ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2006. Серия 2. Том 13, № 2. 21–30

УДК 519.4

АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИНВАРИАНТОВ ИЗОМОРФИЗМОВ ОТОБРАЖЕНИЙ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ*)

Ю. И. Бродский, В. И. Новицкий, Ю. Н. Павловский

Предложен алгоритм, который формирует структуру данных $\Im(f)$, характеризующую отображение$f : X \to X$ в себя конечного множества с точностью до изоморфизма. Этот алгоритм основан на изучении декомпозиционных свойств отображений в себя. В [9, 16] изложен лишь начальный этап такого построения. В настоящей статье формирование структуры данных выполняется до конца и даётся доказательство того, что отображения $f_1 : X_1 \to X_1$ и $f_2 : X_2 \to X_2$ в себя конечных множеств изоморфны тогда и только тогда, когда их структуры данных $\Im(f_1)$ и $\Im(f_2)$ совпадают. Структура данных $\Im(f)$ отображения $f : X \to X$ называется *инвариантной* (при изоморфизмах) структурой данных этого отображения. Алгоритм реализован с помощью JAVA-технологии в виде диалоговой системы, которая вычисляет и накапливает в базе данных инвариантные при изоморфизмах структуры данных предъявленных отображений, а также распознаёт наличие или отсутствие в базе данных инвариантной структуры данных предъявленного отображения.

Введение

Суть построений, выполняемых при формировании инвариантной при изоморфизмах структуры данных отображений в себя конечных множеств, состоит в сопоставлении с ним других объектов, которые преобразуются изоморфно, когда исходный объект подвергается изоморфизмам. В этом случае инварианты при изоморфизмах объектов, сопоставляемых с исходным, являются инвариантами при изоморфизмах исходного объекта. Геометрическая теория декомпозиции [3–15] позволяет строить такие объекты «стандартным» образом, не зависящим от типа объекта. На языке геометрической теории декомпозиции математические объекты трактуются как Σ-объекты, т. е. как множества, снабжённые бурбаковской структурой некоторого рода Σ [1, с. 242]. Родом

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04–01–00335).

© **2006 Бродский Ю. И., Новицкий В. И., Павловский Ю. Н.**

структуры однозначно определяется понятие об изоморфизме в классе Σ-объектов. Введение в классе Σ-объектов морфизмов Бурбаки [1, с. 255] позволяет строить декомпозиционные структуры объектов относительно введённых морфизмов способом, не зависящим от типа объекта, т. е. от рода структуры Σ. Эти структуры по построению преобразуются изоморфно, когда исходный объект подвергается изоморфизмам. Декомпозиционными структурами являются, например, множество подобъектов исходного объекта, множество его P-декомпозиций, т. е. семейств подобъектов, по которому он восстанавливается единственным образом, множество его декомпозиций на дизъюнктивную сумму (или, для краткости, CC-декомпозиций), т. е. таких P-декомпозиций, что подмножества исходного множества, участвующие в P-декомпозиции, образуют классы по некоторому отношению эквивалентности. Все эти множества снабжаются структурами частичного порядка. Для ряда типов объектов (родов структур) из инвариантов изоморфизмов декомпозиционных структур возможно составить полную систему инвариантов изоморфизмов исходного объекта. Именно так обстоит дело с отображениями конечных множеств в себя или, другими словами, конечных ориентированных графов, в которых из каждой вершины выходит одна дуга, а также обращениями этих графов, т. е. графов, в каждую вершину которых входит одна дуга.

1. Синтаксис инвариантной структуры данных отображений конечных множеств в себя

Пусть $f_1 : X_1 \to X_1$ и $f_2 : X_2 \to X_2$ — два отображения абстрактных множеств в себя. Эти отображения изоморфны, если существует биекция $i : X_1 \to X_2$ такая, что $f_2 = i \circ f_1 \circ i^{-1}$. Отображение $m : X_1 \to X_2$ называется *каноническим морфизмом* отображения f_1 в отображение f_2, если $m \circ f_1 = f_2 \circ m$. Пусть $\widetilde{X} \subset X$. Отображение $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ называется *подобъектом* отображения $f : X \to X$ относительно канонических морфизмов, если каноническая инъекция $\omega : \widetilde{X} \to X$ является каноническим морфизмом и для любого отображения $g : X' \to \widetilde{X}$ из того, что $\omega \circ g$ является каноническим морфизмом, следует, что g является каноническим морфизмом. Это определение является конкретизацией для отображений в себя общего определения подобъекта, применимого для всех типов объектов (Для отображений в себя второе из сформулированных выше условий является следствием первого. Однако для произвольных ориентированных графов это несправедливо.) Нетрудно видеть, что подобъекты отображений в себя относительно канонических морфизмов являются отображениями, индуцированными исходными на соответствующих подмножествах. Пусть $\widetilde{f}_1 : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_1$ и $\widetilde{f}_2 : \widetilde{X}_2 \to \widetilde{X}_2$ — два подобъекта объекта $f : X \to X$. Подобъект $\widetilde{f}_1 : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_1$ предшествует подобъекту $\widetilde{f}_2 : \widetilde{X}_2 \to \widetilde{X}_2$, если $\widetilde{X}_1 \subset \widetilde{X}_2$. Введённое отношение предшествования является отношением частичного порядка. Формируемая предлагаемым алгоритмом структура данных содержит полную информацию о подобъектах отображения $f : X \to X$ конечного множества в себя и об отношении частичного порядка на множестве его подобъектов. Очевидно, что при изоморфизмах подобъекты переходят в подобъекты. Очевидно также, что при изоморфизмах отношение предшествования между подобъектами сохраняется. Изложенные обстоятельства лежат в основе предлагаемого алгоритма.

Синтаксически инвариантную структуру данных $\Im(f)$, однозначно характеризующую отображение в себя с точностью до изоморфизма, можно трактовать как запись, содержащую следующие поля:

поле 0: натуральное число $N > 0$;

поле 1: натуральное число $n > 0$;

поле 2: список пар $(a_i, p_i), 1 \leqslant i \leqslant I$, натуральных чисел таких, что $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_I$, $\sum\limits_{i=1}^{I} p_i = n$, $\sum\limits_{i=1}^{I} p_i a_i = N$;

поле 3: список пар (b_{ij}, q_{ij}), где $1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J_i$, натуральных чисел таких, что $0 < b_{i1} < b_{i2} < \ldots < b_{iJ_i}$, $1 \leqslant i \leqslant I$, $\sum\limits_{j=1}^{J_i} q_{ij} = p_i$, $1 \leqslant i \leqslant I$; $a_i \geqslant b_{ij}, 1 \leqslant j \leqslant J_i$;

поле 4: список пар (c_{ijk}, r_{ijk}); $1 \leqslant i \leqslant I$; $1 \leqslant j \leqslant J_i$; $1 \leqslant k \leqslant b_{ij}$, натуральных чисел таких, что $c_{ijk} \geqslant 1$, $r_{ijk} \geqslant 1$, где $1 \leqslant i \leqslant I$; $1 \leqslant j \leqslant J_i$; $1 \leqslant k \leqslant K_{ij}$; $\sum\limits_{k=1}^{K_{ij}} r_{ijk} = q_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant I$, $1 \leqslant j \leqslant J_i$.

Поле с номером $i, 1 \leqslant i \leqslant 4$, обозначается через $\Im(f)_i$.

2. Семантика полей инвариантной структуры данных отображений конечных множеств в себя

Нулевое поле N является мощностью множества X, на котором определено отображение $f : X \to X$. Пусть $x \in X$. Последовательность $\{f^i(x)\}$, $i = 0, 1, \ldots$, назовём *динамическим процессом, начинающимся в* x (или просто *динамическим процессом*, если ясно или несущественно каково x). Множество элементов, участвующих в динамическом процессе $\{f^i(x)\}$, $i = 0, 1, \ldots$, является наименьшим содержащим x подмножеством множества X, на котором исходное отображение определяет подобъект. Поскольку X конечно, существуют натуральные числа k, p такие, что $f^k(x) = f^{k+p}(x)$, где $f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \ldots$ Множество $A_f(x) = \{f^k(x), f^{k+1}(x), \ldots, f^{k+p-1}(x)\}$ назовём *аттрактором* динамического процесса $\{f^i(x)\}$, $i = 0, 1, \ldots$ Если ясно или несущественно каково x, то аттрактор будет обозначаться через A_f. Аттрактор является подобъектом, который не имеет нетривиальных (не совпадающих с ним) подобъектов. В геометрической теории декомпозиции такие подобъекты называются P-простыми. Два различных аттрактора, очевидно, не имеют общих элементов. Множество $\bigcup\limits_{l=1}^{L} f^{-l}(A_f(x))$, где L таково, что

$$\bigcup_{l=1}^{L} f^{-l}(A_f(x)) = \bigcup_{l=1}^{L+1} f^{-l}(A_f(x)),$$

обозначим через $\overline{x}$. По построению $f(\overline{x}) \subset \overline{x}$. Другими словами, на множествах $\overline{x}$ исходное отображение определяет подобъект. Поскольку прообразы множеств без общих элементов не имеют общих элементов, то два различных множества $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ не имеют общих элементов (они не сравнимы по определенному выше отношению предшествования). Поэтому множества $\overline{x}$, где $x \in X$, являются классами эквивалентности, которую обозначим через M_f или просто через M, если ясно или несущественно каково f. Фактор-множество множества X по эквивалентности M обозначим через X_M, а для класса эквивалентности по M, содержащего x, наряду с обозначением $\overline{x}$ будем также использовать обозначение x_M. Семейство подобъектов исходного отображения, определённых на классах x_M, является его максимальной декомпозицией на дизъюнктивную сумму: множества, на которых определены подобъекты, не пересекаются; по этому семейству исходный объект восстанавливается единственным образом. Подобъекты исходного отображения, определённые на классах эквивалентности x_M, не допускают нетривиальной декомпозиции на дизъюнктивную сумму. Далее, отображения, определяемые на этих классах исходным отображением, называются *CC-простыми.* Язык геометрической теории декомпозиции позволяет определить понятия «декомпозиция объекта на дизъюнктивную сумму», «CC-простой подобъект» сразу для всех типов математических объектов. Поле 1 инвариантной структуры данных есть мощность $n = \mathrm{Card}(X_M)$ множества X_M.

В терминах графов классы эквивалентности x_M являются связными компонентами исходного графа, а «устройство» каждого класса можно описать следующим образом: класс x_M состоит из цикла (каковым является аттрактор) с «прицепленными» к некоторым вершинам этого цикла корневыми деревьям (корнем дерева является точка аттрактора) [2].

Числа a_i, которые фигурируют в парах (a_i, p_i), $1 \leqslant i \leqslant I$, и составляют третье поле инвариантной структуры данных, являются различными мощностями классов эквивалентности x_M, упорядоченными по возрастанию. Число p_i указывает, сколько классов эквивалентности имеют мощность $a_i, 1 \leqslant i \leqslant I$.

Зафиксируем число i, $1 \leqslant i \leqslant I$. Числа b_{ij}, которые фигурируют в парах (b_{ij}, q_{ij}), $1 \leqslant i \leqslant I$ и $1 \leqslant j \leqslant J_i$, и составляют третье поле инвариантной структуры данных, являются различными мощностями аттракторов, содержащихся в тех классах эквивалентности, которые имеют мощность $a_i, 1 \leqslant i \leqslant I$. Число q_{ij} указывает, сколько классов мощности a_i имеет мощность аттрактора b_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant I$ и $1 \leqslant j \leqslant J_i$.

Для изложения алгоритма построения чисел c_{ijk}, где $1 \leqslant i \leqslant I$, $1 \leqslant j \leqslant J_i$ и $1 \leqslant k \leqslant b_{ij}$ необходимо определить ряд конструкций. Фиксируются числа i и j, $1 \leqslant i \leqslant I$ и $1 \leqslant j \leqslant J_i$, и рассматривается некоторый класс эквивалентности x_M мощности a_i, аттрактор которого равен b_{ij}. Берётся некоторый элемент a аттрактора $A_f(x)$. К этому элементу «прицепляется» дерево $D(a)$ с корнем в a. Множество вершин дерева $D(a)$ получается следующим образом. Берётся множество $g(a)$, которое есть $f^{-1}(a)$ с исключенным из него элементом аттрактора a_1 таким, что $f(a_1) = a$. $D(a)$ есть объединение элемента a и множества $\bigcup\limits_{l=0}^{L} f^{-l}(g(a)))$, где L таково, что $\bigcup\limits_{l=0}^{L} f^{-l}(g(a))) = \bigcup\limits_{l=0}^{L+1} f^{-l}(g(a)))$. Элементу a ставится в соответствие число $u(a)$, которое с точностью до изоморфизма однозначно определяет дерево $D(a)$. Алгоритм построения числа $u(a)$ состоит в следующем.

Для дерева $D(a)_0$ высоты 0 (т. е. для дерева, состоящего из одной изолированной вершины) положим $u(a) = 1$. Пусть число $u(a)$ можно построить для всех деревьев $D(a)_k$ высоты k, меньшей числа K. Пусть высота дерева $D(a)$ равна K. Удалим из дерева $D(a)$ корень вместе с инцидентными ему рёбрами. Исходное дерево $D(a)$ распадётся на некоторое число μ корневых деревьев $D(a)_1, \ldots, D(a)_\mu$, высота каждого из которых меньше K. Пусть $u(a)_1, \ldots, u(a)_\mu$ — числа, соответствующие деревьям $D(a)_1, \ldots, D(a)_\mu$. Не нарушая общности, можно считать, что $u(a)_1 \leqslant \ldots \leqslant u(a)_\mu$. Выберем число $N = 10^l$ такое, что $N > u(a)_\mu$, и положим $u(a) = 10 \sum\limits_{i=1}^{\mu} N^i u(a)_i + N$.

Пары чисел (c_{ijk}, r_{ijk}), $1 \leqslant i \leqslant I$, $1 \leqslant j \leqslant J_i$, $1 \leqslant k \leqslant K_{ij}$, составляющие четвертое поле инвариантной структуры данных, получаются следующим образом. Определим последовательность чисел $u(a^*)$, $u(f(a^*)), \ldots$, $u(f^{b_{ij}-1}(a^*))$. Здесь элемент аттрактора a^* выбирается таким, что

$$u(a^*) = \min_{a \in A_f(x_M)} u(a).$$

Если имеется несколько таких элементов, выберем из них такое a^*, что $u(f(a^*))$ минимально. Если и таких элементов несколько, выберем из них такое a^*, что $u(f^2(a^*))$ минимально, и т. д. Описанный процесс либо сходится к единственному элементу a^*, либо числа $u(a^*), u(f(a^*))$, $\ldots, u(f^{b_{ij}-1}a^*)$ образуют «повторяющиеся цепочки» (например, $\alpha, \alpha, \beta, \beta$, $\alpha, \alpha, \beta, \beta$). В последнем случае в качестве a^* можно выбрать «начало» любой такой цепочки, поскольку последующие построения не зависят от этого выбора.

Возьмём число $l = \min\{k > 0 \mid 10^k > \max\limits_{0 \leqslant m \leqslant b_{ij}-1} u(f^m(a^*))\}$ и положим $N = 10^l$ (оно будет служить основанием для составления числа c_{ijk}). Определим числа $\theta(a^*) = 10 \sum\limits_{m=0}^{b_{ij}-1} N^{m+1} u(f^m(a^*)) + N + 1$, где $f^0(a^*) = f^{b_i}(a^*) = a^*$ (аналогично «упаковке» деревьев в числа $u(a)$; единица в младший разряд добавлена для того, чтобы отличать числа $\theta(a)$ и $u(a)$). Каждому классу эквивалентности мощности $a_i, 1 \leqslant i \leqslant I$ с мощностью аттрактора b_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J_i$, поставим в соответствие число $c_{ij} = \theta(a^*)_{ij}$, которое будет называться *образом* этого класса. Расположив эти числа в порядке возрастания, получим последовательность

$$c_{ij1} < c_{ij2} < \ldots < c_{ijK_{ij}}.$$

Числа r_{ijk}, где $1 \leqslant i \leqslant I$, $1 \leqslant j \leqslant J_i$ и $1 \leqslant k \leqslant K_{ij}$, указывают, сколько классов эквивалентности x_M мощности $a_i, 1 \leqslant i \leqslant I$ с мощностью аттрактора $b_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant I, 1 \leqslant j \leqslant J_i$, имеют образ аттрактора, равный c_{ijk}.

Очевидно, что для изоморфизма двух отображений $f_1 : X_1 \to X_1$ и $f_2 : X_2 \to X_2$ в себя конечных множеств необходимо совпадение их инвариантных структур данных $\Im(f_1)$ и $\Im(f_2)$. Достаточность совпадения инвариантных структур двух отображений для их изоморфизма вытекает из того, что по заданной инвариантной структуре можно конструктивно и единственным образом построить отображение в себя, имеющее эту структуру в качестве своей инвариантной структуры. (Другими словами, инвариантная структура данных определяет единственным образом конечный ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит одна дуга.) Установим изоморфизм между отображением f_{st}, построенным по заданной инвариантной структуре, и любым отображением f, имеющего данную инвариантную структуру данных. Достаточно провести рассуждения для случая, когда $\Im(f)_2 = 1$. Между единственными аттракторами отображений (в силу условия $\Im(f)_2 = 1$) устанавливается биективное соответствие F такое, что $F(a^*_f) = a^*_{f_{st}}$. Так как элемент a^* определяет число c_{ijk} однозначно, то элементам a и $F(a)$ соответствуют изоморфные деревья. Отсюда следует изоморфизм отображений f_{st} и f.

Замечание 1. Из выполненных построений вытекает, что каждый CC-простой подобъект исходного объекта, т. е. каждый класс эквивалентности x_M с точностью до изоморфизма однозначно характеризуется единственным целым числом. Расположим эти числа в порядке возрастания и полученной последовательности поставим в соответствие единственное число, построенное аналогично тому, как по числам $u(a^*)$, $u(f(a^*)), \ldots, u(f^{b_{ij}-1}(a^*))$ строилось число

$$\theta(a^*) = 10 \sum_{m=0}^{b_{ij}-1} N^{m+1} u(f^m(a^*)) + N + 1.$$

Полученное единственное число характеризует единственным образом с точностью до изоморфизма исходное отображение в себя.

Замечание 2. Если ориентированные графы G и H изоморфны, то изоморфны и графы G^{-1} и H^{-1}, которые получаются из исходных изменением ориентаций дуг. Таким образом, все выполненные построения имеют место также для ориентированных графов, в каждую вершину которых входит одна дуга.

3. Компьютерная реализация алгоритма

Для демонстрации работы приведённого выше алгоритма была разработана программная среда. Опишем механизм её работы.

Отображение в себя строится на основе битового графического изображения, которое разбивается на кластеры (группы пикселей). Пусть N' — число пикселей изображения (т. е. точек белого или чёрного цветов, из которых сострoит изображение). Размер кластера определяется следующим образом. Пусть K — наибольшее целое число такое, что $K \cdot 2^K \leqslant N'$. Пусть $N = K \cdot 2^K$. $N' - N$ пикселей будем считать «лишними»*. Перенумеруем оставшиеся пиксели числами $1, 2, \ldots, N$. Множество таких пикселей разобьём на 2^K кластеров по K пикселей в каждом. Полученное множество кластеров обозначим через X. Перенумеруем кластеры числами $1, 2, \ldots, 2^K$. Каждому пикселю в зависимости от цвета (чёрный/белый) ставим в соответствие число из множества $\{0, 1\}$. Теперь можно считать, что кластер представляет собой K-разрядное двоичное число. Тем самым возникает отображение $f : X \to X$ множества кластеров X в себя: номеру m кластера ставится в соответствие число $f(m)$ — номер другого кластера.

*Детали программной реализации будут описаны ниже.

Программная реализация уточняет следующие моменты. Форма кластера — прямоугольник, высота которого задаётся пользователем (соответственно, длина вычисляется автоматически). Биты в кластере нумеруются слева–направо, сверху–вниз. Отбрасываются такие пиксели по краям изображения, что в центре образуется прямоугольник (из N пикселей). Ширина и высота полученного «окна», очевидно, кратна ширине и высоте кластера. Если не получается разместить ровно 2^K кластеров (в силу соотношения сторон изображения и выбранных размеров кластера), то решается задача минимизации числа «лишних» кластеров внутри «окна». В формировании отображения в себя «лишние» кластеры не участвуют.

На следующем шаге кластерам ставятся в соответствие числа и формируется граф переходов. Граф разбивается на подграфы (классы эквивалентности). Внутри каждого класса эквивалентности определяется аттрактор. На этом подготовительный этап заканчивается. Программа переходит к вычислению инвариантной структуры, т. е. полей $\Im(f)_0$, $\Im(f)_1$, $\Im(f)_3$, $\Im(f)_4$ по описанным выше алгоритмам.

Полученная структура данных помещается в хранилище под названием, определяемым пользователем.

Функционально программа позволяет производить следующие операции:

- загрузить изображение
- построить инвариантную структуру данных
- сохранить инвариантную структуру данных, если она не содержится в хранилище, либо в противном случае сообщить о найденном соответствии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бурбаки Н.** Теория множеств. М.: Мир, 1965.
2. **Оре О.** Теория графов. М.: Наука, 1980.
3. **Павловский Ю. Н.** Декомпозиция снабжённых структурой множеств на свободную сумму и прямое произведение // Докл. РАН. 1995. Т. 340, № 3. С. 314–316.
4. **Павловский Ю. Н.** О P- и F-декомпозициях Σ объектов // Докл. РАН. 1996. Т. 351, № 5. С. 603–605.
5. **Павловский Ю. Н.** О декомпозициях снабжённых структурой над подчиненными структурами // Докл. РАН. 1997. Т. 357, № 5. С. 589–591.

6. **Павловский Ю. Н.** О шкалах родов структур // Докл. РАН. 1998. Т. 363, № 2. С. 163–165.
7. **Павловский Ю. Н.** О HPF- и PF-морфизмах // Докл. РАН. 1999. Т. 369, № 6. С. 745–746.
8. **Павловский Ю. Н.** О декомпозиционном методе построения образов подмножеств снабжённых структурой множеств // Докл. РАН. 2000. Т. 374, № 4. С. 450–452.
9. **Павловский Ю. Н.** Об одном декомпозиционном подходе к построению образов изображений // Докл. РАН. 2003. Т. 392, № 6. С. 733–735.
10. **Павловский Ю. Н., Смирнова Т. Г.** Шкалы родов структур, термы и соотношения, сохраняющиеся при изоморфизмах. М.: ВЦ РАН, 2003.
11. **Павловский Ю. Н.** О декомпозиционных структурах математических объектов // Докл. РАН. 2004. Т. 399, № 1. С. 15–17.
12. **Павловский Ю. Н.** Декомпозиции и аттракторы динамических систем, ассоциированные с отображениями в себя // Докл. РАН. 2005. Т. 404, № 2. С. 159–161.
13. **Павловский Ю. Н., Смирнова Т. Г.** Проблема декомпозиции в математическом моделировании. М.: «Фазис», 1998.
14. **Павловский Ю. Н., Смирнова Т. Г.** Введени в геометрическую теорию декомпозиции. М.: «Фазис», 2006.
15. **Elkin V. I., Pavlovsky J. N.** Decomposition of models of control processes // J. Math. Science. 1998. V. 88, N 5. P. 723–761.

16. **Pavlovsky Yu. N.** The decomposition of the mapping and building images of scenes. // The 6-th German-Russian Workshop Pattern Recognition and Image. Under OGRW–6–2003. August, 25–30, 2003. Proceedings. Novosibirsk, 2003. P. 112–114.

Адрес авторов:

Бродский Ю. И., Павловский Ю. Н.

ВЦ им. А.А. Дородницына РАН,
ул. Вавилова, 40,
119991, Москва,
Россия.
E-mail: j_pvlsk@redline.ru
brodsky@ccas.ru

Новицкий В. И.

Московский физико-технический
институт (Гос.университет),
Институтский переулок, 9,
141700 Долгопрудный,
Московская область,
Россия.
E-mail: nov.valerij@gmail.com

Статья поступила
18 июля 2006 г.