ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2006. Серия 2. Том 13, № 2. 56–73

УДК 519.854

О ПРИБЛИЖЕНИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ ОПТИМАЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА МОЩНОСТЬ*)

А. Ю. Чирков, В. Н. Шевченко

Рассматриваются целочисленная задача о ранце и целочисленная минимизационная задача о ранце. Под k-оптимальным значением рассматриваемых задач понимается оптимальное значение соответствующей задачи с ограничением на мощность решения. Вводятся понятия гарантированной точности k-оптимального решения целочисленной задачи о ранце $\alpha_{k\,n}$ и для целочисленной минимизационной задачи о ранце $\beta_{k\,n}$, равные точной нижней грани отношения k-оптимального значения к отимальному значению.

Получены формулы, позволяющие вычислять значения $\alpha_{1\,n}$ и $\alpha_{n-1\,n}$. Указаны задачи, на которых эти значения достигаются. Вычислены значения $\beta_{1\,n}$ и $\beta_{n-1\,n}$, которые в отличие от целочисленной задачи о ранце недостижимы на конкретных задачах. Построены соответствующие серии примеров. Для $k = 2, ..., n-2$ доказаны неравенства $(2^{k+1}-2)/(2^{k+1}-1) \geqslant \alpha_{k\,n} \geqslant (2^n - 2^{n-k})/(2^n-1)$ и $1 - 2^{-k} \geqslant \beta_{k\,n} \geqslant (1-2^{1-n})...(1-2^{-k})$.

Введение

Множество вещественных чисел обозначим через $\mathbb{R}$, а множество целых чисел — через $\mathbb{Z}$. Пусть M — числовое множество; M_+ — множество неотрицательных чисел из M; M^n — множество n-элементных наборов с компонентами из M; M^n_k — множество тех наборов из M^n, у которых не более k компонент отличны от нуля. Элементы множества M^n будем называть *векторами* или *точками*. Под скалярным произведением ax векторов a и x будем понимать сумму произведений их компонент, т. е. $ax = a_1x_1 + ... + a_nx_n$. Если компоненты точек x и y удовлетворяют неравенствам $x_i > y_i$ ($x_i \geqslant y_i$), где $i = 1, \ldots, n$, то будем говорить, что $x > y$ ($x \geqslant y$).

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00552).

Для $a \in \mathbb{R}^n_+$ и $b \in \mathbb{R}_+$ определим множества

$$L(a,b) = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^n_+, ax \leqslant b\}, \quad G(a,b) = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^n_+, ax \geqslant b\}$$

и

$$L_k(a,b) = L(a,b) \cap \mathbb{Z}^n_k, \quad G_k(a,b) = G(a,b) \cap \mathbb{Z}^n_k, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

В статье рассматриваются целочисленная задача о ранце: найти

$$\max_{x \in L(a,b)} cx \tag{1}$$

и целочисленная минимизационная задача о ранце: найти

$$\min_{x \in G(a,b)} cx. \tag{2}$$

Точка $p \in L(a,b)$, на которой достигается максимум целевой функции cx, называется *оптимальным* решением целочисленной задачи о ранце (1), а значение целевой функции на оптимальном решении $\lambda(a,b,c) = cp$ — *оптимальным* значением задачи (1). Точку $v \in L_k(a,b)$, на которой достигается максимум целевой функции cx, назовём k-*оптимальным* решением задачи (1), а значение целевой функции на ней $\lambda_k(a,b,c) = cv$ — k-*оптимальным* значением задачи (1). Для определения близости k-оптимального значения целочисленной задачи о ранце к оптимальному значению введём отношения $\alpha_k(a,b,c) = \lambda_k(a,b,c)/\lambda(a,b,c)$ (если $\lambda(a,b,c) = 0$ или целевая функция не ограничена на $L(a,b,c)$, то будем считать, что $\alpha_k(a,b,c) = 1$). Величину $\alpha_k(a,b,c)$ назовём *точностью* k-оптимального решения целочисленной задачи о ранце (1), а точную нижнюю грань $\alpha_{k\,n} = \inf\{\alpha_k(a,b,c) \mid a,c \in \mathbb{R}^n_+,\ b \in \mathbb{R}_+\}$ — *гарантированной точностью* k-оптимального решения задачи (1).

Аналогичные понятия введём для задачи (2). Точка $w \in G(a,b)$, на которой достигается минимум целевой функции cx, называется *оптимальным* решением целочисленной минимизационной задачи о ранце (2), а значение целевой функции на оптимальном решении $\gamma(a,b,c) = cw$ — *оптимальным* значением задачи (2). Точку $u \in G_k(a,b)$, на которой достигается минимум целевой функции cx, назовём k-*оптимальным* решением задачи (2), а значение целевой функции на ней $\gamma_k(a,b,c) = cu$ назовём k-*оптимальным* значением задачи (2). Под точностью k-оптимального решения задачи (2) будем понимать отношение

$$\beta_k(a,b,c) = \gamma(a,b,c)/\gamma_k(a,b,c)$$

(если $\gamma_k(a,b,c) = 0$, то будем считать, что $\beta_k(a,b,c) = 1$). Точную нижнюю грань $\beta_{k\,n} = \inf\{\beta_k(a,b,c) \mid a,c \in \mathbb{R}^n_+,\ b \in \mathbb{R}_+\}$ назовём *гарантированной точностью* k-оптимального решения задачи (2).

Цель статьи — исследование зависимости величин $\alpha_{k\,n}$ и $\beta_{k\,n}$ от k и n. В частности, установлены соотношения $\alpha_{1\,n} \geqslant 0{,}59135549205\ldots$ (см. [4, 5]), $\beta_{1\,n} = 1/2$, $\alpha_{n-1\,n} = (2^n-2)/(2^n-1)$ (см. [2]), $\beta_{n-1\,n} = (2^{n-1}-1)/2^{n-1}$.

1. Общие свойства

Приведём ряд полезных неравенств.

Лемма 1. *Имеют место неравенства*:
(i) $\alpha_{k\,n} \geqslant \alpha_{k\,n+1}$,
(ii) $\alpha_{k\,n} \geqslant \alpha_{s\,n}\alpha_{k\,s}$, *где* $s = k+1,\ldots,n-1$,
(iii) $\beta_{k\,n} \geqslant \beta_{k\,n+1}$,
(iv) $\beta_{k\,n} \geqslant \beta_{s\,n}\beta_{k\,s}$, *где* $s = k+1,\ldots,n-1$.

Доказательство. (i) Пусть $a,c \in \mathbb{R}^n_+$ и $b \in \mathbb{R}_+$. Положим $a' = (a, b+1)$ и $c' = (c, 0)$. Легко убедиться в том, что все точки множества $L(a',b)$ получаются приписыванием нулевой компоненты к точкам из $L(a,b)$. Следовательно, $\lambda(a,b,c) = \lambda(a',b,c')$, $\lambda_k(a,b,c) = \lambda_k(a',b,c')$ и, значит, $\alpha_k(a,b,c) = \alpha_k(a',b,c') \geqslant \alpha_{k\,n+1}$. В силу произвольности выбора $a,c \in \mathbb{R}^n_+$ и $b \in \mathbb{R}_+$ из последнего неравенства следует, что $\alpha_{k\,n} \geqslant \alpha_{k\,n+1}$.

Аналогично доказывается неравенство (iii). По векторам $a,c \in \mathbb{R}^n_+$ и числу $b \in \mathbb{R}_+$ построим векторы $a' = (a,0)$ и $c' = (c, \gamma_k(a,b,c)+1)$. Легко убедиться, что тогда $\gamma(a,b,c) = \gamma(a',b,c')$, $\gamma_k(a,b,c) = \gamma_k(a',b,c')$ и, значит, $\beta_k(a,b,c) = \beta_k(a',b,c') \geqslant \beta_{k\,n+1}$. В силу произвольности выбора векторов $a,c \in \mathbb{R}^n_+$ и числа $b \in \mathbb{R}_+$ из последнего неравенства вытекает неравенство (iii).

(ii) Пусть p — s-оптимальное решение задачи (1) ($s > k$). Обозначим через I множество из s номеров ненулевых компонент решения p, через $a(I)$ вектор, который образован компонентами вектора a с номерами из I. Тогда $\lambda_s(a,b,c) = \lambda(a(I),b,c(I))$, $\lambda_k(a,b,c) \geqslant \lambda_k(a(I),b,c(I))$. Следовательно,

$$\alpha_k(a,b,c) = \frac{\lambda_k(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)} \geqslant \frac{\lambda_k(a(I),b,c(I))}{\lambda(a(I),b,c(I))}\frac{\lambda_s(a,b,c)}{\lambda(a,b,c)}$$
$$= \alpha_k(a(I),b,c(I))\alpha_s(a,b,c) \geqslant \alpha_{k\,s}\alpha_{s\,n}.$$

В силу произвольности векторов $a,c \in \mathbb{R}^n_+$ и числа $b \in \mathbb{R}_+$ из последнего неравенства вытекает неравенство (ii).

(iv) Пусть w — s-оптимальное решение задачи о ранце (2), а I — множество из s номеров ненулевых компонент решения w. Так как

$\gamma_s(a,b,c) = \gamma(a(I),b,c(I))$ и $\gamma_k(a,b,c) \leqslant \gamma_k(a(I),b,c(I))$,

$$\beta_k(a,b,c) \geqslant \frac{\gamma(a,b,c)}{\gamma_s(a,b,c)}\frac{\gamma(a(I),b,c(I))}{\gamma_k(a(I),b,c(I))} = \beta_s(a,b,c)\beta_k(a(I),b,c(I)) \geqslant \beta_{s\,n}\beta_{k\,s}.$$

В силу произвольности выбора векторов $a, c \in \mathbb{R}^n_+$ и числа $b \in \mathbb{R}_+$ из последнего неравенства следует неравенство (iv). Лемма 1 доказана.

Исследуем поведение величин $\alpha_k(a,b,c)$ и $\beta_k(a,b,c)$ в зависимости от a, b, c. Для $a \in \mathbb{R}^n_+$ положим $a_0 = a_1 + \ldots + a_n$.

Лемма 2. *Для любых $a, c \in \mathbb{R}^n_+$ и $b \in \mathbb{R}_+$ найдутся $a', c' \in \mathbb{R}^n_+$ и $a'', c'' \in \mathbb{R}^n_+$ такие, что $\alpha_k(a,b,c) \geqslant \alpha_k(a',a'_0,c')$ и $\beta_k(a,b,c) \geqslant \beta_k(a'',a''_0,c'')$, где $k = 1,\ldots,n-1$.*

Доказательство. Пусть p — оптимальное решение задачи (1). Рассмотрим векторы a', c', компоненты которых вычисляются по формулам: $a'_i = a_i p_i$, $c'_i = c_i p_i$, где $i = 1,2,\ldots,n$. Точка $(1,\ldots,1)$ принадлежит множеству $L(a',a'_0)$ и значение целевой функций $c'x$ на ней равно c'_0. Далее, $\lambda(a',a'_0,c') \geqslant c'_0 = cp = \lambda(a,b,c)$. Пусть $y \in L_k(a',a'_0)$. Введём точку y', компоненты которой вычисляются по формулам $y'_i = y_i p_i$. Имеет место включение $y' \in L_k(a,b,c)$. Действительно, включения $y' \in \mathbb{Z}^n_k$ и $y' \in \mathbb{Z}^n_+$ очевидны и $ay' = a'y \leqslant a'_0 = ap \leqslant b$. Из включений вытекает неравенство $c'y = cy' \leqslant \lambda_k(a,b,c)$. В силу произвольности выбора вектора $y \in L_k(a',a'_0)$ получаем неравенство $\lambda_k(a',a'_0,c') \leqslant \lambda_k(a,b,c)$. Из неравенств $\lambda(a',a'_0,c') \geqslant \lambda(a,b,c)$ и $\lambda_k(a',a'_0,c') \leqslant \lambda_k(a,b,c)$ получаем неравенство $\alpha_k(a',a'_0,c') \leqslant \alpha_k(a,b,c)$. Аналогичным образом доказывается вторая часть леммы. Лемма 2 доказана.

Лемма 2 позволяет избавиться в определении гарантированной точности k-оптимального значения рассматриваемых задач от параметра b и ограничиться рассмотрением задач, в которых вектор $(1,\ldots,1)$ является оптимальным решением.

Следствие 1. *При $k = 1,\ldots,n-1$ справедливы равенства*

$\alpha_{k\,n} = \inf\{\alpha(a,a_0,c) \mid a,c \in \mathbb{R}^n_+\}$ *и* $\beta_{k\,n} = \inf\{\beta(a,a_0,c) \mid \ a,c \in \mathbb{R}^n_+\}$.

Лемма 3. *Пусть $a, c \in \mathbb{R}^n_+$. Тогда:*

1) *если выполнено одно из условий*

(i) *одна из компонент вектора a равна нулю,*

(ii) *одна из компонент вектора c равна нулю,*

(iii) *точка $(1,\ldots,1)$ не является единственной вершиной $CL(a)$, в которой достигается максимум целевой функции cx,* *то* $\alpha_k(a, a_0, c) \geqslant \alpha_{k\,n-1}$;

2) *если выполнено одно из условий* (i), (ii) *или*

(iv) *точка* $(1, \ldots, 1)$ *не является единственной вершиной* $CG(a)$, *в которой достигается минимум целевой функции* cx,

то $\beta_k(a, a_0, c) \geqslant \beta_{k\,n-1}$.

Доказательство. Пусть одна из компонент вектора a равна нулю. Обозначим через s номер этой компоненты. Если $c_s > 0$, то целевая функция cx не ограничена сверху на $L_k(a, a_0)$ и, значит, $\alpha_k(a, a_0, c)=1$. Если же $c_s = 0$, то вычёркивание s-й компоненты из векторов a, c приводит к аналогичной задаче размерности $n-1$. В любом из этих случаев выполняется неравенство $\alpha_k(a, a_0, c) \geqslant \alpha_{k\,n-1}$.

Убедимся в справедливости неравенства $\beta_k(a, a_0, c) \geqslant \beta_{k\,n-1}$. Если $x \in G(a, a_0)$, то вектор x', возможно отличающийся от x только s-й нулевой компонентой, тоже принадлежит $G(a, a_0)$ и $cx \geqslant cx'$. Следовательно, вычёркивание s-й компоненты из векторов a и c приводит к аналогичной задаче меньшей размерности. Значит, $\beta_k(a, a_0, c) \geqslant \beta_{k\,n-1}$.

Пусть выполнено условие (ii). Обозначим через s номер нулевой компоненты в векторе c. Если $x \in L(a, a_0)$, то x', возможно отличающийся от x только s-й нулевой компонентой, принадлежит $L(a, a_0)$ и $cx = cx'$. Следовательно, вычёркивание s-й компоненты из векторов a и c приводит к аналогичной задаче меньшей размерности. Значит, $\alpha_k(a, a_0, c) \geqslant \alpha_{k\,n-1}$.

Если $a_s > 0$, то $\gamma_k(a, a_0, c) = 0$ и, следовательно, $\beta_k(a, a_0, c) = 1$. Если же $a_s = 0$, то вычёркивание s-й компоненты в векторах a, c приводит к аналогичной задаче размерности $n-1$. В любом из этих случаев выполняется неравенство $\beta_k(a, a_0, c) \geqslant \beta_{k\,n-1}$.

Пусть выполнено условие (iii). Будем считать, что $a > 0$ и $c > 0$, так как в противном случае выполнены либо условие (i), либо условие (ii) и неравенство $\alpha_k(a, a_0, c) \geqslant \alpha_{k\,n-1}$. Поскольку условие (iii) выполнено, в множестве $L(a, a_0)$ найдётся такой вектор $p \neq (1, \ldots, 1)$, что $\lambda(a, a_0, c) = cp$. Все компоненты p не могут быть отличны от нуля, так как иначе $ap > a_0$. Пусть $c' = (c_1p_1, \ldots, c_np_n)$ и $a' = (a_1p_1, \ldots, a_np_n)$. При доказательстве леммы 2 установлено неравенство $\alpha_k(a, b, c) \geqslant \alpha_k(a', b, c')$. Так как для вектора a' выполняется условие (i), то $\alpha_k(a', a_0', c') \geqslant \alpha_{k\,n-1}$ и $\alpha_k(a, a_0, c) \geqslant \alpha_{k\,n-1}$.

Пусть выполнено условие (iv). Будем считать, что $a > 0$ и $c > 0$, так как в противном случае выполнены либо условие (i), либо условие (ii) и неравенство $\beta_k(a, a_0, c) \geqslant \beta_{k\,n-1}$. Так как условие (iv) выполнено, то в множестве $G(a, a_0)$ найдётся такой вектор $w \neq (1, \ldots, 1)$, что $\gamma(a, a_0, c) = cw$. Все компоненты вектора w не могут быть отличны от нуля, так как иначе $cw > c_0$. Пусть $c' = (c_1w_1, \ldots, c_nw_n)$ и $a' = (c_1w_1, \ldots, c_nw_n)$. При доказательстве леммы 2 установлено неравенство $\beta_k(a,b,c) \geqslant \beta_k(a',b,c')$. Поскольку для вектора a' выполняется условие (i), $\beta_k(a',a'_0,c') \geqslant \beta_{k\,n-1}$ и $\beta_k(a,a_0,c) \geqslant \beta_{k\,n-1}$. Лемма 3 доказана.

Следствие 2. *Справедливы неравенства*

(i) $\alpha_{k\,n} \leqslant \alpha_{k+1\,n+1}$,

(ii) $\beta_{k\,n} \leqslant \beta_{k+1\,n+1}$.

Доказательство. *Усечением* вектора $a = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ назовём вектор $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + a_{n+1})$. Операцию усечения вектора обозначим чертой. Убедимся в справедливости неравенства (i). Выберем векторы $a, c \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ такими, что $a > 0$, $c > 0$ и точка $(1, \ldots, 1)$ является единственным оптимальным решением задачи (1) ($b = a_0$). При таком выборе условия (i), (ii) и (iii) леммы 3 не выполняются. Легко убедиться в справедливости соотношений $\lambda_k(\bar{a}, a_0, \bar{c}) \leqslant \lambda_{k+1}(a, a_0, c)$ и $\lambda(\bar{a}, a_0, \bar{c}) = c_0 = \lambda(a, a_0, c)$, из которых следует, что $\alpha_{k\,n} \leqslant \alpha_k(\bar{a}, a_0, \bar{c}) \leqslant \alpha_{k+1}(a, a_0, c)$. В силу леммы 3 и следствия 1 точная нижняя грань $\alpha_{k+1}(a, a_0, c)$ равна $\alpha_{k+1\,n}$. Тем самым неравенство (i) доказано.

Неравенство (ii) доказывается аналогично. Пусть векторы $a, c \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ такие, что условия (i), (ii) и (iv) леммы 3 не выполняются. Легко проверяются соотношения $\gamma(\bar{a}, a_0, \bar{c}) = \gamma(a, a_0, c)$ и $\gamma_k(\bar{a}, a_0, \bar{c}) \geqslant \gamma_{k+1}(a, a_0, c)$, из которых следует, что $\beta_{k\,n} \leqslant \beta_k(\bar{a}, a_0, \bar{c}) \leqslant \beta_{k+1}(a, a_0, c)$. Из последнего неравенства и следствия 1 вытекает неравенство (ii). Следствие 2 доказано.

Приведённых свойств достаточно для вычисления $\alpha_{n-1\,n}$ и $\beta_{n-1\,n}$ и получения оценок для $\alpha_{k\,n}$ и $\beta_{k\,n}$. Дальнейшее исследование свойств величин $\alpha_k(a,b,c)$ и $\beta_k(a,b,c)$ проведём после того, как вычислим $\alpha_{n-1\,n}$ и $\beta_{n-1\,n}$.

2. Вычисление $\alpha_{n-1\,n}$

Пусть векторы a и c имеют компоненты вида $a_i = 2^{n+i-1} + 2^{n-i}$, $c_i = 2^{i-1}$, где $i = 1, \ldots, n$. Покажем, что $\alpha_{n-1}(a, a_0, c) = (2^n - 2)/(2^n - 1)$.

Максимальное значение линейной формы cx на множестве $\{x \mid ax \leqslant a_0,\ x \in \mathbb{R}^n_+\}$ равно $a_0 \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} c_i/a_i$. Поскольку

$$c_i/a_i = (2^n + 2^{n-2i+1})^{-1} \leqslant 2^n/(4^n + 2)$$

и $a_0 = 4^n - 1$, то максимальное значение $2^n(4^n - 1)/(4^n + 2) < 2^n$. Таким образом, $\lambda(a, a_0, c) < 2^n$ и в силу целочисленности компонент вектора c получаем неравенство $\lambda(a, a_0, c) \leqslant 2^n - 1$. Точка $(1, \ldots, 1)$ принадлежит

$L(a, a_0)$ и значение целевой функции cx на ней равно $c_0 = 2^n - 1$. Тем самым установлено равенство $\lambda(a, a_0, c) = 2^n - 1$

Убедимся в справедливости равенства $\lambda_{n-1}(a, a_0, c) = 2^n - 2$. Во-первых, значение целевой функции cx в точке $(1, \ldots, 1, 0)$ из $L(a, a_0)$ равно $2^n - 2$. Во-вторых, точка $(1, .., 1)$ единственная в $L(a, a_0)$, для которой $cx = 2^n - 1$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим систему

$$\sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} x_j = 2^n - 1, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (2^{n+j-1} + 2^{n-j}) x_j \leqslant 4^n - 1. \tag{4}$$

Индукцией по n покажем, что эта система имеет единственное решение $(1, \ldots, 1)$ в $\mathbb{Z}_+^n$. При $n = 1$ это очевидно. Если $n \geqslant 2$, то, вычтя (3), умноженное на 2^n, из (4), получим неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} x_j \leqslant 2^n - 1, \tag{5}$$

которое вместе с уравнением (3) образует систему, равносильную исходной системе. Из (5) следует, что $x_1 \leqslant (2^n - 1)/2^{n-1} < 2$, т. е. $x_1 \leqslant 1$. Из (3) видно, что в любом целочисленном решении значение переменной x_1 — нечётное число, т. е. $x_1 = 1$. Нетрудно видеть, что после подстановки $x_1 = 1$ система (3), (5) несложными преобразованиями превращается в систему с меньшим числом переменных, которая по предположению индукции имеет единственное решение $(1, \ldots, 1)$.

Рассуждения, которые использовались для доказательства единственности решения системы (3), (4) на множестве Z_+^n, во многом аналогичны рассуждениям, проводимым при построении агрегирующей системы (см., например, [3]).

Таким образом, $\lambda_0(a, a_0, c) = 2^n - 2$. Значит,

$$(2^n - 2)/(2^n - 1) \geqslant \alpha_{n-1\,n}. \tag{6}$$

Обозначим через $[n]$ множество натуральных чисел, не превосходящих n. Для $c \in \mathbb{R}^n$ и $U \subseteq [n]$ положим $c(U) = \sum_{j \in U} c_j$, в частности, $c_0 = c([n])$. Положим $\tau(c) = \min_{U,V \subseteq [n];\, U \cap V = \varnothing} |c(U) - c(V)|$.

Лемма 4. *Если $c \in \mathbb{R}_+^n$, то $\tau(c) \leqslant c_0/(2^n - 1)$.*

Доказательство. Заметим, что $\tau(c) = \min\limits_{U,V\subseteq[n];\,U\neq V} |c(U) - c(V)|$. Действительно, пусть $U \neq V$. Обозначим через U' множество элементов U, не принадлежащих V, а через V' множество элементов из V, не принадлежащих U. Множества U' и V' не пересекаются и $|c(U) - c(V)| = |c(U') - c(V')|$. Отрезок $[0, c_0]$ разбивается величинами $c(U)$ на $2^n - 1$ отрезков (длины отрезков могут быть равны 0). Следовательно, максимальная длина наименьшего из этих отрезков не больше $c_0/(2^n - 1)$. Значит, $\tau(c) \leqslant c_0/(2^n - 1)$. Лемма 4 доказана.

Отметим, что при $c = (1, 2, \ldots, 2^{n-1})$ неравенство из леммы 4 обращается в равенство, т. е. $\tau(c) = c_0/(2^n - 1)$, и, следовательно, усилить его невозможно.

Теорема 1. *Справедливо равенство* $\alpha_{n-1\,n} = (2^n - 2)/(2^n - 1)$.

Доказательство. Из неравенства (6) следует, что для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости неравенства $\alpha_{n-1\,n} \geqslant (2^n - 2)/(2^n - 1)$. Выберем векторы $a, c \in \mathbb{R}^n_+$ такими, что условия (i), (ii) и (iii) леммы 3 не выполняются. Разобьём множество $[n]$ на три взаимно непересекающихся подмножества J_0, J_1, J_2. Обозначим через $p(J_0, J_1, J_2)$ вектор, компоненты которого определяются по формулам $p_i = s$, где $i \in J_s$ и $s = 0, 1, 2$. Так как точка $(1, \ldots, 1)$ является серединой отрезка, соединяющего точки $p(J_0, J_1, J_2)$ и $p(J_2, J_1, J_0)$, то по крайней мере одна из них принадлежит $L(a, a_0)$. Пусть для определённости ей является точка $p(J_0, J_1, J_2)$. Значение целевой функции на этой точке равно $cp(J_0, J_1, J_2) = c_0 - |c(J_0) - c(J_2)|$. Таким образом, справедливо неравенство $\lambda_{n-1}(a, a_0, c) \geqslant c_0 - \tau(c)$. Поскольку $\lambda(a, a_0, c) = c_0$, то $\alpha_{n-1}(a, a_0, c) \geqslant 1 - \tau(c)/c_0$. Используя лемму 4, из последнего неравенства получаем $\alpha_{n-1}(a, a_0, c) \geqslant (2^n - 2)/(2^n - 1)$. В силу следствия 1 и произвольности выбора векторов $a, c \in \mathbb{R}^n_+$ получаем неравенство $\alpha_{n-1\,n} \geqslant (2^n - 2)/(2^n - 1)$. Теорема 1 доказана.

Следствие 3. *Справедливы неравенства*

$$(2^{k+1} - 2)/(2^{k+1} - 1) \geqslant \alpha_{k\,n} \geqslant (2^n - 2^{n-k})/(2^n - 1).$$

Доказательство. Из утверждения (ii) леммы 1 следует, что

$$\alpha_{k\,n} \geqslant \alpha_{n-1\,n}\alpha_{n-2\,n-1}\ldots\alpha_{k\,k+1}.$$

Поставив в правую часть численные значения, получим

$$\alpha_{k\,n} \geqslant \frac{(2^n - 2)}{(2^n - 1)}\frac{(2^{n-1} - 2)}{(2^{n-1} - 1)}\cdots\frac{(2^{k+1} - 2)}{(2^{k+1} - 1)}.$$

Отсюда следует, что $\alpha_{k\,n} \geqslant (2^n - 2^{n-k})/(2^n - 1)$. Тогда из первого неравенства леммы 1 получим $\alpha_{k\,n} \leqslant \alpha_{k\,k+1} = (2^{k+1}-2)/(2^{k+1}-1)$. Следствие 3 доказано.

3. Вычисление $\beta_{n-1\,n}$

Установим верхнюю оценку для $\beta_{n-1\,n}$. Для этого потребуется следующая

Лемма 5. *Система неравенств*

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}x_i \leqslant 2^n - 1, \quad \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1}x_i \geqslant (3^n - 1)/2$$

на множестве $\mathbb{Z}_+^n$ *имеет единственное решение* $(1, \dots, 1)$.

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Допустим, что утверждение справедливо при $n-1$ и убедимся в его справедливости при n. Из включения $x \in \mathbb{Z}_+^n$ и неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{i-1}x_i \leqslant 2^n - 1$ вытекает неравенство $x_n < 2$. Таким образом, x_n может принимать значение либо 0, либо 1. При $x_n = 0$ система будет несовместной, так как максимальное значение линейной формы $x_1 + \dots + 3^{n-2}x_{n-1}$ на множестве неотрицательных решений неравенства $x_1 + \dots + 2^{n-2}x_{n-1} \leqslant 2^n - 1$ равно $3^{n-2}(2^n-1)/2^{n-2} < (3^n-1)/2$. Следовательно, $x_n = 1$, а далее, воспользуемся предположением индукции. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Справедливо неравенство* $\beta_{n-1\,n} \leqslant (2^{n-1}-1)/2^{n-1}$.

Доказательство. Положим $c = (2^{n-1}, \mu, 2\mu, \dots, 2^{n-2}\mu)$ и $a = (1, \nu, 3\nu, \dots, 3^{n-2}\nu)$, где $\mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$ такие, что $\nu > \mu > 2^n$.

Для доказательства равенства $\gamma(a, a_0, c) = c_0$ достаточно показать, что на множестве $x \in \mathbb{Z}_+^n$ система неравенств $cx \leqslant c_0$, $ax \geqslant a_0$ имеет единственное решение $(1, \dots, 1)$. Из неравенства $cx \leqslant c_0$ следует, что

$$x_1 \leqslant c_0/2^{n-1} < \mu \text{ и } x_2 + \ldots + 2^{n-2}x_n \leqslant 2^{n-1} - 1 + 2^{n-1}/\mu.$$

Левая часть последнего неравенства целочислена и $\mu > 2^n$, поэтому $x_2 + \ldots + 2^{n-2}x_n \leqslant 2^{n-1} - 1$. Из неравенств $x_1 < \mu$ и $ax \geqslant a_0$ следует, что $x_2 + \ldots + 3^{n-2}x_n \geqslant (3^{n-1}-1)/2 - (\mu-1)/\nu$. Левая часть последнего неравенства — целочисленная и $\nu > \mu$, поэтому $x_2 + \ldots + 3^{n-2}x_n \geqslant (3^{n-1}-1)/2$. По лемме 5 система неравенств

$$x_2 + \ldots + 2^{n-2}x_n \leqslant 2^{n-1} - 1, \quad x_2 + \ldots + 3^{n-2}x_n \leqslant (3^{n-1}-1)/2$$

имеет единственное решение $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$. Подставив это решение в исходную систему неравенств, получим $x_1 = 1$. Тем самым равенство $\gamma(a, a_0, c) = c_0 = 2^{n-1} + \mu(2^{n-1} - 1)$ доказано.

Точка $(0, 0, \ldots, 2)$ принадлежит множеству $G(a, a_0)$ и значение целевой функции в этой точке равно $2^{n-1}\mu$. Для доказательства равенства $\gamma_{n-1}(a, a_0, c) = 2^{n-1}\mu$ достаточно показать, что система неравенств $cx < 2^{n-1}\mu$, $ax \geqslant a_0$ на множестве $x \in \mathbb{Z}_+^n$ не имеет решений с нулевыми компонентами. Из неравенства $cx < 2^{n-1}\mu$ следует, что $x_1 < \mu$ и $x_2 + \ldots + 2^{n-2}x_n < 2^{n-1}$. Левая часть полученного неравенства целочисленная, поэтому, $x_2 + \ldots + 2^{n-2}x_n \leqslant 2^{n-1} - 1$. Из соотношений $x_1 < \mu$ и $ax \geqslant a_0$ получаем $x_2 + \ldots + 3^{n-2}x_n \geqslant (3^{n-1} - 1)/2$. По лемме 5 система неравенств $x_2 + \ldots + 2^{n-2}x_n \leqslant 2^{n-1} - 1$, $x_2 + \ldots + 3^{n-2}x_n \geqslant (3^{n-1} - 1)/2$ имеет единственное решение $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$. Подставив это решение в исходную систему неравенств, получим $1 \leqslant x_1 < \mu$. Таким образом, на множестве $x \in \mathbb{Z}_+^n$ система неравенств $cx < 2^{n-1}\mu$, $ax \geqslant a_0$ не имеет решений с нулевыми компонентами и, значит, $\gamma_{n-1}(a, a_0, c) = 2^{n-1}\mu$, $\beta_{n-1}(a, a_0, c) = 1/\mu + (2^{n-1} - 1)/2^{n-1}$. Поскольку μ может быть выбрано сколь угодно большим и $\beta_{n-1\,n} \leqslant \beta(a, a_0, c)$, то справедливо неравенство $\beta_{n-1\,n} \leqslant (2^{n-1} - 1)/2^{n-1}$. Лемма 6 доказана.

Положим $\tau'(c) = \min\limits_{U,V \subseteq [n]; U \cap V = \varnothing; V,U \neq \varnothing} |c(U) - c(V)|$, где $c \in \mathbb{R}_+^n$. Для дальнейшего потребуется следующая

Лемма 7. *Для $c \in \mathbb{R}_+^n$ справедливо неравенство $\tau'(c) \leqslant c_0/(2^{n-1} - 1)$, причём неравенство может обращаться в равенство только на тех векторах из R_+^n, у которых хотя бы одна из компонент равна нулю.*

Доказательство. Обозначим через $\tilde{c}$ вектор, получающийся из вектора c отбрасыванием последней (с номером n) компоненты. Покажем, что если c_n — наименьшая компонента вектора c, то $\tau'(c) \leqslant \tau(\tilde{c})$ (определение $\tau(c)$ дано перед леммой 4). Пусть U, V – непересекающиеся подмножества из $[n-1]$ такие, что $\tau(\tilde{c}) = |\tilde{c}(U) - \tilde{c}(V)|$. Если U, V — не пустые множества, то $\tau'(c) \leqslant |c(U) - c(V)| = \tau(\tilde{c})$. Пусть одно из множеств, например, U пустое, тогда множество V не пусто и $\tau(\tilde{c}) = c(V) \geqslant c_k$, где k произвольный номер из V. Поскольку $c_k \geqslant c_k - c_n \geqslant \tau'(c)$, то $\tau(\tilde{c}) \geqslant \tau'(c)$. По лемме 4 справедливо неравенство $\tau(\tilde{c}) \leqslant \tilde{c}_0/(2^{n-1} - 1)$, из которого следует, что $\tau'(c) \leqslant \tilde{c}_0/(2^{n-1} - 1) \leqslant c_0/(2^{n-1} - 1)$. Отметим, что последнее неравенство является строгим, если $c_n > 0$. Поскольку величина $\tau'(c)/c_0$ не зависит от перестановки компонент вектора c, то утверждение леммы 7 доказано.

Заметим, что если $c = (0, 1, 2, \ldots, 2^{n-2})$, то $\tau'(c) = c_0/(2^{n-1} - 1)$, т. е.

неравенство леммы 7 усилить невозможно.

Теорема 2. *Справедливо равенство* $\beta_{n-1\,n} = 1 - 2^{1-n}$. *Если* $a, c \in \mathbb{R}_+^n$ *и* $b \in \mathbb{R}_+$, *то* $\beta_{n-1}(a, b, c) > 1 - 2^{1-n}$.

Доказательство. Сначала убедимся в справедливости равенства $\beta_{n-1\,n} = 1 - 2^{1-n}$. Для этого в силу леммы 6 достаточно доказать, что $\beta_{n-1\,n} \geqslant 1 - 2^{1-n}$. По следствию 1 имеем

$$\beta_{n-1\,n} = \inf\{\gamma(a, a_0, c)/\gamma_{n-1}(a, a_0, c) \mid a, c \in \mathbb{R}_+^n\},$$

причём векторы a, c можно выбирать так, чтобы не выполнялись условия (i), (ii) и (iv) леммы 3. Разобьём множество натуральных чисел $[n]$ на три взаимно непересекающихся подмножества J_0, J_1, J_2. Обозначим через $p(J_0, J_1, J_2)$ точку, компоненты которой определяются по формулам $p_i{=}s$, где $i \in J_s$ и $s = 0, 1, 2$. Точка $(1, \ldots, 1)$ является серединой отрезка, соединяющего точки $p(J_0, J_1, J_2)$ и $p(J_2, J_1, J_0)$. Значит, по крайней мере одна из них принадлежит множеству $G(a, a_0)$. Если множества J_0 и J_2 не пусты, то по крайней мере одна из этих точек принадлежит множеству $G_{n-1}(a, a_0)$. Пусть для определённости такой точкой является $p(J_0, J_1, J_2)$. Значение целевой функции на этой точке равно $c_0 + |(J_0) - (J_2)|$. Таким образом, выполняются неравенства $\gamma_{n-1}(a, a_0, c) \leqslant c_0 + |c(J_0) - c(J_2)|$, справедливые при любых непересекающихся непустых подмножествах J_0 и J_2 множества $[n]$. Далее, $\beta_{n-1}(a, a_0, c) \geqslant (1 + |c(U) - c(V)|/c_0)^{-1} \geqslant (1 + \tau'(c)/c_0)^{-1}$. Из последнего неравенства и леммы 7 следует, что $\beta_{n-1}(a, a_0, c) \geqslant 1 - 2^{1-n}$. В силу произвольности выбора векторов $a, c \in \mathbb{R}_+^n$ из полученного неравенства следует, что $\beta_{n-1\,n} \geqslant 1 - 2^{1-n}$. Тем самым установлено равенство $\beta_{n-1\,n} = 1 - 2^{1-n}$.

Допустим, найдутся $a, c \in \mathbb{R}_+^n$ и $b \in \mathbb{R}_+$ такие, что $\beta_{n-1}(a, b, c) = \beta_{n-1\,n}$. В силу леммы 2 можно считать, что $b = a_0$. Далее, векторы a, c не должны удовлетворять условиям (i), (ii) и (iv) леммы 3. Но тогда $\beta_{n-1}(a, a_0, c) \geqslant (1 + \tau'(c)/c_0)^{-1}$, причём равенство возможно если одна из компонент вектора c равна нулю. Поскольку по условие (ii) леммы 3 это не так, то $\beta_{n-1}(a, a_0, c) > (1 + \tau'(c)/c_0)^{-1} \geqslant \beta_{n-1\,n}$. Получили противоречие. Следовательно, сделанное допущение неверно. Теорема 2 доказана.

Установим теперь неравенства для $\beta_{k\,n}$.

Следствие 4. *Справедливы неравенства*

$$1 - 2^{-k} \geqslant \beta_{k\,n} \geqslant (1 - 2^{1-n}) \ldots (1 - 2^{-k}).$$

Доказательство. По неравенству (iv) леммы 1 имеем

$$\beta_{k\,n} \geqslant \beta_{n-1\,n}\beta_{n-2\,n-1} \ldots \beta_{k\,k+1}.$$

Подставив в правую часть неравенства численные значения, получим $\beta_{k\,n} \geqslant (1-2^{1-n})\dots(1-2^{-k})$. Из неравенства (iii) леммы 1 следует, что $\beta_{k\,n} \leqslant \beta_{k\,k+1} = 1-2^{-k}$. Следствие 4 доказано.

4. Вычисление $\alpha_{1\,n}$

Вернёмся к вопросу о свойствах векторов $a, c \in \mathbb{R}^n_+$, для которых значение величины $\alpha_k(a, a_0, c)$ близко к минимальному. Если $\alpha_k(a, a_0, c) < \alpha_{k\,n-1}$, то по лемме 3 выполняется неравенство $a > 0$. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что неравенство $a > 0$ выполнено. Обозначим k-оптимальное решение задачи (1), где $b = a_0$, через y. Через $CL(a)$ обозначим выпуклую оболочку точек из $L(a, a_0)$, а через $CL_k(a)$ — выпуклую оболочку точек из $L_k(a, a_0)$.

Системой неравенств

$$\begin{cases} c \geqslant 0, & \\ cx \leqslant c_0 & \text{при } x \in L(a, a_0), \\ cx \leqslant cy & \text{при } x \in L_k(a, a_0), \end{cases} \tag{7}$$

описывается множество всех таких векторов c, что $\lambda(a, a_0, c) = c_0$ и $\lambda_k(a, a_0, c) = cy$. Поскольку $a > 0$, множества $L(a, a_0)$ и $L_k(a, a_0)$ конечны. Следовательно, множество решений системы (7) является полиэдром. Далее нетрудно убедиться, что этот полиэдр является заострённым конусом и, значит, является конической оболочкой своих рёбер [1]. Пусть $h_1, \dots, h_s$ — рёбра этого конуса. Для любого вектора c, удовлетворяющего системе неравенств (7), найдутся такие неотрицательные числа $\delta_1, \dots, \delta_s$, что $c = \delta_1 h_1 + \dots + \delta_s h_s$. Из последнего равенства следует, что

$$\lambda(a, a_0, c) = \delta_1 \lambda(a, a_0, h_1) + \dots + \delta_s \lambda(a, a_0, h_s), \tag{8}$$

$$\lambda_k(a, a_0, c) = \delta_1 \lambda_k(a, a_0, h_1) + \dots + \delta_s \lambda_k(a, a_0, h_s). \tag{9}$$

Для неотрицательных чисел μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 справедливо неравенство $(\mu_1+\mu_2)/(\mu_3+\mu_4) \geqslant \min\{\mu_1/\mu_3, \mu_2/\mu_4\}$. Отсюда и из соотношений (8) и (9) следует, что

$$\alpha_k(a, a_0, c) \geqslant \min_{i=1,\dots,s} \alpha_k(a, a_0, h_i). \tag{10}$$

Пусть минимум в правой части неравенства (10) достигается на векторе h. Если одна из компонент вектора h равна нулю или найдётся такой вектор $x \neq (1, \dots, 1)$ из $L(a, a_0)$, что $hx = h_0$, то по лемме 3 имеем $\alpha_k(a, a_0, h) \geqslant \alpha_{k\,n-1}$. Следовательно, неравенство $\alpha_k(a, a_0, h) < \alpha_{k\,n-1}$ выполняется тогда, когда h является ребром конуса

$$\{c|\, cx \leqslant cy,\ x \in L_k(a, a_0)\}.$$

Это условие равносильно тому, что гиперплоскость $\{x|\, hx = hy\}$ является фасетой (гранью размерности $n-1$) политопа $CL_k(a)$. Поскольку неравенства системы (7) выполняются на векторе h и $\alpha_k(a, a_0, h)<1$, неравенство $hx \leqslant hy$ строго отделяет точку $(1, \ldots, 1)$ от политопа $CL_k(a)$. Из сказанного следует

Лемма 8. *Справедливо равенство* $\alpha_{k\,n} = \inf \alpha_k(a, a_0, c)$, *где* $a \in \mathbb{R}^n_+$ *и* c — *фасета* $CL_k(a)$.

Лемма 8 позволяет вычислить точное значение $\alpha_{1\,n}$.

Положим $t_i = \lfloor a_0/a_i \rfloor$, где $i = 1, \ldots, n$. Так как $t_i \leqslant a_0/a_i < t_i + 1$, то $1/(t_i + 1) < a_i/a_0 \leqslant 1/t_i$ и, значит, $1/(t_1 + 1) + \ldots 1/(t_n + 1) < 1 \leqslant 1/t_1 + \ldots + 1/t_n$. Если $t_i = a_0/a_i$, $i = 1, \ldots, n$, то при любом $c \in \mathbb{R}^n_+$ выполняется равенство $\alpha_1(a, a_0, c) = 1$. Таким образом, достаточно рассматривать такие a, при которых хотя бы для одного i выполняется неравенство $t_i < a_0/a_i$ и, значит, $1/(t_1+1)+\ldots 1/(t_n+1) < 1 < 1/t_1+\ldots+1/t_n$. Необходимо отметить, что приводимые ниже конструкции, используемые для вычисления $\alpha_{1\,n}$, во многом повторяют построения из [7]. Положим $w = (1/t_1, \ldots, 1/t_n)$. Единственная фасета $CL_1(a)$, отделяющая точку $(1, \ldots, 1)$, задается уравнением $wx = 1$. Следовательно, $\alpha_1(a, a_0, c) \geqslant \alpha_1(a, a_0, w) = (1/t_1 + \ldots + 1/t_n)^{-1}$.

Пусть $t \in \mathbb{Z}^n_+$, $t > 0$ и выполняются неравенства

$$1/(t_1 + 1) + \ldots + 1/(t_n + 1) < 1 < 1/t_1 + \ldots + 1/t_n.$$

Функция $f(\delta) = 1/(t_1 + \delta) + \ldots + 1/(t_n + \delta)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и $f(1) < 1 < f(0)$. Следовательно, найдется такое δ, $0 < \delta < 1$, что $f(\delta) = 1$. Положим $a_i = 1/(t_i + \delta)$. Тогда $a_0 = 1$ и $t_i = \lfloor a_0/a_i \rfloor$. Таким образом, для любого $t \in \mathbb{Z}^n_+$, $t > 0$, удовлетворяющего неравенствам $1/(t_1 + 1) + \ldots + 1/(t_n + 1) < 1 < 1/t_1 + \ldots + 1/t_n$, найдётся такой вектор a, что $t_i = \lfloor a_0/a_i \rfloor$.

Тем самым задача вычисления $\alpha_{1\,n}$ сводится к определению точной нижней грани для величины $(1/t_1 + \ldots + 1/t_n)^{-1}$, где $t \in \mathbb{Z}^n_+$, $t > 0$ и $1/(t_1 + 1) + \ldots + 1/(t_n + 1) < 1 < 1/t_1 + \ldots + 1/t_n$. В свою очередь, поставленная задача эквивалентна следующей задаче: найти

$$\sup_{t\in\mathbb{Z}^n_+,\, t>0,\, 1/(t_1+1)+\ldots+1/(t_n+1)<1} (1/t_1 + \ldots + 1/t_n). \tag{11}$$

Положим $H(n, \delta) = \sup\limits_{t\in\mathbb{Z}^n_+,\, t>0,\, 1/(t_1+1)+\ldots+1/(t_n+1)<\delta} (1/t_1+\ldots+1/t_n)$. Покажем, что значение $H(n, \delta)$ достигается на некоторых наборах $t \in \mathbb{Z}^n_+$.

Легко убедиться, что $H(1,\delta) = 1/\lceil 1/\delta \rceil$ и точная верхняя грань достигается при $t_1 = \lceil 1/\delta \rceil$. Предположим, что значения $H(n-1,\delta)$ достигаются на некоторых наборах t из $\mathbb{Z}_+^{n-1}$. Рассмотрим набор t из $\mathbb{Z}_+^n$, удовлетворяющий неравенству $1/(t_1+1) + \ldots + 1/(t_n+1) < \delta$. Пусть значение наименьшей компоненты набора t равно j. Если $j > \lceil n/\delta \rceil$, то для вектора $t' = (t_1 - 1, \ldots, t_n - 1)$ справедливы соотношения $\sum\limits_{i=1}^{n} (t'_i + 1)^{-1} < \delta$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} (t'_i)^{-1} > 1/t_1 + \ldots + 1/t_n$. Следовательно, при вычислении $H(n,\delta)$ достаточно рассмотреть только те наборы $t \in \mathbb{Z}_+^n$, у которых одна из компонент не больше $\lceil n/\delta \rceil$. В силу предположения индукции и конечности возможных значений j получаем, что, во-первых, значение $H(n,\delta)$ достигается на некоторых наборах t из $\mathbb{Z}_+^n$, во-вторых, наименьшая компонента вектора t, на котором достигается $H(n,\delta)$, не превосходит $\lceil n/\delta \rceil$.

Пусть m – натуральное число и набор $t \in \mathbb{Z}^n$ удовлетворяет условиям $1/(t_1+1)+\ldots+1/(t_n+1) < 1/m$ и $1/t_1+\ldots+1/t_n = H(n,1/m)$. Обозначим через j наименьшую компоненту t. Так как

$$1/t_1 + \ldots + 1/t_n = 1/(t_1+1) + \ldots + 1/(t_n+1) + \sum_{i=1}^{n} 1/t_i(t_i+1)$$

и $\sum\limits_{i=1}^{n} 1/t_i(t_i+1) \leqslant (1/(t_1+1) + \ldots + 1/(t_n+1))/j$, то

$$1/t_1 + \ldots + 1/t_n \leqslant (1 + j^{-1})/m \text{ или } H(n,1/m) < (1+j^{-1})/m.$$

Положим $f = (m, m^2+m, nm(m+1)(m^2+m+1)-1, \ldots, nm(m+1)(m^2+m+1)-1)$. Справедливы соотношения $\sum\limits_{i=1}^{n} (f_i+1)^{-1} < m^{-1}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} (f_i)^{-1} \geqslant (m+2)/(m^2+m)$. Таким образом, при $n > 1$ справедливо неравенство $(1+j^{-1})/m > H(n,1/m) > (m+2)/(m^2+m)$. Из неравенства $(1+j^{-1})/m > (m+2)/(m^2+m)$ следует, что $m+1 > j$. Если $j < m$, то $1/(t_1+1)+\ldots+1/(t_n+1) > (j+1)^{-1} \geqslant 1/m$, что противоречит условиям. Следовательно, $m+1 > j \geqslant m$. Единственным целочисленным решением этой системы неравенств является $j = m$. Следовательно,

$$H(n,1/m) = 1/m + H(n-1, 1/(m^2+m)).$$

Определим последовательность чисел $\delta_1 = 1$ и $\delta_n = \delta_{n-1}(\delta_{n-1}+1)$ при $n \geqslant 2$. Из сказанного выше следует, что набор $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ является решением задачи (11) и $\alpha_{1\,n} = (\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i^{-1})^{-1}$.

Определим последовательность $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_n = 1 + \sigma_{n-1}(\delta_{n-1} + 1)$ при $n \geqslant 2$. Легко проверить, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i^{-1} = \sigma_n/\delta_n$ и, значит, $\alpha_{1\,n} = \delta_n/\sigma_n$. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Справедливо равенство $\alpha_{1\,n} = \delta_n/\sigma_n$. Это равенство достигается при $c = (\delta_1^{-1}, \ldots, \delta_n^{-1})$ и $a = (1/(\delta_1 + \varepsilon), \ldots, 1/(\delta_n + \varepsilon))$, где $0 < \varepsilon < 1$ определяется из равенства $\sum\limits_{i=1}^{n} 1/(\delta_i + \varepsilon) = 1$.*

Последовательность δ_n/σ_n ограничена и монотонно убывает с ростом n. Действительно,

$$\frac{\delta_n}{\sigma_n} - \frac{\delta_{n-1}}{\sigma_{n-1}} = \frac{\delta_n\sigma_{n-1} - \delta_{n-1}\sigma_n}{\sigma_n\sigma_{n-1}} = -\frac{\delta_{n-1}}{\sigma_n\sigma_{n-1}} < 0.$$

Последовательность $\delta_n/(1 + \sigma_n)$ ограничена и монотонно возрастает с ростом n. Действительно,

$$\frac{\delta_n}{\sigma_n + 1} - \frac{\delta_{n-1}}{\sigma_{n-1} + 1} = \frac{\delta_n(\sigma_{n-1} + 1) - (\sigma_n + 1)\delta_{n-1}}{(\sigma_n + 1)(\sigma_{n-1} + 1)} = \frac{\delta_{n-1}(\delta_{n-1} - 1)}{(1 + \sigma_n)(1 + \sigma_{n-1})} > 0.$$

Пределы обеих последовательностей совпадают. Значение предела находится между $\delta_n/(1+\sigma_n)$ и δ_n/σ_n, что позволяет вычислить его с априори заданной точностью. Значение этого предела с точностью до 10 знаков равно 0,59135549205.

5. Вычисление $\beta_{1\,n}$

Перейдём к вопросу о свойствах таких векторов $a, c \in \mathbb{R}^n_+$, что величина $\beta_k(a, a_0, c)$ близка к минимальному значению. Если $\beta_k(a, a_0, c) < \beta_{k\,n-1}$, то $a > 0$ по лемме 3. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что неравенство $a > 0$ выполнено. Обозначим k-оптимальное решение задачи о рюкзаке (2) через y, где $b = a_0$. Множество вершин выпуклой оболочки точек из $G(a, a_0)$ обозначим через $VG(a)$, а множество вершин выпуклой оболочки точек из $G_k(a, a_0)$ — через $VG_k(a)$. Множество всех векторов c таких, что $\gamma(a, a_0, c) = c_0$ и $\gamma_k(a, a_0, c) = cy$, описывается системой неравенств

$$\begin{cases} c \geqslant 0 & \\ cx \geqslant c_0 & \text{при } x \in VG(a) \\ cx \geqslant cy & \text{при } x \in VG_k(a). \end{cases} \tag{12}$$

Множества $VG(a)$ и $VG_k(a)$ конечны (см., например, [3]). Следовательно, множество решений системы (12) является полиэдром. Нетрудно убедиться, что данный полиэдр является заострённым конусом и, следовательно, является конической оболочкой своих рёбер [1]. Обозначим через $u_1, \dots, u_s$ рёбра этого конуса. Для любого вектора c, удовлетворяющего системе неравенств (12), найдутся такие неотрицательные числа $\delta_1, \dots, \delta_s$, что $c = \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_s u_s$. Из этого равенства следует, что

$$\gamma(a, a_0,) = \delta_1 \gamma(a, a_0, u_1) + \ldots + \delta_s \gamma(a, a_0, u_s), \tag{13}$$

$$\gamma_k(a, a_0,) = \delta_1 \gamma_k(a, a_0, u_1) + \ldots + \delta_s \gamma_k(a, a_0, u_s). \tag{14}$$

Из соотношений (13) и (14) получаем неравенство

$$\beta_k(a, a_0,) \geqslant \min_{i=1,\dots,s} \beta_k(a, a_0, u_i). \tag{15}$$

Пусть минимум в правой части неравенства (15) достигается на векторе u. Если одна из компонент вектора u равна нулю или найдётся такой вектор $x \neq (1, \dots, 1)$ из $G(a, a_0)$, что $cx = c_0$, то по лемме 3 выполняется неравенство $\beta_k(a, a_0, u) \geqslant \beta_{k\,n-1}$. Следовательно, неравенство $\beta_k(a, a_0, u) < \beta_{k\,n-1}$ выполняется только в том случае, когда u является ребром конуса $\{c |\, cx \geqslant cy,\ x \in VG(a)\}$. Это условие равносильно тому, что гиперплоскость $ux = uy$ является фасетой полиэдра $G_k(a, a_0)$. Поскольку $\beta_k(a, a_0, u) < 1$, неравенство $ux \geqslant uy$ строго отделяет точку $(1, \dots, 1)$ от полиэдра $G_k(a, a_0)$. Из приведённых рассуждений вытекает

Лемма 9. $\beta_{k\,n} = \inf\{\beta_k(a, a_0, c) \,|\, a \in \mathbb{R}^n_+,\ c$ *– фасета* $G_k(a, a_0)\}$.

Лемма 9 позволяет вычислить $\beta_{1\,n}$. Положим $t_i = \lfloor a_0/a_i \rfloor$. Так как $t_i \leqslant a_0/a_i < t_i + 1$, то $1/(t_i + 1) < a_i/a_0 \leqslant 1/t_i$ и, значит,

$$1/(t_1 + 1) + \ldots + 1/(t_n + 1) < 1 \leqslant 1/t_1 + \ldots + 1/t_n.$$

Если $t_i = a_0/a_i$ при $i = 1, \dots, n$, то при любом $c \in \mathbb{R}^n_+$ выполняется равенство $\beta_1(a, a_0, c) = 1$. Таким образом, хотя бы при одном i выполняется неравенство $t_i < a_0/a_i$ и, значит,

$$1/(t_1 + 1) + \ldots + 1/(t_n + 1) < 1 < 1/t_1 + \ldots + 1/t_n.$$

Положим $w = (1/(t_1 + 1), \dots, 1/(t_n + 1))$. Единственная фасета $G_1(a, a_0)$, отделяющая точку $(1, \dots, 1)$, имеет уравнение $wx = 1$ и

$$\beta_1(a, a_0, w) = 1/(t_1 + 1) + \ldots + 1/(t_n + 1).$$

Для любого $t \in \mathbb{Z}_+^n$, $t > 0$, удовлетворяющего неравенству $1/(t_1+1)+\ldots+1/(t_n+1) < 1 < 1/t_1+\ldots+1/t_n$, найдётся такой вектор a, что $t_i = \lfloor a_0/a_i \rfloor$. Таким образом, задача определения $\beta_{1\,n}$ сводится к построению точной нижней грани для $1/(t_1+1)+\ldots+1/(t_n+1)$ по таким векторам $t \in \mathbb{Z}_+^n$, $t > 0$, что

$$1/(t_1+1)+\ldots+1/(t_n+1) < 1 < 1/t_1+\ldots+1/t_n.$$

Пусть $t \in \mathbb{Z}_+^n$ и $1/t_1+\ldots+1/t_n > 1$. Тогда выполняется неравенство $1/(t_1+1)+\ldots+1/(t_n+1) > 1/2$. Действительно,

$$\begin{aligned} 1/(t_1+1)+\ldots+1/(t_n+1) &= 1/t_1+\ldots+1/t_n - \sum_{i=1}^{n} 1/t_i(t_i+1) \\ &> 1-(1/(t_1+1)+\ldots+1/(t_n+1))/j, \end{aligned}$$

где j – наименьшая компонента вектора t. Отсюда следует, что $1/(t_1+1)+\ldots+1/(t_n+1) > j/(j+1) \geqslant 1/2$. С другой стороны, положив $t = (1, m, \ldots, m)$, где m сколь угодно большое натуральное число, получаем $1/t_1+\ldots+1/t_n = 1+(n-1)/m > 1$ и

$$1/(t_1+1)+\ldots+1/(t_n+1) = 1/2+(n-1)/(m+1),$$

т. е. точная нижняя грань равна $1/2$ и не достигается ни на одном векторе t. Тем самым доказана

Теорема 4. *Справедливо равенство $\beta_{1\ n} = 1/2$. При $a, c \in \mathbb{R}_+^n$, $b \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство $\beta_1(a, b, c) > 1/2$.*

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Схрейвер А.** Теория линейного целочисленного программирования. Т. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1991.

2. **Чирков А. Ю.** О $(n-1)$-мерном приближённом решении n-мерной задачи о рюкзаке // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XIV Международной конференции (Пенза, 23–28 мая 2005 г.). М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2005. С. 173.

3. **Шевченко В. Н.** Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Физматлит, 1995.

4. **Шевченко В. Н., Чирков А. Ю.** Точность приближённого решения задачи о рюкзаке // Материалы XIV Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Нижний Новгород, 27 октября–1 ноября 2003 г.). Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного педагогического университета, 2003. С. 114–117.

5. **Шевченко В. Н., Чирков А. Ю.** Точность приближённого решения задачи о рюкзаке // Материалы 8 международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 2–6 февраля 2004 г.). М.: Изд-во МГУ, 2004. С. 114.
6. **Caprara A., Kellerer H., Pferschy U., Pisinger D.** Approximation algorithms for knapsack problems with cardinality constraints // European J. Oper. Res. 2000. V. 123, N 2. P. 333–345.
7. **Kohli R., Krishnamurti R.** A total-value greedy heuristic for the integer knapsack problem // Oper. Res. Lett. 1992. V. 12, N 2. P. 65–71.
8. **Kohli R., Krishnamurti R.** Joint performance of greedy heuristics for the integer knapsack problem // Discrete Appl. Math. 1995. V. 56, N 1. P. 37–48.

Адрес авторов:

Нижегородский гос. университет,
фак-т вычислит. матем. и кибернетики,
пр. Гагарина, 23,
603950 Нижний Новгород, Россия.
E-mail: shevgru@mail.ru, shev@uic.nnov.ru

Статья поступила
17 марта 2006 г.