ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2006. Серия 2. Том 13, № 2. 44–55

УДК 519.854

ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЙ СЛУЧАЙ ТРЁХСТАНОЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЖОНСОНА*)

В. В. Сервах

Рассматривается классическая NP-трудная задача трёх станков: за минимальное время необходимо обработать N деталей на трёх станках. Времена обработки деталей на каждом станке заданы. Технологические маршруты всех деталей одинаковы. Одновременная обработка двух деталей на одном станке невозможна. В работе исследуются свойства этой задачи. Выделен новый полиномиально разрешимый случай, описан соответствующий алгоритм.

Введение

Классическая трёхстаночная задача Джонсона $F3||C_{max}$ заключается в минимизации времени обработки N деталей на конвейерной линии, состоящей из трёх станков. Время обработки детали n на первом, втором и третьем станках соответственно равно a_n, b_n и c_n. Одновременная обработка нескольких деталей на одном станке невозможна.

В [5] доказана NP-трудность этой задачи. В [2, 3] описано несколько полиномиально разрешимых случаев. Отметим следующие из них:

$$\begin{aligned} &b_i \leqslant \min\{a_i, c_i\}, && 1 \leqslant i \leqslant N; \\ &a_i \leqslant b_i \leqslant c_i, && 1 \leqslant i \leqslant N; \\ &c_i \leqslant b_i \leqslant a_i, && 1 \leqslant i \leqslant N. \end{aligned}$$

В первом случае решение задачи получается за $O(N \log N)$ шагов [1, 4]. Для второго и третьего случаев в [3] построен алгоритм с временно́й сложностью $O(N^7)$.

В настоящей статье для случая $\min\{a_i, c_i\} \leqslant b_i \leqslant \max\{a_i, c_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, построен алгоритм с временно́й сложностью $O(N^3)$.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (грант 03–51–5501).

1. Доминирование расписаний

Известно, что существует такое оптимальное решение трёхстаночной задачи, в котором порядок обработки деталей на всех станках один и тот же [6]. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ — перестановка, определяющая некоторый порядок обработки деталей. Обозначим через $A_n(\alpha), B_n(\alpha), C_n(\alpha)$ ранние моменты времени завершения обработки детали α_n на первом, втором и третьем станках соответственно. Положим $A_0(\alpha) = B_0(\alpha) = C_0(\alpha) = 0$. При $n = 1, 2, \ldots, N$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$A_n(\alpha) = a_{\alpha_n} + A_{n-1}(\alpha), \tag{1}$$

$$B_n(\alpha) = b_{\alpha_n} + \max\{A_n(\alpha), B_{n-1}(\alpha)\}, \tag{2}$$

$$C_n(\alpha) = c_{\alpha_n} + \max\{B_n(\alpha), C_{n-1}(\alpha)\}. \tag{3}$$

Таким образом, по перестановке α однозначно определяется раннее расписание обработки деталей. Саму перестановку α также будем называть *расписанием*. Длина расписания α равна

$$T(\alpha) = C_N(\alpha) = \max_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant N} \left(\sum_{j=1}^{r} a_{\alpha_j} + \sum_{j=r}^{s} b_{\alpha_j} + \sum_{j=s}^{N} c_{\alpha_j} \right).$$

Сформулируем известное правило доминирования перестановок.

Лемма 1. *Пусть различные расписания $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N)$ таковы, что*

1) *множества $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ и $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$ совпадают*;

2) $B_k(\alpha) \leqslant B_k(\beta)$;

3) $C_k(\alpha) \leqslant C_k(\beta)$.

Тогда при любом $i = k+1, k+2, \ldots, N$ для расписания $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_N)$ выполняются неравенства $B_i(\theta) \leqslant B_i(\beta)$ и $C_i(\theta) \leqslant C_i(\beta)$. В частности, $T(\theta) \leqslant T(\beta)$.

Утверждение леммы непосредственно следует из рекуррентных соотношений (1)–(3).

Таким образом, если перестановка $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ удовлетворяет условиям леммы 1, то при поиске оптимального расписания можно не рассматривать перестановки вида $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_N)$, что уменьшает возможный перебор вариантов.

В лемме 1 сравнение перестановок производится по их начальным фрагментам. Аналогично перестановки можно сравнивать и по конечным фрагментам. Для этого достаточно использовать временну́ю инверсию, когда каждая деталь будет обрабатываться сначала на третьем, потом на втором и, наконец, на первом станках.

2. Декомпозиция расписаний

Будем считать, что длительности операций удовлетворяют соотношениям:

$$\min\{a_i, c_i\} \leqslant b_i \leqslant \max\{a_i, c_i\},\ 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{4}$$

Пусть $X = \{i \mid a_i < c_i\}$ и $Y = \{i \mid c_i \geqslant a_i\}$.

Лемма 2. *При выполнении условия* (4) *существует оптимальное расписание трёхстаночной задачи Джонсона, когда сначала обрабатываются все детали множества X, а потом множества Y.*

Доказательство. Рассмотрим оптимальную перестановку $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N)$ и пусть для неё указанный в условии леммы порядок не соблюдается, т. е. существует непустое множество пар $(\beta_k,\ \beta_l)$ таких, что $\beta_k \in Y, \beta_l \in X$ и $k < l$. Число таких пар обозначим через $\xi(\beta)$. Из условия $\xi(\beta) > 0$ следует, что существует n такое, что $\beta_n \in Y$, а $\beta_{n+1} \in X$. Пусть $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_{n+1}, \beta_n, \beta_{n+2}, \ldots, \beta_N)$ — перестановка, полученная из β транспозицией элементов β_n и β_{n+1}. Очевидно, что $A_{n+1}(\alpha) = A_{n+1}(\beta)$. Кроме того, $B_{n-1}(\alpha) = B_{n-1}(\beta) = B_{n-1}$ и $C_{n-1}(\alpha) = C_{n-1}(\beta) = C_{n-1}$. Покажем, что

$$B_{n+1}(\alpha) \leqslant B_{n+1}(\beta); \tag{5}$$

$$C_{n+1}(\alpha) \leqslant C_{n+1}(\beta). \tag{6}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
B_{n+1}(\alpha) &= b_{\alpha_{n+1}} + \max\{A_{n+1}(\alpha), B_n(\alpha)\} = b_{\alpha_{n+1}} \\
&+ \max\{a_{\alpha_{n+1}} + a_{\alpha_n} + A_{n-1}(\alpha), b_{\alpha_n} + \max\{a_{\alpha_n} + A_{n-1}(\alpha), B_{n-1}(\alpha)\}\} \\
&= b_{\beta_n} + \max\{a_{\beta_n} + a_{\beta_{n+1}} + A_{n-1}, b_{\beta_{n+1}} + \max\{a_{\beta_{n+1}} + A_{n-1}, B_{n-1}\}\} \\
&= \max\{b_{\beta_n} + a_{\beta_n} + a_{\beta_{n+1}} + A_{n-1}, b_{\beta_n} + b_{\beta_{n+1}} + a_{\beta_{n+1}} + A_{n-1}, b_{\beta_n} \\
&+ b_{\beta_{n+1}} + B_{n-1}\} = \max\{b_{\beta_n} + a_{\beta_{n+1}} + A_{n-1} + \max\{a_{\beta_n}, b_{\beta_{n+1}}\}, \\
&\qquad b_{\beta_n} + b_{\beta_{n+1}} + B_{n-1}\}.
\end{aligned}$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned}
B_{n+1}(\beta) = \max\{&b_{\beta_{n+1}} + a_{\beta_n} + A_{n-1} + \max\{a_{\beta_{n+1}}, b_{\beta_n}\}, \\
&b_{\beta_n} + b_{\beta_{n+1}} + B_{n-1}\}.
\end{aligned}$$

Для доказательства (5) достаточно показать, что

$$b_{\beta_n} + a_{\beta_{n+1}} + \max\{a_{\beta_n}, b_{\beta_{n+1}}\} \leqslant b_{\beta_{n+1}} + a_{\beta_n} + \max\{a_{\beta_{n+1}}, b_{\beta_n}\}. \tag{7}$$

Убедимся в справедливости этого неравенства.

Во-первых,

$$\begin{aligned} &b_{\beta_n} + a_{\beta_{n+1}} + \max\{a_{\beta_n}, b_{\beta_{n+1}}\} - (a_{\beta_n} + a_{\beta_{n+1}} + b_{\beta_n} + b_{\beta_{n+1}}) \\ &\quad = \max\{a_{\beta_n}, b_{\beta_{n+1}}\} - a_{\beta_n} - b_{\beta_{n+1}} = \max\{a_{\beta_n} - a_{\beta_n} - b_{\beta_{n+1}}, \\ &\qquad b_{\beta_{n+1}} - a_{\beta_n} - b_{\beta_{n+1}}\} = \max\{-b_{\beta_{n+1}}, -a_{\beta_n}\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Так как $a_{\beta_n} \geqslant b_{\beta_n}$ и $a_{\beta_{n+1}} \leqslant b_{\beta_{n+1}}$, то $-a_{\beta_n} \leqslant -b_{\beta_n}$ и $-a_{\beta_{n+1}} \geqslant -b_{\beta_{n+1}}$. Поэтому

$$\max\{-b_{\beta_{n+1}}, -a_{\beta_n}\} \leqslant \max\{-a_{\beta_{n+1}}, -b_{\beta_n}\}. \tag{9}$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned} &b_{\beta_{n+1}} + a_{\beta_n} + \max\{a_{\beta_{n+1}}, b_{\beta_n}\} - (a_{\beta_n} + a_{\beta_{n+1}} + b_{\beta_n} + b_{\beta_{n+1}}) \\ &\quad = \max\{a_{\beta_{n+1}}, b_{\beta_n}\} - a_{\beta_{n+1}} - b_{\beta_n} = \max\{-b_{\beta_n}, -a_{\beta_{n+1}}\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Из (8)–(10) следует (7). Следовательно, соотношение (5) доказано.

Неравенство (6) докажем от противного. Пусть $C_{n+1}(\alpha) > C_{n+1}(\beta)$, т. е.

$$\begin{aligned} &\max\{c_{\beta_n} + b_{\beta_n} + a_{\beta_n} + a_{\beta_{n+1}} + A_{n-1}, c_{\beta_n} + b_{\beta_n} + b_{\beta_{n+1}} + a_{\beta_{n+1}} + A_{n-1}, \\ &\quad c_{\beta_n} + b_{\beta_n} + b_{\beta_{n+1}} + B_{n-1}, c_{\beta_n} + c_{\beta_{n+1}} + b_{\beta_{n+1}} + a_{\beta_{n+1}} + A_{n-1}, \\ &\quad\quad c_{\beta_n} + c_{\beta_{n+1}} + b_{\beta_{n+1}} + B_{n-1}, c_{\beta_n} + c_{\beta_{n+1}} + C_{n-1}\} \\ &> \max\{c_{\beta_{n+1}} + c_{\beta_n} + b_{\beta_n} + a_{\beta_n} + A_{n-1}, c_{\beta_{n+1}} + b_{\beta_{n+1}} + b_{\beta_n} + a_{\beta_n} + A_{n-1}, \\ &\quad c_{\beta_{n+1}} + c_{\beta_n} + b_{\beta_n} + B_{n-1}, c_{\beta_{n+1}} + b_{\beta_{n+1}} + a_{\beta_{n+1}} + a_{\beta_n} + A_{n-1}, \\ &\quad\quad c_{\beta_{n+1}} + b_{\beta_{n+1}} + b_{\beta_n} + B_{n-1}, c_{\beta_{n+1}} + c_{\beta_n} + C_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Невыполнимость этого неравенства непосредственно следует из того, что i-е выражение из левой части не больше i-го выражения из правой части, $1 \leqslant i \leqslant 6$. Убедимся в справедливости этого утверждения.

Случай 1. Имеем $c_{\beta_n} + b_{\beta_n} + a_{\beta_n} + a_{\beta_{n+1}} + A_{n-1} - (c_{\beta_{n+1}} + c_{\beta_n} + b_{\beta_n} + a_{\beta_n} + A_{n-1}) = a_{\beta_{n+1}} - c_{\beta_{n+1}}$. Если $a_{\beta_{n+1}} > c_{\beta_{n+1}}$, то $\beta_{n+1} \in Y$, что противоречит выбору n.

Случай 2. Имеем $c_{\beta_n} + b_{\beta_n} + b_{\beta_{n+1}} + a_{\beta_{n+1}} + A_{n-1} - (c_{\beta_{n+1}} + b_{\beta_{n+1}} + b_{\beta_n} + a_{\beta_n} + A_{n-1}) = c_{\beta_n} + a_{\beta_{n+1}} - c_{\beta_{n+1}} - a_{\beta_n}$. Так как $\beta_n \in Y$ и $\beta_{n+1} \in X$, то $c_{\beta_n} \leqslant a_{\beta_n}$ и $a_{\beta_{n+1}} < c_{\beta_{n+1}}$. Следовательно, $c_{\beta_n} + a_{\beta_{n+1}} - a_{\beta_n} - c_{\beta_{n+1}} \leqslant 0$.

Случай 3. Имеем $c_{\beta_n}+b_{\beta_n}+b_{\beta_{n+1}}+B_{n-1}-(c_{\beta_{n+1}}+c_{\beta_n}+b_{\beta_n}+B_{n-1}) = b_{\beta_{n+1}}-c_{\beta_{n+1}}$ Если $b_{\beta_{n+1}} > c_{\beta_{n+1}}$, то $\beta_{n+1} \in Y$.

Случай 4. Имеем $c_{\beta_n}+c_{\beta_{n+1}}+b_{\beta_{n+1}}+a_{\beta_{n+1}}+A_{n-1}-(c_{\beta_{n+1}}+b_{\beta_{n+1}}+a_{\beta_{n+1}}+a_{\beta_n}+A_{n-1}) = c_{\beta_n}-a_{\beta_n}$. Если $c_{\beta_n} > a_{\beta_n}$, то $\beta_n \in X$.

Случай 5. Имеем $c_{\beta_n}+c_{\beta_{n+1}}+b_{\beta_{n+1}}+B_{n-1}-(c_{\beta_{n+1}}+b_{\beta_{n+1}}+b_{\beta_n}+B_{n-1}) = c_{\beta_n}-a_{\beta_n}$. Если $c_{\beta_n} > a_{\beta_n}$, то $\beta_n \in X$.

Случай 6. Имеем $c_{\beta_n}+c_{\beta_{n+1}}+C_{n-1}-(c_{\beta_{n+1}}+c_{\beta_n}+C_{n-1}) = 0$.

Поэтому $C_{n+1}(\alpha) \leqslant C_{n+1}(\beta)$.

Из (5) и (6) и леммы 1 получаем $T(\alpha) \leqslant T(\beta)$. Следовательно, перестановка α также является оптимальной и $\xi(\alpha) < \xi(\beta)$. Если для α не выполнены требования леммы 2, т. е. $\xi(\alpha) > 0$, то вновь находим элемент множества Y, предшествующий элементу из X, и переставляем их. Очевидно, что через конечное число шагов будет получена требуемая перестановка. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что для поиска оптимальной перестановки достаточно рассмотреть расписания $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \ldots, \alpha_N)$, в которых множество $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_0}\}$ равно X, а множество $\{\alpha_{n_0+1}, \alpha_{n_0+2}, \ldots, \alpha_N\}$ — Y (здесь $n_0 = |X|$).

В соответствии с леммой 1 будем искать только недоминируемые последовательности, причём для сравнения последовательностей $(\alpha_{n_0+1}, \alpha_{n_0+2}, \ldots, \alpha_N)$ необходимо рассмотреть инверсную задачу, а для $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_0})$ — исходную. Заметим, что $a_i \leqslant b_i \leqslant c_i$ при любом $i \in X$. В инверсной задаче для $i \in Y$ имеем обратное неравенство $c_i \leqslant b_i \leqslant a_i$. Значит, на множествах X и Y возникают задачи одного типа: когда при обработке каждой детали сначала выполняется самая короткая операция, а в конце — самая длинная. Поэтому доказанные ниже результаты для множества деталей X справедливы также и для множества Y при переходе к инверсной задаче.

3. Недоминируемые расписания

Будем говорить, что деталь $i \in X$ имеет более высокий приоритет, чем деталь $j \in X$, и обозначать через $i \prec j$, если $a_i \leqslant a_j$ и $b_i \leqslant b_j$. В случае равенств $a_i = a_j$ и $b_i = b_j$ больший приоритет будет иметь деталь с меньшим номером.

Лемма 3. *При условии* (4) *в трёхстаночной задаче Джонсона существует оптимальное расписание α такое, что при любых $i \in X$ и $j \in X$ из $i \prec j$ следует, что в перестановке α элемент i предшествует элементу j.*

Доказательство. Рассмотрим оптимальную перестановку $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$, удовлетворяющую требованиям леммы 2, то есть элементы из X предшествуют в α элементам из Y. Обозначим через W множество таких пар $(i,j) \in X^2$, что $i \prec j$, но в α j предшествует i. Если $W = \varnothing$, то α – искомая перестановка. Пусть $W \neq \varnothing$, т. е. существуют $\alpha_l \doteq j$ и $\alpha_k \doteq i$ такие что $i \prec j$ и при этом значение $k - l$ минимально по всем парам из W. Введём множество $S = \{\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \ldots, \alpha_{k-1}\}$.

Для любого $\alpha_n \in S$ при $a_{\alpha_n} \leqslant a_j$ из условия $(j, \alpha_n) \notin W$ следует, что $b_j \leqslant b_{\alpha_n}$. Тогда имеем $a_{\alpha_n} \leqslant a_j \leqslant b_j \leqslant b_{\alpha_n}$. При $\alpha_n \in S$ и $a_i \leqslant a_{\alpha_n}$ аналогично получаем, что $a_i \leqslant a_{\alpha_n} \leqslant b_{\alpha_n} \leqslant b_i$. Если $\alpha_n \in S$ и $a_i < a_{\alpha_n} < a_j$, то должны выполнятся неравенства$b_j \leqslant b_{\alpha_n}$ и $b_{\alpha_n} \leqslant b_i$. Так как приоритет i выше чем j, то $b_j = b_{\alpha_n} = b_i$. Но тогда $(i, \alpha_n) \in W$, что противоречит нашему выбору. Следовательно, множество S можно разбить на два подмножества $U = \{\alpha_n \in S \mid a_{\alpha_n} \leqslant a_i\}$ и $V = \{\alpha_n \in S \mid a_{\alpha_n} \geqslant a_i\}$. Если $\alpha_u \in U$ и $\alpha_v \in V$, то

$$a_{\alpha_u} \leqslant a_i \leqslant a_j \leqslant a_{\alpha_v} \leqslant b_{\alpha_v} \leqslant b_i \leqslant b_j \leqslant b_{\alpha_u}. \tag{11}$$

Сначала покажем, что если существует m такое, что $\alpha_m \in U$ и $\alpha_{m+1} \in V \cup \{i\}$, то элементы α_m и α_{m+1} можно переставить и полученная перестановка $\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_{m+1}, \alpha_m, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_N)$ останется оптимальной. По лемме 1 достаточно доказать неравенства $B_k(\pi) \leqslant B_k(\alpha)$ и $C_k(\pi) \leqslant C_k(\alpha)$.

Для каждого $\alpha_n \in S \cup \{i\}$ имеем $b_j \geqslant a_{\alpha_n}$. А так как $b_{\alpha_n} \geqslant a_{\alpha_n}$, то $\sum\limits_{n=l}^{r-1} b_{\alpha_n} \geqslant \sum\limits_{n=l+1}^{r} a_{\alpha_n}$ при любом $r \in \{l+1, l+2, \ldots, k\}$. Поэтому $B_k(\alpha) = \max\{A_{l-1}(\alpha) + a_j, B_{l-1}(\alpha)\} + b_j + \sum\limits_{n=l+1}^{k-1} b_{\alpha_n} + b_i$. Аналогично получаем $B_k(\pi) = \max\{A_{l-1}(\pi) + a_j, B_{l-1}(\pi)\} + b_j + \sum\limits_{n=l+1}^{k-1} b_{\pi_n} + b_i$, что совпадает с $B_k(\alpha)$.

Для доказательства неравенства $C_k(\pi) \leqslant C_k(\alpha)$ воспользуемся диаграммой, в которой значением $C_k(\pi)$ является длина критического пути от a_{α_1} до c_{α_k}:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & 2 & & \ldots & m-1 & & m & & m+1 & & \ldots & k \\
a_{\alpha_1} & \rightarrow & a_{\alpha_2} & \rightarrow & \ldots & a_{\alpha_{m-1}} & \rightarrow & a_{\alpha_{m+1}} & \rightarrow & a_{\alpha_m} & \rightarrow & \ldots & a_{\alpha_k} \\
\downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\
b_{\alpha_1} & \rightarrow & b_{\alpha_2} & \rightarrow & \ldots & b_{\alpha_{m-1}} & \rightarrow & b_{\alpha_{m+1}} & \rightarrow & b_{\alpha_m} & \rightarrow & \ldots & b_{\alpha_k} \\
\downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\
c_{\alpha_1} & \rightarrow & c_{\alpha_2} & \rightarrow & \ldots & c_{\alpha_{m-1}} & \rightarrow & c_{\alpha_{m+1}} & \rightarrow & c_{\alpha_m} & \rightarrow & \ldots & c_{\alpha_k}
\end{array}$$

Достаточно рассмотреть перестановку π, в которой критический путь переходит с уровня b на уровень c по столбцу m или $m+1$. Тогда в первом случае $C_k(\pi) = B_{m-1}(\alpha) + b_{\alpha_{m+1}} + c_{\alpha_{m+1}} + c_{\alpha_m} + \sum_{n=m+2}^{k} c_{\alpha_n}$. Так как $b_{\alpha_{m+1}} \leqslant b_{\alpha_m}$ в силу выбора m, то

$$C_k(\pi) \leqslant B_{m-1}(\alpha) + b_{\alpha_m} + c_{\alpha_m} + c_{\alpha_{m+1}} + \sum_{n=m+2}^{k} c_{\alpha_n} \leqslant C_k(\alpha).$$

Во втором случае имеем $C_k(\pi) = B_{m-1}(\alpha) + b_{\alpha_{m+1}} + b_{\alpha_m} + c_{\alpha_m} + \sum_{n=m+2}^{k} c_{\alpha_n}$. Так как $\alpha_{m+1} \in X$, то $b_{\alpha_{m+1}} \leqslant c_{\alpha_{m+1}}$. Поэтому

$$C_k(\pi) \leqslant B_{m-1}(\alpha) + b_{\alpha_m} + c_{\alpha_m} + c_{\alpha_{m+1}} + \sum_{n=m+2}^{k} c_{\alpha_n} \leqslant C_k(\alpha).$$

Таким образом, перестановка π является оптимальной. Аналогичными транспозициями исходная перестановка α может быть преобразована в оптимальную перестановку $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{l-1}, j, \theta_{l+1}, \ldots, \theta_{t-1}, i, \theta_{t+1}, \ldots, \theta_k, \theta_{k+1}, \ldots, \theta_N)$, где $\theta_n = \alpha_n$ при $1 \leqslant n \leqslant l-1$; $\theta_n \in V$ при $l+1 \leqslant n \leqslant t-1$; $\theta_n \in U$ при $t+1 \leqslant n \leqslant k$; $\theta_n = \alpha_n$ при $k+1 \leqslant n \leqslant N$.

Пара (i, j) была выбрана такой, что сделанные транспозиции не изменяют множества W. Переставим детали j и i, исключив тем самым из W пару (i, j). Других изменений в W не произойдет. Получим перестановку $\eta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{l-1}, i, \theta_{l+1}, \ldots, \theta_{t-1}, j, \theta_{t+1}, \ldots, \theta_k, \theta_{k+1}, \ldots, \theta_N)$. Осталось показать, что η — оптимальное решение. Тем самым если W стало пустым, лемма 3 будет доказана. Если W не пусто, то, рассматривая η в качестве начальной перестановки, повторим все преобразования, начиная с выбора соответствующей пары из W. После описанных преобразований выбранная пара исключается из W. Таким образом, не более чем через $|W|$ итераций множество W станет пустым.

Перейдём к доказательству оптимальности перестановки η. В соответствии с леммой 1 необходимо показать, что $B_t(\eta) \leqslant B_t(\theta)$ и $C_t(\eta) \leqslant C_t(\theta)$.

Так как согласно (11) $b_i \geqslant a_{\theta_n}$, $b_j \geqslant a_{\theta_n}$ для каждого $\theta_n \in S \cup \{i\} \cup \{j\}$ и $b_{\theta_n} \geqslant a_{\theta_n}$ при каждом $\theta_n \in X$, имеем

$$B_t(\theta) = \max\{A_{l-1} + a_j, B_{l-1}\} + b_j + \sum_{n=l+1}^{t-1} b_{\theta_n} + b_i,$$

$$B_t(\eta) = \max\{A_{l-1} + a_i, B_{l-1}\} + b_i + \sum_{n=l+1}^{t-1} b_{\theta_n} + b_j.$$

По условию $a_i \leqslant a_j$. Значит, $B_t(\eta) \leqslant B_t(\theta)$.

Значение $C_t(\theta)$ определим по диаграмме, которая с учетом предыдущего вывода $B_t(\theta)$ имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & & 2 & & \ldots & l-1 & & l & & l+1 & & \ldots & t-1 & & t \\
a_{\theta_1} & \rightarrow & a_{\theta_2} & \rightarrow & \ldots & a_{\theta_{l-1}} & \rightarrow & a_j & & & & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & & \\
b_{\theta_1} & \rightarrow & b_{\theta_2} & \rightarrow & \ldots & b_{\theta_{l-1}} & \rightarrow & b_j & \rightarrow & b_{\theta_{l+1}} & \rightarrow & \ldots & b_{\theta_{t-1}} & \rightarrow & b_i \\
\downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\
c_{\theta_1} & \rightarrow & c_{\theta_2} & \rightarrow & \ldots & c_{\theta_{l-1}} & \rightarrow & c_j & \rightarrow & c_{\theta_{l+1}} & \rightarrow & \ldots & c_{\theta_{t-1}} & \rightarrow & c_i
\end{array}$$

При любом $n \in \{l+1, l+2, \ldots, t-1\}$ перестановка $\theta_n \in V$. Значит, $c_j \geqslant b_j \geqslant b_{\theta_n}$. Кроме того, $c_{\theta_n} \geqslant b_{\theta_n}$ при всех $\theta_n \in X$. Следовательно, критический путь обязательно пройдет через элемент c_j и, значит,

$$C_t(\theta) = \max\{A_{l-1} + a_j + b_j, B_{l-1} + b_j, C_{l-1}\} + \sum_{n=l}^{t} c_{\theta_n}.$$

Значение $C_t(\eta)$ вычисляется аналогично. Учитывая соотношение $c_i \geqslant b_i \geqslant b_{\theta_n}$ при $\theta_n \in V$, получаем

$$C_t(\eta) = \max\{A_{l-1} + a_i + b_i, B_{l-1} + b_i, C_{l-1}\} + \sum_{n=l}^{t} c_{\theta_n}.$$

Так как $a_i \leqslant a_j$ и $b_i \leqslant b_j$, то $C_t(\eta) \leqslant C_t(\theta)$. Лемма 3 доказана.

4. Теоретические основы и алгоритм решения задачи

Пусть $x_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ — набор элементов из X. Обозначим через P_{x_k} множество последовательностей $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, где $\alpha_i \in x_k$, $1 \leqslant i \leqslant k$, построенных в соответствии с леммой 3. Таким образом, если $i \in x_k$ и $j \in x_k$ таковы, что $i \prec j$, то в перестановке α i предшествует j. Покажем, что на множестве P_{x_k} величина $B_k(\alpha)$ может принимать не более k различных значений.

Так как вычисляется значение $B_k(\alpha)$, то рассматриваются только две машины. В расписании $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ элемент α_{r^*} называется *критическим*, если

$$B_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \max_{1 \leqslant r \leqslant k} \left(\sum_{i=1}^{r} a_{\alpha_i} + \sum_{i=r}^{k} b_{\alpha_i} \right) = \sum_{i=1}^{r^*} a_{\alpha_i} + \sum_{i=r^*}^{k} b_{\alpha_i}.$$

Пусть α_{r^*} — критический элемент. Тогда при любом $r \leqslant r^*$

$$\sum_{i=1}^{r^*} a_{\alpha_i} + \sum_{i=r^*}^{k} b_{\alpha_i} \geqslant \sum_{i=1}^{r} a_{\alpha_i} + \sum_{i=r}^{k} b_{\alpha_i} \Rightarrow \sum_{i=r+1}^{r^*-1} a_{\alpha_i} + a_{\alpha_{r^*}} \geqslant b_{\alpha_r} + \sum_{i=r+1}^{r^*-1} b_{\alpha_i}.$$

Так как $b_i \geqslant a_i$, то $\sum\limits_{i=r+1}^{r^*-1} b_{\alpha_i} \geqslant \sum\limits_{i=r+1}^{r^*-1} a_{\alpha_i}$ и, значит, $a_{\alpha_{r^*}} \geqslant b_{\alpha_r}$.

При $r > r^*$ из неравенства $a_{\alpha_{r^*}} \geqslant b_{\alpha_r}$ следует, что $b_{\alpha_{r^*}} = a_{\alpha_{r^*}} = b_{\alpha_r} = a_{\alpha_r}$, что по построению перестановки α возможно только тогда, когда $\alpha_r > \alpha_{r^*}$. Таким образом, элементу α_{r^*} предшествуют такие элементы α_r, что $a_{\alpha_{r^*}} \geqslant b_{\alpha_r}$, за исключением таких элементов α_r, что $b_{\alpha_{r^*}} = a_{\alpha_{r^*}} = b_{\alpha_r} = a_{\alpha_r}$ и которые имеют номер больше α_{r^*}. Тогда значение

$$B_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \sum_{i=r+1}^{r^*-1} a_{\alpha_i} + a_{\alpha_{r^*}} + b_{\alpha_{r^*}} + \sum_{i=r^*}^{k} b_{\alpha_i}$$

определено однозначно для всех расписаний, в которых элемент α_{r^*} является критическим. А так как имеется ровно k элементов, то число различных значений $B_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ не может быть больше k. Следовательно, множество P_{x_k} разбивается на классы с равными значениями $B_k(\alpha)$, причём число классов не превосходит k. Выбирая в каждом классе последовательность $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ с минимальным значением $C_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, получим не более k последовательностей, которые доминируют все остальные. Множество выбранных последовательностей обозначим через Q_{x_k}. Имеем $|Q_X| \leqslant n_0$ и в инверсной задаче $|Q_Y| \leqslant N - n_0$. Состыковывая попарно последовательности из Q_X и Q_Y, получим не более $n_0(N - n_0)$ расписаний, одно из которых является оптимальным.

Для построения Q_X (Q_Y в инверсной задаче) воспользуемся схемой динамического программирования. Без ограничений общности можно считать, что $X = \{1, 2, \ldots, n_0\}$ и его элементы лексикографически упорядочены по $(b_i, ; a_i)$, т. е. $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_{n_0}$, а если $b_i = b_{i+1}$, то $a_i \leqslant a_{i+1}$. Всюду далее $x_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Тогда можно переобозначить Q_{x_k} через Q_k, а P_{x_k} через P_k. Множества Q_k формируем последовательно для $k = 1, 2, \ldots, n_0$. Очевидно, что $Q_1 = \{(1)\}$. Пусть множества $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k-1}$ уже сформированы. Опишем алгоритм построения множества Q_k. Рассмотрим класс последовательностей из P_k, в которых элемент $i \in x_k$ является критическим. Пусть j_0 таково, что

$$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_{j_0} \leqslant a_i < b_{j_0+1} \leqslant \ldots \leqslant b_k.$$

Как показано выше, только элементы $1, \ldots, j_0$ предшествуют элементу i. Множество Q_{j_0} уже сформировано. В Q_{j_0} включаются только такие последовательности $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j_0})$, что в расписании $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j_0}, i)$ элемент i является критическим. Тогда

$$A_{j_0+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j_0}, i) = \sum_{n=1}^{j_0} a_n + a_i;$$

$$B_{j_0+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j_0}, i) = \sum_{n=1}^{j_0} a_n + a_i + b_i.$$

Каждую выбранную последовательность $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j_0}, i)$ достраиваем до последовательности $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j_0}, i, \alpha_{j_0+2}, \ldots, \alpha_k)$. При этом необходимо, чтобы элемент i был критическим. А так как в этом случае $B_k(\alpha)$ определено однозначно, то для доминирования других перестановок достаточно, чтобы значение $C_k(\alpha)$ было минимальным.

В перестановке $(\alpha_{j_0+2}, \ldots, \alpha_k)$ оптимизация осуществляется только на второй и третьей машинах. Для двух машин используем правило: деталь j обрабатывается раньше j', если $\min(b_j, c_{j'}) \leqslant \min(b_{j'}, c_j)$. С учётом неравенств $b_j \leqslant c_j$ и $b_{j'} \leqslant c_{j'}$ получаем $b_j \leqslant b_{j'}$ и, следовательно, $j < j'$, т. е. детали обрабатываем в порядке возрастания их номеров, если это не противоречит критичности элемента i.

Получаем простую схему достраивания последовательности. Пусть $J = \{1, 2, \ldots, k\} \setminus \{1, 2, \ldots, j_0, i\}$. Просматриваем элементы из J в порядке возрастания их номеров. На очередное место в перестановке ставим такой элемент j с наименьшим номером, что элемент i остаётся критическим. Исключаем j из J. Вновь просматриваем J с начала. И т. д. Возможны два исхода. Либо все элементы установлены и тогда последовательность достроена. Либо на каком-то шаге нужный элемент выбрать не удалось. Тогда данная последовательность не достраивается и далее её не рассматриваем.

После того, как все выбранные последовательности достроены и их множество не пусто, среди них выбираем такую последовательность, что величина $C_k(\alpha)$ минимальна. Таким образом, на множестве $\{1, 2, \ldots, k\}$ получаем единственную последовательность, в которой элемент i является критическим.

Описанный алгоритм выполняем для $i = 1, 2, \ldots, k$. В результате получаем множество Q_k.

Теорема. *При условии* $\min\{a_i, c_i\} \leqslant b_i \leqslant \max\{a_i, c_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, *трёхстаночная задача Джонсона полиномиально разрешима с временной* *сложностью не более* $O(N^3)$.

Доказательство. Оценим временну́ю сложность предложенного алгоритма. Предварительный этап выделения множеств X и Y осуществляется за линейное время. Для упорядочивания множества X по невозрастанию b_i требуется $O(N \log_2 N)$ операций.

Для того чтобы временна́я сложность алгоритма была минимальна, используем следующую схему. Первоначально полагаем $Q_1 = \{(1)\}$, а все множества Q_k, $2 \leqslant k \leqslant n_0$, — пустыми. Организуем цикл по $i = 1, 2, \ldots, n_0$, где i обозначает работу, которая является критической. Находим j_0 такое, что $b_{j_0} \leqslant a_i < b_{j_0+1}$. Заметим, что $j_0 < i$, так как иначе $a_i \leqslant b_i \leqslant b_{j_0}$. Множество Q_{j_0} сформировано на предыдущих шагах. Каждую последовательность из Q_{j_0} достраиваем до n_0 членов. При этом автоматически будут строиться все подпоследовательности для $k = j_0 + 1, j_0 + 2, \ldots, n_0$. Лучшую последовательность для данного k заносим в Q_k. После этого все множества Q_k, $k = 1, 2, \ldots, i$, будут сформированы. При фиксированном i для достраивания последовательностей из Q_{j_0} и формирования Q_k требуется $O(n_0 j_0)$ операций. Тогда на весь этап достраивания потребуется не более $O(n_0^2 j_0) \leqslant O(n_0^3)$ операций. Следовательно, множества Q_X и Q_Y могут быть сформированы за время $O(n_0^3)$ и $O((N - n_0)^3)$ соответственно. Время, необходимое для стыковки последовательностей из Q_X и Q_Y и выбора лучшего расписания, равно $O(n_0(N - n_0)N) = O(N^3)$. Таким образом, временна́я сложность алгоритма равна $O(N^3)$. Теорема доказана.

Автор благодарен С. В. Севастьянову за неоценимую помощь в работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глебов Н. И.** Некоторые случаи сводимости m-станочной задачи Джонсона к задачам с двумя станками // Управляемые системы. Сб. науч. тр. Вып. 17. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1978. С. 46–51.

2. **Левнер Е. В.** Сетевой подход к задачам теории расписаний // Исследования по дискретной математике. М.: Наука, 1973. С. 135–150.

3. **Achugbue J. O., Chin F. Y.** Complexity and solutions of some three-stage shop scheduling problems // Math. Oper. Res. 1982. V. 1, N 4. P. 532–544.

4. **Burns F., Rooker J.** Three-stage flow-shops with recessive second stage // Oper. Res. 1978. V. 26, N 1. P. 207–208.

5. **Garey M. R., Johnson D. S., Sethi R.** The complexity of flow shop and job shop scheduling // Math. Oper. Res. 1976. V. 1, N 2. P. 117–129.

6. **Johnson S. M.** Optimal two and three stage production schedules with setup times included // Naval. Res. Logist. Quart. 1954. V. 1, N 1. P. 61–68.

Адрес автора:

Омский филиал Института математики
им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13,
644099 Омск, Россия.
E-mail: svv@iitam.omsk.net.ru

Статья поступила
18 июля 2006 г.