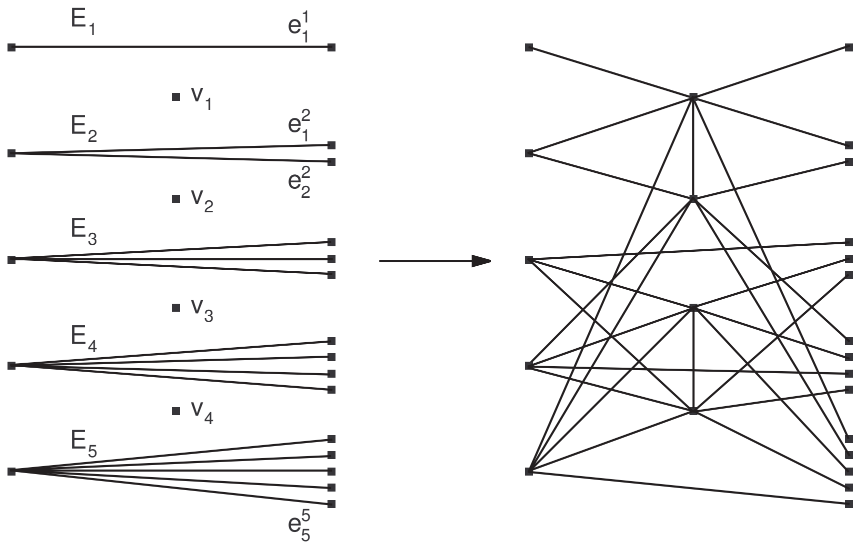

Рис. 2. Пример преобразования множества выбранных рёбер на шаге 6 при $n = 22$, $q = 4$, $d = 7$

Определим следующую *процедуру* $B(r, j, s)$: Ребро e_j^r удаляется из множества $\widetilde{E}$, а рёбра (a, v_s) и (v_s, b) добавляются в множество $\widetilde{E}$. (Здесь

через a и b обозначены концевые вершины ребра e^r_j.)

Положим $\widetilde{d} = \lfloor d/2 \rfloor$.

Шаг 5. При $q \lesseqgtr 2$ выполняются процедуры $B(r+1, s, s)$ для любых r и q, где $1 \leqslant r \leqslant \widetilde{d}$ и $1 \leqslant s \leqslant q$.

Шаг 6. При $q > 2$ выполняются процедуры $B(r, s, s)$ для любых s и r, где $1 \leqslant s \leqslant \min\{r, q\}$, $1 \leqslant r < \widetilde{d}$, а также процедуры $B(r, s-q+r, s)$ для любых s и r, где $2\widetilde{d} - r \leqslant s \leqslant q$, $\widetilde{d} \leqslant r \leqslant d-2$.

Граф $\widetilde{G}(V, \widetilde{E})$ является результатом работы алгоритма.

Лемма 1. *Алгоритм A за время $O(n^2 + nd \ln n)$ строит d-однородный связный остовный подграф исходного графа.*

Доказательство. По выбранным на шагах 2 и 3 элементам в матрицах H_r и V_r определяются по $d-2$ ребра, инцидентных каждой вершине с номерами $1, \dots, n'$. Кроме того, через каждую из вершин $1, \dots, n'$ проходит по одному разу один из циклов, построенных на шаге 1. Следовательно, к началу шага 4 степень каждой из вершин $1, \dots, n'$ в построенном подграфе равна d. Построение циклов на шаге 1 гарантирует, что при любом $r = 1, \dots, d-2$ каждая группа вершин с номерами из целочисленного сегмента $[(r-1)m+1,\, rm]$ принадлежит одной компоненте связности подграфа. Выбранные на шагах 2 и 3 рёбра соединяют эти группы вершин. Тем самым, построенный на шагах 1–3 n'-вершинный подграф является d-однородным, остовным и связным.

Из чётности произведения nd следует, что $r \leqslant d-2$ при чётном d и $r \leqslant d-3$ при нечётном d. В результате выполнения шагов 4–6 степени вершин множества K стали равными d, а степени остальных вершин сохранили свои значения, равные d. При этом построенный n-вершинный подграф является остовным, d-однородным и не утратил свойства связности.

Оценим временну́ю сложность работы алгоритма A. Нетрудно видеть, что временна́я сложность алгоритма определяется шагом 2. На этом шаге в каждой матрице H_r, $1 \leqslant r \leqslant d-2$, выбирается по r максимальных элементов в каждой строке, состоящей не более чем из rm элементов.

Для оценки числа элементарных действий заметим, что r максимальных (минимальных) элементов в массиве, состоящем из n чисел, можно выделить за время $O(n + r \ln n)$. Это можно сделать, разместив сначала все числа в вершинах двоичного дерева-пирамиды (за время $O(n)$), а затем каждый очередной по величине элемент становится доступным после перемещения его в корневую вершину дерева за время $O(\ln n)$ (определяемое высотой дерева).

Поскольку общее число строк во всех матрицах H_r, $1 \leqslant r \leqslant d-2$, не превышает n, а $r < d$, то временна́я сложность шага 2 определяется как $O(n^2 + nd\ln n)$. Лемма 1 доказана.

2. Вероятностный анализ алгоритма A

Опишем общие свойства алгоритма A в случае матрицы расстояний с элементами, принимающими значения из отрезка $[0,1]$ случайно и независимо с функцией распределения Ψ.

Замечание 1. Везде далее при обозначении случайных величин верхние индексы используются только для указания различия и независимости величин с разными верхними индексами. Нижние индексы используются для указания принадлежности случайной величины к тому или иному распределению.

Замечание 2. При $d \leqslant 3$ работа алгоритма A фактически совпадает с работой алгоритма из работы [4], для которого были установлены соответствующие условия асимптотической точности. Поэтому при дальнейшем анализе мы ограничиваемся рассмотрением только однородных графов степени $d \geqslant 4$.

Лемма 2. *Для всякого* $r = 1,\ldots,d{-}1$ *суммарный вес* S_r *рёбер простого цикла, обходящего вершины* $(r-1)m+1,\ldots,rm$ *графа, построенного на шаге 1 алгоритма* A, *имеет такое же вероятностное распределение, как и величина* $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \varphi_i^r + \xi^r$. *Здесь* φ_k^r — *максимум из* k *независимых случайных величин, имеющих распределение* Ψ, ξ^r — *независимая случайная величина с тем же распределением* Ψ.

Доказательство. При выполнении эвристики «Иди в наиболее удалённый город» сначала выбирается максимальный элемент в первой строке матрицы расстояний, исключая диагональный. Вес выбранного ребра цикла есть случайная величина φ_{m-1}^r. Затем в новой строке (соответствующей концу выбранного ребра) ищется максимальный элемент, исключая диагональный и выбранный элемент первого столбца, так как вершина с номером $(r-1)m+1$ уже пройдена циклом. Вес выбранного ребра есть случайная величина φ_{m-2}^r. Этот процесс продолжается до тех пор, пока на итерации $m-1$ не остаётся всего одна вершина из отрезка $[(r-1)m+1, rm]$, которая ещё не пройдена циклом. Суммарный вес двух рёбер, замыкающих цикл через эту вершину, равен сумме случайных величин φ_1^r и ξ^r. Суммируя величины весов рёбер построенного цикла, получим утверждение леммы. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любого* $r = 1,\ldots,d{-}2$ *суммарный вес* Q_r *рёбер графа,*

соответствующих (выбранным на шаге 2 алгоритма A) элементам матриц расстояний H_r, имеет такое же вероятностное распределение, как и величина $\sum\limits_{i=1}^{m}\zeta^r_{r,ir}$. Здесь $\zeta^r_{j,k}$ — сумма j старших порядковых статистик в выборке размера k для распределения Ψ.

Доказательство. В первой строке матрицы H_r выбирается r наибольших элементов. Так как число элементов этой строки равно rm, получим, что сумма выбранных элементов — случайная величина $\zeta^r_{r,mr}$. В следующей строке также выбирается r наибольших элементов. Но требование выбора ровно одного элемента в каждом столбце ограничивает множество рассматриваемых элементов. Поэтому сумма выбранных элементов следующей строки матрицы H_r имеет то же распределение, что и случайная величина $\zeta^r_{r,(m-1)r}$. Проводя подобные рассуждения для остальных строк матрицы H_r (в порядке их рассмотрения при выполнении алгоритма), получим утверждение леммы. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Значение $F_A(I)$ целевой функции на решении, построенном алгоритмом A, имеет то же распределение Ψ, что и величина $\sum\limits_{r=1}^{d-1} S_r + \sum\limits_{r=1}^{d-2} Q_r + \sum\limits_{r=1}^{qd/2}\tilde{\xi}_r$, где $\tilde{\xi}_r$, $r = 1,\dots,qd/2$, — независимые случайные величины с функцией распределения Ψ.*

Доказательство. На шагах 4–6 алгоритма к выбранным рёбрам добавляется $qd/2$ новых рёбер, при этом некоторые выбранные ранее рёбра заменяются на другие. Однако веса как новых, так и заменяемых рёбер являются независимыми случайными величинами с распределением Ψ. Лемма 4 доказана.

3. Случай независимого равномерного распределения элементов матрицы расстояний

Основной результат дальнейшего вероятностного анализа опирается на на использовании следующей теоремы из [4].

Теорема Петрова. *Пусть $X_1,\dots,X_n$ — независимые случайные величины и $S = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Пусть существуют положительные постоянные $g_1,\dots,g_n$ и T такие, что $\mathbf{E}e^{tX_k} \leqslant e^{\frac{1}{2}g_k t^2}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, при любом t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Положим $U = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$. Тогда*

$$\mathbf{Pr}\{S > x\} \leqslant \begin{cases} e^{-x^2/2U} & \text{при } 0 \leqslant x < UT, \\ e^{-Tx/2} & \text{при } x \geqslant UT. \end{cases}$$

Нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Пусть $X_{(1)}(k), \ldots, X_{(r)}(k)$ — r младших порядковых статистик в выборке из k элементов, независимо и равномерно распределенных на отрезке $[0,1]$. Через EX обозначим математическое ожидание случайной величины X.

Лемма 5. *При $k \geqslant 1$ и $r \leqslant k$ справедливо равенство*

$$\mathbf{E}e^{tX_{(r)}(k)} = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{r-1}(i+j)}{\prod\limits_{m=1}^{i}(kr+m)}t^i.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $r=1$. Поскольку для равномерного распределения $F_{X_{(1)}(k)}(x) = 1-(1-x)^k$, имеем

$$Ee^{tX_{(1)}(k+1)} = \int\limits_0^1 e^{tx}dF_{X_{(1)}(k+1)}(x) = \int\limits_0^1 e^{tx}(k+1)(1-x)^k dx$$
$$= \frac{k+1}{t}\Big(k\int\limits_0^1 e^{tx}(1-x)^{k-1}dx - 1\Big) = \frac{k+1}{t}(Ee^{tX_{(1)}(k)} - 1).$$

Дальнейшее доказательство проведём индукцией по k и r.

При $k=r=1$ имеем

$$Ee^{tX_{(1)}(1)} = \int\limits_0^1 e^{tx}dx = \frac{e^t-1}{t} = \frac{1}{0!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{(i+1)!}.$$

Считая утверждение леммы доказанным для $r=1$ и $k \leqslant n$, при $r=1$ и $k=n+1$ имеем

$$Ee^{tX_{(1)}(n+1)} = \frac{n+1}{t}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{\prod\limits_{m=1}^{i}(n+m)} - 1\Big)$$
$$= \frac{n+1}{t}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{\prod\limits_{m=1}^{i}(n+m)} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{\prod\limits_{m=1}^{i}(n+1+m)}.$$

Для произвольных $k \geqslant 1, r \leqslant k$ имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}e^{tX_{(r)}(k)} &= k\binom{k-1}{r-1}\int\limits_0^1 e^{tx}x^{r-1}(1-x)^{k-r}dx \\
&= k\binom{k-1}{r-1}\int\limits_0^1 e^{tx}x^{r-2}\Big(1-(1-x)\Big)(1-x)^{k-r}dx \\
&= \frac{k\binom{k-1}{r-1}}{(k-1)\binom{k-2}{r-2}}(k-1)\binom{k-2}{r-2}\int\limits_0^1 e^{tx}x^{r-2}(1-x)^{k-r}dx \\
&- \frac{k\binom{k-1}{r-1}}{k\binom{k-1}{r-2}}k\binom{k-1}{r-2}\int\limits_0^1 e^{tx}x^{r-2}(1-x)^{k-r+1}dx \\
&= \frac{k}{r-1}Ee^{tX_{(r-1)}(k-1)} - \frac{k-r+1}{r-1}Ee^{tX_{(r-1)}(k)} \\
&= \frac{k}{(r-1)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+1)\cdots(i+r-2)}{k(k+1)\cdots(k+i-1)}t^i \\
&- \frac{k-r+1}{(r-1)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+1)\cdots(i+r-2)}{(k+1)\cdots(k+i)}t^i \\
&= \frac{1}{(r-1)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+1)\ldots(i+r-1)}{(k+1)\ldots(k+i)}t^i.
\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Положим

$$g_k = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{при } k=1, \\ \frac{7}{72} & \text{при } k=2, \\ \frac{1}{(k+1)^2} & \text{при } 2<k\leqslant n. \end{cases}$$

Лемма 6. *Пусть* $t \leqslant 1$. *Тогда* $Ee^{t(X_{(1)}(k)-EX_{(1)}(k))} \leqslant e^{g_k t^2/2}$ *при любом* $k \geqslant 1$.

Доказательство. Функция распределения случайной величины $X_{(1)}(k)$ имеет вид $F_{X_{(1)}(k)}(x) = 1-(1-x)^k$. Поэтому $\mathbf{E}X_{(1)}(k) = 1/(k+1)$.

При $k=1$ имеем

$$Ee^{t(X_{(1)}(k)-EX_{(1)}(k))} = e^{-\frac{t}{2}}Ee^{tX_{(1)}(k)} = e^{-\frac{t}{2}}\frac{e^t-1}{t} = \frac{e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}}{t}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2i} \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(\frac{t^2}{24}\right)^{i} \leqslant \exp\Big\{\frac{1}{12}\cdot\frac{t^2}{2}\Big\}.$$

Пусть $k = 2$. Тогда $Ee^{t(X_{(1)}(k)-EX_{(1)}(k))} = e^{-\frac{t}{3}}Ee^{tX_{(1)}(k)}$. Используя лемму 5, имеем $Ee^{tX_{(1)}(2)} = 2\frac{e^t-1-t}{t^2}$. Поэтому

$$Ee^{t(X_{(1)}(k)-EX_{(1)}(k))} = 2e^{-\frac{t}{3}}\frac{e^t-1-t}{t^2} = 2e^{-\frac{t}{3}}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{t^{i-2}}{i!}$$

$$= e^{-\frac{t}{3}}\left(1+\frac{t}{3}+\frac{t^2}{12}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{t}{5}\right)^i\right) = e^{-\frac{t}{3}}\left(1+\frac{t}{3}+\frac{5t^2}{48}\right)$$

$$\leqslant e^{-\frac{t}{3}}\left(1+\frac{t}{3}+\frac{t^2}{18}\right)\left(1+\frac{7t^2}{144}\right) \leqslant e^{-\frac{t}{3}}e^{\frac{t}{3}}\left(1+\frac{7t^2}{144}\right) \leqslant e^{\frac{7}{72}\frac{t^2}{2}}.$$

Пусть $k > 2$ и $\alpha = \frac{t}{k+1}$. Тогда

$$Ee^{tX_{(1)}(k)} \leqslant 1+\alpha+\alpha^2\frac{k+1}{k+2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{t}{(k+3)}\right)^i = 1+\alpha$$

$$+\alpha^2\frac{(k+1)}{(k+2)(1-\frac{t}{k+3})} \leqslant 1+\alpha+\alpha^2 \leqslant \exp\Big\{\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\Big\}$$

$$= \exp\Big\{\frac{t}{k+1}\Big\}\cdot\exp\Big\{\frac{t^2}{2(k+1)^2}\Big\}.$$

Следовательно, $Ee^{t(X_{(1)}(k)-EX_{(1)}(k))} \leqslant \exp\Big\{\frac{t^2}{2(k+1)^2}\Big\}$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть*

$$J_k(u) = \int_0^u e^{tx_k}dx_k\int_0^{x_k} e^{tx_{k-1}}dx_{k-1}\dots\int_0^{x_2} e^{tx_1}dx_1.$$

Тогда $J_k(u) = \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{e^{tu-1}}{t}\right)^k$ *при любом* $k \geqslant 1$.

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по k. При $k = 1$ имеем $J_1(u) = \displaystyle\int_0^u e^{tX_1}dX_1 = \frac{e^{tu}-1}{t}$.

Предполагая, что утверждение леммы доказано для любого k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, при $k = n$ получим

$$J_n(u) = \int\limits_0^u e^{tx_n} J_{n-1}(x_n)dx_n = \frac{1}{t^n(n-1)!}\int\limits_0^u \left(e^{tx}-1\right)^{n-1} de^{tx}$$
$$= \frac{1}{t^n n!}\left(e^{tu}-1\right)^n = \frac{1}{n!}\left(\frac{e^{tu-1}}{t}\right)^n.$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Неравенство* $\dfrac{e^x-1}{x} \leqslant \exp\left(\dfrac{1}{2}(1+\rho)x\right)$, *где* $\rho = \frac{1}{48}$, *справедливо при любом* x, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$.

Доказательство.

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^{x/2}}{2}\frac{(e^{x/2}-e^{-x/2})}{x/2} = \frac{e^{x/2}}{x/2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$
$$= e^{x/2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2i}}{(2i+1)!} \leqslant e^{x/2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(x/2)^i(\frac{1}{8})^i}{6^i i!}$$
$$= e^{x/2}\cdot e^{x/96}.$$

Далее при $\rho = 1/48$ имеем $e^{\frac{1}{2}(1+\rho)x} = e^{x/2+\rho x/2} = e^{x/2+x/96}$. Из последних двух соотношений следует утверждение леммы. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Неравенство* $Ee^{t\left(X_{(1)}(k)+\ldots+X_{(r)}(k)\right)} \leqslant Ee^{\frac{1}{2}(1+\rho)(r+1)tX_{(r)}(k)}$ *справедливо при любом* x, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$.

Доказательство. Воспользуемся формулой совместной функции распределения статистик $X_{(1)}(k), X_{(2)}(k), \ldots, X_{(r)}(k)$ при $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_r$, $1 \leqslant r \leqslant k$:

$$f_{1,2,\ldots,r}(x_1,\ldots,x_r) = \frac{k!}{(k-r)!}p(x_1)\ldots p(x_r)\Big(1-p(x_r)\Big)^{k-r}$$

По определению математического ожидания имеем

$$Ee^{t\left(X_{(1)}(k)+\ldots+X_{(r)}(k)\right)}$$
$$= \int\limits_0^1\int\limits_0^{x_r}\ldots\int\limits_0^{x_2} e^{t(x_1+\ldots+x_r)}f_{1,2,\ldots,r}(x_1,\ldots,x_r)dx_1dx_2\ldots dx_r.$$

В случае равномерного распределения с учётом леммы 7 имеем

$$
\begin{aligned}
&Ee^{t\left(X_{(1)}(k)+\ldots+X_{(r)}(k)\right)}\\
&\qquad= \int\limits_0^1 e^{tx_r}(1-x_r)^{k-r}dx_r \int\limits_0^{x_r} e^{tx_{r-1}}dx_{r-1}\ldots \int\limits_0^{x_2} e^{tx_1}dx_1\\
&\qquad= \tfrac{k!}{(k-r)!}\int\limits_0^1 e^{tu}(1-u)^{k-r}J_{r-1}(u)du\\
&\qquad= k\tbinom{k-1}{r-1}\int\limits_0^1 e^{tu}\left(\tfrac{e^{tu}-1}{t}\right)^{r-1}(1-u)^{k-r}du\\
&\qquad= k\tbinom{k-1}{r-1}\int\limits_0^1 e^{tu}\left(\tfrac{e^{tu}-1}{tu}\right)^{r-1}u^{r-1}(1-u)^{k-r}du.
\end{aligned}
$$

Используя лемму 8 при $x = tu$, получим

$$
Ee^{t\left(X_{(1)}(k)+\ldots+X_{(r)}(k)\right)} \leqslant k\binom{k-1}{r-1}\int\limits_0^1 e^{tu}e^{(1+\rho)(r-1)\frac{tu}{2}}u^{r-1}(1-u)^{k-r}du.
$$

С учётом неравенства $tu+(1+\rho)(r-1)\frac{tu}{2} \leqslant (1+\rho)(r+1)\frac{tu}{2}$ и определения математического ожидания величины $e^{tX_{(r)}(k)}$:

$$
\mathbf{E}e^{tX_{(r)}(k)} = k\binom{k-1}{r-1}\int\limits_0^1 e^{tx}x^{r-1}(1-x)^{k-r}dx,
$$

получаем требуемое неравенство

$$
\begin{aligned}
Ee^{t\left(X_{(1)}(k)+\ldots+X_{(r)}(k)\right)} &\leqslant k\binom{k-1}{r-1}\int\limits_0^1 e^{(1+\rho)(r+1)\frac{tu}{2}}u^{r-1}(1-u)^{k-r}du\\
&= Ee^{(1+\rho)(r+1)\frac{t}{2}X_{(r)}(k)}.
\end{aligned}
$$

Лемма 9 доказана.

Для произвольных натуральных r и k положим $\alpha_{rk} = \dfrac{r(r+1)}{2(kr+1)}$, $\tilde{\alpha}_{rk} = (1+\rho)\alpha_{rk}$ и $g_{rk} = \dfrac{2}{3}\,\tilde{\alpha}_{rk}^2$.

Лемма 10. *При $r \geqslant 2$ и $t \leqslant \frac{1}{r+2}$ справедливо неравенство*

$$
Ee^{t\left(X_{(1)}(k)+\ldots+X_{(r)}(k)\right)} \leqslant e^{\tilde{\alpha}_{rk}t}e^{\frac{g_{rk}t^2}{2}}.
$$

Доказательство. Так как $r \geqslant 2$, то при $k > 1$ согласно леммам 9 и 5 имеем

$$Ee^{t\left(X_{(1)}(k)+\ldots+X_{(r)}(k)\right)} \leqslant Ee^{(1+\rho)(r+1)\frac{t}{2}X_{(r)}(k)}$$

$$\leqslant \frac{1}{(r-1)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{r-1}(i+j)}{\prod\limits_{m=1}^{i}(kr+m)}\left((1+\rho)(r+1)\frac{t}{2}\right)^{i}$$

$$\leqslant 1+\tilde{\alpha}_{rk}t+\frac{r+1}{2r}(\tilde{\alpha}_{rk}t)^2\sum_{i=0}^{\infty}h_{rk}^{i} \leqslant 1+\tilde{\alpha}_{rk}t+\frac{3(\tilde{\alpha}_{rk}t)^2}{4(1-h_{rk})},$$

где $h_{rk} = \dfrac{(r+2)}{3r}\dfrac{(kr+1)}{(kr+3)}\tilde{\alpha}_{rk}t$.

С учётом того, что при $k > 1$ из $t \leqslant \dfrac{1}{r+2}$ следует неравенство $h_{rk} \leqslant \dfrac{1}{10}$, окончательно получаем

$$Ee^{t\left(X_{(1)}(k)+\ldots+X_{(r)}(k)\right)} \leqslant 1+\tilde{\alpha}_{rk}t+\frac{5}{6}(\tilde{\alpha}_{rk}t)^2$$

$$\leqslant \left(1+\tilde{\alpha}_{rk}t+\frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_{rk}t)^2\right)\left(1+\frac{1}{3}(\tilde{\alpha}_{rk}t)^2\right) \leqslant e^{\tilde{\alpha}_{rk}t}e^{\frac{g_{rk}t^2}{2}}.$$

Лемма 10 доказана.

Следствие. *При $r \geqslant 2$ и $t \leqslant 1/(r+2)$ для центрированных случайных величин $\widetilde{X}_{(*)}(*)$ имеет место неравенство*

$$Ee^{t\left(\widetilde{X}_{(1)}(k)+\ldots+\widetilde{X}_{(r)}(k)-\rho\frac{r(r+1)}{2(kr+1)}\right)} \leqslant e^{\frac{g_{rk}t^2}{2}}.$$

Определим класс $\mathcal{K}_{max}(a,b)$ задач поиска максимального (относительно суммарного веса рёбер) d-регулярного связного остовного подграфа в полном неориентированном графе с элементами матрицы расстояний, являющимися независимыми случайными величинами, распределёнными равномерно на отрезке $[a,b]$.

Теорема 1. *Алгоритм A решения задач из класса $\mathcal{K}_{max}(0,1)$ находит приближённое решение с оценками относительной погрешности $\widetilde{\varepsilon}_n = \dfrac{\ln\frac{n}{d-1}}{\frac{n}{d-1}}\left(1+\dfrac{q}{n}\right)$ и вероятности несрабатывания $\widetilde{\delta}_n = \left(\dfrac{d-1}{n}\right)^{\frac{\chi(d)}{2d}}$,*

где $0 \leqslant q < d-1$, $\chi(d) = \frac{1}{4}(d-2)\Bigg(d-3-\rho(d-1)\Bigg)$.

Доказательство. Оптимальное значение целевой функции $F^*(I)$ на входе I может быть оценено как $F^*(I) \leqslant nd/2$.

Сначала рассмотрим случай, когда $q = 0$. Тогда $n' = n$. Заметим, что получаемое в результате работы алгоритма A значение целевой функции

$$F_A(I) = \sum_{r=1}^{d-1}\Big(\sum_{k=1}^{m-1}\varphi_k^r + \xi^r\Big) + \sum_{r=1}^{d-2}\sum_{k=1}^{m}\zeta_{r,kr}^r$$

является случайной величиной, равной сумме соответствующих старших порядковых статистик, выбираемых на шагах 1 и 2 алгоритма A.

С другой стороны, в случае равномерного распределения элементов матрицы имеет место совпадение функций распределения случайных величин $F_A(I)$ и $(nd/2-\Theta)$, где случайная величина

$$\Theta = \sum_{r=1}^{d-1}\Big(\sum_{k=1}^{m-1}X_{(1)}^{r,k,\varphi}(k) + X_{(1)}^{r,m,\xi}(1)\Big) + \sum_{r=1}^{d-2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}X_{(j)}^{r,k,\zeta}(kr)$$

равна сумме соответствующих младших порядковых статистик.

Оценим математическое ожидание этой величины:

$$E\Theta = \sum_{r=1}^{d-1}\Big(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\Big) + \sum_{r=1}^{d-2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\frac{j}{kr+1} \leqslant \frac{d^2+3d-6}{4}\ln m$$

и сумму коэффициентов g_k, $g_{k,kr}$:

$$\sum_{r=1}^{d-1}\Big(\sum_{k=1}^{m-1}g_k + g_1\Big) + \sum_{r=1}^{d-2}\sum_{k=1}^{m}g_{r,kr} \leqslant 0{,}1d^3 + 0{,}55d.$$

Центрируя случайную величину Θ, получим

$$\widetilde{\Theta} = \Theta - E\Theta = \sum_{r=1}^{d-1}\Big(\sum_{k=1}^{m-1}\widetilde{X}_{(1)}^{r,k,\varphi}(k) + \widetilde{X}_{(1)}^{r,m,\xi}(1)\Big) + \sum_{r=1}^{d-2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\widetilde{X}_{(j)}^{r,k,\zeta}(kr).$$

С учётом сказанного о случайных величинах $F_A(I)$ и Θ, оценим сверху

вероятность несрабатывания алгоритма A при $\varepsilon_n = \ln m/m$:

$$\mathbf{Pr}\Big\{1-\frac{F_A(I)}{F^*(I)}>\varepsilon_n\Big\}\leqslant\mathbf{Pr}\Big\{1-\frac{2F_A(I)}{nd}>\varepsilon_n\Big\}=\mathbf{Pr}\Big\{\Theta>\frac{nd}{2}\varepsilon_n\Big\}$$

$$=\mathbf{Pr}\Big\{\widetilde{\Theta}>\frac{nd}{2}\frac{\ln m}{m}-E\Theta\Big\}\leqslant\mathbf{Pr}\Big\{\widetilde{\Theta}>\frac{d(d-1)}{2}\ln m-\frac{d^2+3d-6}{4}\ln m\Big\}$$

$$=\mathbf{Pr}\Big\{\widetilde{\Theta}>\frac{(d-2)(d-3)}{4}\ln m\Big\}=\mathbf{Pr}\Big\{\widetilde{\Theta}-\sum_{r=1}^{d-2}\sum_{k=1}^{m}\rho\frac{r(r+1)}{2(kr+1)}$$

$$>\frac{(d-2)(d-3)}{4}\ln m-\sum_{r=1}^{d-2}\sum_{k=1}^{m}\rho\frac{r(r+1)}{2(kr+1)}\Big\}$$

$$\leqslant\mathbf{Pr}\Big\{\widetilde{\Theta}-\sum_{r=1}^{d-2}\sum_{k=1}^{m}\rho\frac{r(r+1)}{2(kr+1)}>\frac{(d-2)(d-3)}{4}\ln m$$

$$-\rho\frac{(d-2)(d+1)}{4}\ln m\Big\}$$

$$=\mathbf{Pr}\Big\{\sum_{r=1}^{d-1}\Big(\sum_{k=1}^{m-1}\widetilde{X}^{r,k,\varphi}_{(1)}(k)+\widetilde{X}^{r,m,\xi}_{(1)}(1)\Big)+\sum_{r=1}^{d-2}\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{r}\widetilde{X}^{r,k,\zeta}_{(j)}(kr)$$

$$-\rho\frac{r(r+1)}{2(kr+1)}\Big)>\chi(d)\ln m\Big\}.$$

Пусть $x=\chi(d)\ln m,\ T=\frac{1}{d}$ и

$$U=\sum_{r=1}^{d-1}(\sum_{k=1}^{m-1}g_k+g_1)+\sum_{r=1}^{d-2}\sum_{k=1}^{m}g_{r,kr}\leqslant 0{,}1d^3+0{,}55d.$$

Учитывая леммы 6 и 10, применим теорему Петрова для суммы случайных величин $\widetilde{X}^{r,k,\varphi}_{(1)}(k)$ при любых k и r, где $1\leqslant k<m,\ 1\leqslant r<d$; $\widetilde{X}^{r,m,\xi}_{(1)}(1)$ при любом r, $1\leqslant r<d$; $\Big(\widetilde{X}^{r,k,\zeta}_{(j)}(kr)-\dfrac{\rho(r+1)}{2(kr+1)}\Big)$ при любых j, k и r, где $1\leqslant j\leqslant r$, $1\leqslant k\leqslant m$, $1\leqslant r\leqslant d-2$.

Поскольку $UT\leqslant 0{,}1d^2+0{,}55\leqslant x$, убеждаемся в том, что алгоритм A даёт решение с оценкой относительной погрешности $\varepsilon_n=\dfrac{d-1}{n}\ln\dfrac{n}{d-1}$ при оценке вероятности несрабатывания, равной

$$\delta_n=e^{-\frac{x}{2d}}=\exp\Big(-\frac{\chi(d)\ln m}{2d}\Big)=\Big(\frac{d-1}{n}\Big)^{\frac{\chi(d)}{2d}}.$$

Рассматривая случай $q > 0$ (напомним, что $q < d-1$), аналогично получим следующие оценки $(\tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\delta}_n)$ алгоритма A: $\tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_n(1+\frac{q}{n})$ и $\tilde{\delta}_n = \delta_n$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. *Алгоритм A решения задач из класса $\mathcal{K}_{max}(0,1)$ является асимптотически точным при $d = o(n)$.*

4. Случай минорирующей функции распределения независимо заданных элементов матрицы расстояний

Рассмотрим класс $\widetilde{\mathcal{K}}_{max}(0,1)$ матриц расстояний, элементы которых распределены независимо на отрезке $[0,1]$ с функцией распределения $F(x)$ такой, что $F(x) \leqslant x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда распределение $F(x)$ совпадает с распределением величины $f(\xi)$, где $\xi \in [0,1]$, f — такая монотонно возрастающая функция, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(x) \geqslant x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Теорема 3. *Алгоритм A решения исходной задачи является асимптотически точным для задач из класса $\widetilde{\mathcal{K}}_{max}(0,1)$ при $d = o(n)$.*

Доказательство. Проводя выкладки для величины $\tilde{\delta}_n(\tilde{\varepsilon}_n)$ аналогично схеме доказательства теоремы 1, для класса задач $\mathcal{K}_{max}(0,1)$ получим

$$\tilde{\delta}_n(\tilde{\varepsilon}_n) \leqslant \mathbf{Pr}\left\{1 - \frac{2\Big(\sum\limits_{r=1}^{d-1}(\sum\limits_{i=1}^{m-1}\tilde{\varphi}_i^r + \tilde{\xi}^r) + \sum\limits_{r=1}^{d-2}\sum\limits_{i=1}^{m}\tilde{\zeta}_{r,ir}^r\Big)}{nd} > \tilde{\varepsilon}_n\right\},$$

где $\tilde{\varphi}_k^r$ — максимум из k независимых случайных величин распределения $F(x)$; $\tilde{\xi}^r$ — независимая случайная величина с той же функцией распределения $F(x)$; $\tilde{\zeta}_{j,k}^r$ — сумма j старших порядковых статистик в выборке размера k для распределения $F(x)$.

Пусть φ_k^r, ξ^r, $\zeta_{j,k}^r$ — аналогично определенные случайные величины для распределения $I[0,1]$. Тогда распределения величин $\tilde{\varphi}_k^r$, $\tilde{\xi}^r$ совпадают с распределениями величин $f(\varphi_k^r)$, $f(\xi^r)$ соответственно. Функция распределения для величины $\tilde{\zeta}_{j,k}^r$ мажорирует функцию распределения $\zeta_{j,k}^r$ ввиду аддитивности конструкции $\zeta_{j,k}^r$, $\tilde{\zeta}_{j,k}^r$ и свойств функции f, преобразующей распределение $I[0,1]$ к $F(x)$.

Следовательно,

$$\tilde{\delta}_n(\tilde{\varepsilon}_n) \leqslant \mathbf{Pr}\left\{1 - \frac{2\Big(\sum\limits_{r=1}^{d-1}\big(\sum\limits_{i=1}^{m-1} f(\varphi_i^r) + f(\xi^r)\big) + \sum\limits_{r=1}^{d-2}\sum\limits_{i=1}^{m}\tilde{\zeta}^r_{r,ir}\Big)}{n'd} > \tilde{\varepsilon}_n\right\}$$

$$\leqslant \mathbf{Pr}\left\{1 - \frac{2\Big(\sum\limits_{r=1}^{d-1}\big(\sum\limits_{i=1}^{m-1} \varphi_i^r + \xi^r\big) + \sum\limits_{r=1}^{d-2}\sum\limits_{i=1}^{m}\zeta^r_{r,ir}\Big)}{n'd} > \tilde{\varepsilon}_n\right\}.$$

Принимая это во внимание, получим, что дальнейшие рассуждения в доказательстве теоремы 1 верны для класса задач $\widetilde{\mathcal{K}}_{max}(0,1)$. Отсюда следует, что алгоритм A на классе $\widetilde{\mathcal{K}}_{max}(0,1)$ является асимптотически точным и обладает теми же оценками точности, вероятности несрабатывания и временно́й сложности. Теорема 3 доказана.

5. Некоторые обобщения

Из теоремы 3 непосредственно вытекает

Теорема 4. *Если $d = o(n)$, то для произвольных $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ алгоритм A является асимптотически точным на классе задач $\widetilde{\mathcal{K}}_{max}(a_n, b_n)$ при тех же оценках точности, вероятности несрабатывания и временно́й сложности, что и для класса $\widetilde{\mathcal{K}}_{max}(0,1)$.*

Алгоритм A легко модифицировать в приближённый алгоритм A' для решения задачи на минимум на классе $\widetilde{\mathcal{K}}_{min}(a_n, b_n)$. Отличие алгоритма A' от алгоритма A заключается в том, что на шагах 1 и 2 выбор очередного ребра (элемента матрицы) осуществляется исходя из минимизационных соображений. Результатом вероятностного анализа в этом случае является следующее утверждение.

Теорема 5. *Если $d = o(n)$, то для произвольных $0 < a_n \leqslant b_n$ алгоритм A' асимптотически точен на классе задач $\widetilde{\mathcal{K}}_{min}(a_n, b_n)$ с оценкой относительной погрешности $\varepsilon_n = \dfrac{b_n}{a_n}\dfrac{\ln\frac{n}{d-1}}{\frac{n}{d-1}}\left(1 + \dfrac{q}{n}\right)$ и с теми же оценками вероятности несрабатывания и временно́й сложности, что и для класса $\widetilde{\mathcal{K}}_{max}(a_n, b_n)$, при дополнительном требовании на разброс элементов матрицы расстояний между вершинами (отношение границ b_n и a_n):*

$$\frac{b_n}{a_n} = o\left(\frac{(\frac{n}{d-1})}{\ln(\frac{n}{d-1})}\right).$$

Напомним, что предлагаемые алгоритмы асимптотически точны при $d = o(n)$, имея временну́ю сложность $O\big(n^2 + nd\ln n\big)$. Так что при условии $d \leqslant \dfrac{n}{\ln n}$ асимптотически точное решение может быть получено с временно́й сложностью $O(n^2)$.

Благодарность. В заключение выражаем большую признательность И. С. Борисову за плодотворное обсуждение вопросов, возникших при вероятностном анализе алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.** Об одном обобщении задачи коммивояжёра на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 3. С. 3–12.
2. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А.** Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. Вып. 31. М.: Наука, 1975. С. 35–42.
3. **Петров В. В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
4. **Baburin E., Gimadi E. Kh.** Approximation algorithms for finding a maximum-weight spanning connected subgraph with given vertex degrees // Operations Research Proceedings 2004, Selected Papers. International Conference OR 2004, Tilburg. Berlin: Springer, 2005. P. 343–351.
5. **Gimadi E. Kh., Serdukov A. I.** A problem of finding the maximal spanning connected subgraph with given vertex degrees // Operations Research Proceedings 2004, Selected Papers. International Conference OR 2000, Heidelberg. Berlin: Springer, 2001. P. 55–59.
6. **The traveling salesman problem and its variations.** Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2003.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.

Статья поступила
30 мая 2006 г.

Переработанный вариант —
2 ноября 2006 г.