ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2006. Серия 2. Том 13, № 2. 74–102

УДК 519. 865.3

ОБОБЩЁННАЯ ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОБМЕНА*)

В. И. Шмырев

Исследуется линейная экономическая модель обмена, в которой наряду с потребителями присутствуют фирмы, минимизирующие свои издержки при обеспечении некоторого минимального уровня общей стоимости производимой продукции. Для случая фиксированных бюджетов потребителей предложен и обоснован конечный алгоритм отыскания равновесия, развивающий оригинальный подход полиэдральной комплементарности, предложенный автором для классической модели обмена.

Введение

В данной статье исследуется линейная экономическая модель, которую можно рассматривать как естественное обобщение классической линейной модели обмена. Как и в случае модели обмена, исследуемая модель может рассматриваться как с переменными, так и с фиксированными бюджетами участников. Для простоты мы ограничиваемся подробным рассмотрением модели с фиксированными бюджетами. Для этого случая предлагается конечная процедура отыскания равновесного состояния. Эта процедура может быть использована и для модели с переменными бюджетами, о чём мы кратко скажем в конце статьи.

Идейной основой предлагаемых рассмотрений является общий подход, предложенный в [4, 6] для линейных моделей обмена, который можно охарактеризовать как полиэдральную комплементарность. Суть этого подхода состоит в следующем.

Линейность целевых функций участников порождает разбиение симплекса цен на многогранники, задающие зоны стабильного предпочтения тех или иных товаров участниками. Каждой такой зоне можно поставить в соответствие множество векторов цен, при которых возможен сбалансированный обмен товарами с учётом структуры предпочтений участников — зону сбалансированности, которая также является некоторым многогранником. Возникающее таким образом точечно-множественное

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Программы поддержки ведущих научных школ РФФИ (НШ–4999.2006.6).

отображение симплекса цен в себя обладает характерными свойствами отображений, возникающих в задачах линейной комплементарности. Можно сказать, что в этом случае мы имеем дело с полиэдральной комплементарностью. Неподвижные точки описанного отображения задают равновесные цены модели.

Известно, что задача отыскания равновесия в линейной модели обмена может быть сведена к задаче линейной комплементарности [9]. Рассматриваемый подход [4, 6] следует принципиально иной схеме и помимо получения алгоритма отыскания равновесия позволяет вскрыть некоторое свойство монотонности, присущее модели. Это свойство можно охарактеризовать следующим образом: возникающая задача полиэдральной комплементарности локально сводится к задаче линейной комплементарности с матрицей ограничений из класса P (матрицы с положительными главными минорами — см. [11]).

Рассматриваемая модель является обобщением модели обмена в том смысле, что помимо участников-потребителей присутствуют участники-фирмы. Каждая фирма характеризуется определёнными итоговыми финансовыми обязательствами по производству товаров, которые она должна выполнить, стараясь минимизировать неудовлетворённость своим планом производства. В качестве меры неудовлетворённости могут выступать, например, издержки на выполнение задания, исчисляемые по заранее фиксированным ценам, или трудоёмкость, или затраты какого либо ресурса и т. п. Покупка и продажа товаров для всех участников (потребителей и фирм) осуществляется по единым ценам. Понятие равновесия для такой модели вводится по аналогии с моделью обмена.

Интерес к рассмотрению данной модели возник в связи с исследованием более общей модели типа Эрроу–Дебре, изучавшейся автором в [8].

§ 1. Описание модели

Рассматривается модель, в которой имеется n товаров, m участников-потребителей и l участников-фирм. Пусть $J = \{1, \ldots, n\}$, $I = \{1, \ldots, m\}$, $K = \{m+1, \ldots, m+l\}$ — множества соответствующих номеров товаров, потребителей и фирм соответственно. Отметим, что нумерация участников едина для потребителей и фирм: $S = I \cup K = \{1, \ldots, m+l\}$ — множество номеров всех участников модели. Каждый потребитель $i \in I$ характеризуется двумя векторами $c^i, d^i \in R^n_+$. Вектор c^i — вектор коэффициентов целевой функции i-го потребителя. Его компоненты c^i_j задают сравнительную шкалу ценностей различных товаров для i-го участника; при выборе своего вектора закупок товаров $x^i = (x^i_1, \ldots, x^i_n)$ потребитель стремится максимизировать величину (c^i, x^i). Вектор $d^i = (d^i_1, \ldots, d^i_n)$ задаёт начальный запас товаров i-го потребителя.

Между потребителями возможен обмен товарами на рынке по некоторым неотрицательным ценам p_j, $j \in J$. Пусть $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — вектор цен. Масштаб цен будем считать фиксированным, полагая, что цены p_j удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1. \tag{1}$$

Тем самым изменение вектора цен ограничивается симплексом

$$\sigma = \bigl\{p \in R^n_+ \mid \sum_{j \in J} p_j = 1\bigr\}.$$

Товары на рынок поставляют также участники-фирмы. При этом k-я фирма планирует поставить на рынок товары на сумму не менее заданной положительной величины λ_k. Если через $x^k = (x^k_1, \ldots, x^k_n)$ обозначить план выпуска различных товаров k-й фирмой, то общая сумма её поставок по ценам p_j составит величину (p, x^k). Качество плана x^k фирма оценивает для себя величиной (c^k, x^k), стремясь её минимизировать. Здесь $c^k = (c^k_1, \ldots, c^k_n)$ — фиксированный неотрицательный вектор, компоненты которого задают для фирмы некоторую сравнительную шкалу "нежелательности"различных товаров. Например, их относительную трудоёмкость.

Таким образом, свой выбор x^k фирма будет осуществлять в соответствии с оптимальным решением оптимизационной задачи:

$$(c^k, x^k) \to \min \tag{2}$$

при условиях

$$(p, x^k) \geqslant \lambda_k, \tag{3}$$

$$x^k \geqslant 0. \tag{4}$$

Для того чтобы участники-потребители смогли раскупить все товары, помимо денег, которые они выручат от продажи своих товаров, нужно чтобы они располагали дополнительными средствами для закупки товаров, поставляемых фирмами. Пусть $\alpha_i \geqslant 0$ — начальный запас денег у i-го потребителя. Его общий бюджет после продажи своего запаса товаров d^i равен $\alpha_i + (p, d^i)$. Таким образом, выбор вектора закупок x^i

будет осуществляться в соответствии с оптимальным решением задачи i-го потребителя:

$$(c^i, x^i) \to \max \tag{5}$$

при условиях

$$(p, x^i) \leqslant \alpha_i + (p, d^i), \tag{6}$$

$$x^i \geqslant 0. \tag{7}$$

Состояние равновесия характеризуется некоторым вектором цен $\tilde{p}$ и набором векторов $\tilde{x}^i$ и $\tilde{x}^k$, $i \in I$ и $k \in K$, являющихся оптимальными решениями соответствующих задач (5)–(7) и (2)–(4) при $p = \tilde{p}$ и удовлетворяющих условию баланса товаров:

$$\sum_{i\in I} \tilde{x}^i = \sum_{k\in K} \tilde{x}^k + \sum_{i\in I} d^i. \tag{8}$$

В дальнейшем для простоты будем считать, что единицы учёта товаров выбраны так, что

$$\sum_{i\in I} d^i_j = 1, \quad j \in J, \tag{9}$$

т. е. $\sum\limits_{i\in I} d^i = e$ при $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Условие (8) принимает вид

$$\sum_{i\in I} \tilde{x}^i = \sum_{k\in K} \tilde{x}^k + e.$$

Ясно, что для векторов $\tilde{x}^i$ и $\tilde{x}^k$ соответствующие неравенства (6), (3) при $p = \tilde{p}$ будут выполняться как равенства. Кроме того, из (8) следует, что

$$\sum_{i\in I} (\tilde{p}, \tilde{x}^i) = \sum_{k\in K} (\tilde{p}, \tilde{x}^k) + \sum_{i\in I} (\tilde{p}, d^i). \tag{10}$$

Так как $(\tilde{p}, \tilde{x}^i) = \alpha_i + (\tilde{p}, d^i)$ и $(\tilde{p}, \tilde{x}^k) = \lambda_k$, то из (10) получаем

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = \sum_{k\in K} \lambda_k. \tag{11}$$

Таким образом, если множество фирм K пусто, то $\alpha_i = 0$ при любом $i \in I$ и модель превращается в классическую линейную модель обмена.

§ 2. Полиэдральные комплексы модели

Ниже для простоты рассмотрений предполагается, что все векторы c^i и c^k положительны: $c^i > 0$ при любом $i \in I$; $c^k > 0$ при любом $k \in K$. Это означает, что у потребителей нет товаров с нулевой ценностью, а у фирм нет «дармовых» товаров.

По аналогии с [4, 6] рассматриваемой модели при фиксированном векторе цен p поставим в соответствие следующую сетевую транспортную задачу:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij}\ln c_j^i - \sum_{k\in K}\sum_{j\in J} z_{kj}\ln c_j^k \to \max \tag{12}$$

при условиях

$$-\sum_{j\in J} z_{ij} = -\alpha_i - (p, d^i), \quad i \in I, \tag{13}$$

$$\sum_{i\in I} z_{ij} - \sum_{k\in K} z_{kj} = p_j, \quad j \in J, \tag{14}$$

$$\sum_{j\in J} z_{kj} = \lambda_k, \quad k \in K, \tag{15}$$

$$z_{ij} \geqslant 0, z_{kj} \geqslant 0, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K. \tag{16}$$

Ограничения (13), (15) и (16) этой задачи получаются путём введения переменных $z_{sj} = p_j x_j^s$, $s \in I \cup K$ и $j \in J$, из условий (6), (3), которые, как отмечалось, можно рассматривать в виде равенств и условий (4), (7). Записывая условие баланса товаров покомпонентно, будем иметь

$$\sum_{i\in I} x_j^i = \sum_{k\in K} x_j^k + 1 \text{ при } j \in J.$$

Домножая j-е условие на p_j, получаем условия (14).

Таким образом, условия (13)–(16) возникают из ограничений задач участников и условий баланса товаров.

Введённую транспортную задачу будем рассматривать как параметрическую задачу линейного программирования с параметрами p_j, $j \in J$, в правой части ограничений задачи. Суммируя уравнения (13)–(15), получим

$$0 = -\sum_{i\in I}\alpha_i + \sum_{k\in K}\lambda_k - \left(p, \sum_{i\in I} d^i\right) + \sum_{j\in J} p_j.$$

Ввиду (9) и (11) это равенство выполняется при любых значениях параметров p_j. Иными словами, полученная транспортная задача всегда является сбалансированной.

Используя известные средства теории транспортных задач, несложно получить описание множества тех векторов p, при которых введённая транспортная задача имеет допустимые решения. Не проводя подробных выкладок, укажем лишь, что это множество задаётся системой линейных неравенств

$$\sum_{j\in Q} p_j + \alpha \geqslant 0 \text{ при } Q \subset J, \tag{17}$$

где α — общее (в силу (10)) значение величин $\sum\limits_{k\in K} \lambda_k$ и $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i$.

Обозначим через Ω множество, задаваемое системой (17) и условием (1). Имеем $\sigma \subset \Omega$. Но $\sigma = \Omega$ лишь в случае, когда $\lambda_k = 0$ при всех $k \in K$, т. е. когда фирмы отсутствуют, и модель является обычной моделью обмена.

Из (13), (15) и (16) следует, что при $p \in \Omega$ множество допустимых решений транспортной задачи ограничено. В самом деле, складывая уравнения (13), с учётом (9) и (1) получаем

$$\sum_{i\in I} \sum_{j\in J} z_{ij} = \sum_{i\in I} \alpha_i + 1.$$

В результате с учетом (16) получаем ограниченность z_{ij}. Аналогично, ограниченность величин z_{kj} следует из (15) и (16).

Таким образом, при $p \in \Omega$ транспортная задача (12)–(16) разрешима. Обозначим через $f(p)$ получающееся в результате оптимальное значение целевой функции (12). Из теории параметрических задач линейного программирования следует, что возникающая таким образом на множестве Ω функция f является кусочно линейной вогнутой функцией, её участки линейности порождаются двойственно-допустимыми базисными множествами рассматриваемой задачи.

Для задачи, двойственной к задаче (12)–(16), система ограничений имеет вид:

$$-u_i + v_j \geqslant \ln c_j^i, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{18}$$

$$u_k - v_j \geqslant -\ln c_j^k, \quad k \in K,\ j \in J. \tag{19}$$

Будем предполагать, что выполняется стандартное *условие двойственной невырожденности*: в любом решении системы (18)–(19) число неравенств, выполняющихся как равенства, не превосходит $m + n + l - 1$.

Пусть $S = I \cup K$. Через $\mathfrak{B}$ обозначим совокупность всех двойственно-допустимых базисных множеств $\mathcal{B} \subset S \times J$ задачи

(12)–(16) и их всевозможных подмножеств $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$, обладающих *свойством s-накрываемости*:

$$\text{для любого } s \in S \text{ найдётся } j \in J \text{ такое, что } (s, j) \in \widetilde{\mathcal{B}}. \tag{20}$$

Любое базисное множество $\mathcal{B}$ с точностью до постоянного слагаемого порождает набор значений u_s и v_j, где $s \in S$ и $j \in J$, для которых условия (18)–(19) при $(s, j) \in \mathcal{B}$ выполняются как равенства. Если при этом $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, то при выполнении условия двойственной невырожденности это означает, что для указанного набора значений u_s и v_j все прочие условия системы (18)–(19), т. е. при $(s, j) \notin \mathcal{B}$, выполняются как строгие неравенства.

Каждому $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ поставим в соответствие многогранное множество $\Omega(\mathcal{B}) \subset \Omega$, которое можно описать следующим образом.

Пусть $\Gamma(\mathcal{B})$ — ориентированный граф с множеством вершин $J \cup \{n+s \mid s \in S\}$ и множеством дуг $\{(n+i, j)\}$ при $(i, j) \in \mathcal{B}$, $i \in I$, и множеством дуг $\{(j, n+k)\}$ при $(k, j) \in \mathcal{B}$, $k \in K$.

Из теории транспортных задач известно, что базисными множествами задачи (12)–(16) являются в точности такие множества B, для которых графы $\Gamma(B)$ являются деревьями. Собственным подмножествам базисных множеств будут соответствовать графы, распадающиеся на деревья — компоненты связности.

Пусть τ — число таких компонент, и вершинами ν-й компоненты являются вершины $n+i$ при $i \in I_\nu \subset I$, вершины $j \in J_\nu \subset J$ и вершины $n+k$ при $k \in K_\nu \subset K$. Условие баланса транспортируемого груза по ν-й компоненте имеет вид:

$$\sum_{i \in I_\nu} \bigl(\alpha_i + (p, d^i)\bigr) = \sum_{k \in K_\nu} \lambda_k + \sum_{j \in J_\nu} p_j, \quad \nu = 1, \dots, \tau. \tag{21}$$

При выполнении условий (21) система уравнений (13)–(15) будет совместной и при дополнительных ограничениях вида

$$z_{sj} = 0, \quad z_{sj} \notin \mathcal{B}. \tag{22}$$

При этом ввиду $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ переменные z_{sj}, $(s, j) \in \mathcal{B}$, однозначно определяются как линейные функции параметров p_j: $z_{sj} = z_{sj}(p)$. Неравенства

$$z_{sj}(p) \geqslant 0, \quad (s, j) \in \mathcal{B}, \tag{23}$$

вместе с условием (1) задают упомянутое множество $\Omega(\mathcal{B})$, которое представляет собой множество всех тех $p \in \Omega$, при которых оптимальное решение задачи (12)–(16) удовлетворяет условию (22).

Таким образом, для $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ множество $\Omega(\mathcal{B})$ описывается системой уравнений (21) и системой неравенств (23), т. е. является многогранником.

Средствами теории линейного программироваиня несложно убедиться, что следствием условия двойственной невырожденности является единственность оптимального решения в прямой задаче (если она разрешима). Применительно к рассматриваемой транспортной задаче (12)–(16) получаем, что при любом $p \in \Omega$ эта задача имеет единственное решение $z^*_{ij}(p)$. Если $\mathcal{B} = \{(i,j) \mid z^*_{ij} > 0\}$, то $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ и $p \in \Omega^\circ(\mathcal{B})$ ($\Omega^\circ(\mathcal{B})$ — множество относительно внутренних точек многогранника $\Omega(\mathcal{B})$, т. е. внутренних точек относительно аффинной оболочки множества $\Omega(\mathcal{B})$).

В результате получаем, что множества $\Omega(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, не пересекаются по относительно внутренним точкам и покрывают всё множество Ω. При этом из $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ следует $\Omega(\mathcal{B}_1) \subset \Omega(\mathcal{B}_2)$, и многогранник $\Omega(\mathcal{B}_1)$ является гранью многогранника $\Omega(\mathcal{B}_2)$. Используя терминологию комбинаторной топологии, будем говорить, что многогранники $\Omega(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, образуют полиэдральный комплекс ω, называя $\Omega(\mathcal{B})$ клетками этого комплекса.

Резюмируя изложенное выше, можно сказать, что комплекс ω возникает вследствии граневого строения подграфика полиэдральной вогнутой функции f, порождаемой параметрической транспортной задачей рассматриваемой модели.

Теперь введём другой полиэдральный комплекс, в некотором смысле двойственный к комплексу ω, обозначив его через ξ.

Возникновение этого комплекса содержательно можно пояснить следующим образом. О каждом множестве $\mathcal{B} \subset S \times J$ будем говорить, что оно задаёт некоторую структуру производства-потребления: для $(i,j) \notin \mathcal{B}$, $i \in I$, j-й товар не потребляется i-м потребителем и при $(k,j) \notin \mathcal{B}$, $k \in K$, k-я фирма не производит j-й товар. Структура $\mathcal{B}$ при векторе цен $q \in \sigma^\circ$ будет предпочтительной для всех участников модели, если для определяемых ниже величин y_i и y_k, $i \in I$ и $k \in K$, выполняются условия:

$$y_i = \max_{h \in J} \frac{c^i_h}{q_h} = \frac{c^i_j}{q_j} \quad \text{при } (i,j) \in \mathcal{B}, \quad i \in I, \tag{24}$$

$$y_k = \min_{h \in J} \frac{c^k_h}{q_h} = \frac{c^k_j}{q_j} \quad \text{при } (k,j) \in \mathcal{B}, \quad k \in K. \tag{25}$$

Условие (24) означает, что при $(i,j) \in \mathcal{B}$ j-й товар при ценах q имеет максимальную полезность для i-го потребителя, $i \in I$, в расчёте на единицу затрачиваемых денег. Аналогично, условие (25) означает, что при

$(k,j) \in \mathcal{B}$ j-й товар для фирмы $k \in K$ при ценах q характеризуется минимальными затратами в расчёте на единицу дохода фирмы. Условия (24) и (25) можно записать в следующем виде:

$$\begin{array}{ll} y_i q_j \geqslant c_j^i & \text{при } i \in I,\ j \in J, \\ y_i q_j = c_j^i & \text{при } (i,j) \in \mathcal{B},\ i \in I, \\ y_k q_j \leqslant c_j^k & \text{при } k \in K,\ j \in J, \\ y_k q_j = c_j^k & \text{при } (k,j) \in \mathcal{B},\ k \in K. \end{array}$$

Логарифмируя левые и правые части этих условий, получаем

$$\begin{array}{ll} \ln y_i + \ln q_j \geqslant \ln c_j^i & \text{при } i \in I,\ j \in J, \\ \ln y_k + \ln q_j \leqslant \ln c_j^k & \text{при } k \in K,\ j \in J, \\ \ln y_s + \ln q_j = \ln c_j^s & \text{при } (s,j) \in \mathcal{B}. \end{array}$$

Из этого следует, что величины $u_i = -\ln y_i$, $u_k = -\ln y_k$ и $v_j = \ln q_j$, $(i \in I, k \in K, j \in J)$ образуют допустимое решение двойственной системы неравенств (18)–(19); при этом неравенства, соответствующие парам $(s,j) \in \mathcal{B}$, выполняются как равенства. Кроме того, для каждого $s \in S$ существует пара $(s,j) \in \mathcal{B}$.

При выполнении условия двойственной невырожденности изложенное выше означает, что $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$. Множеству $\mathcal{B}$ поставим в соответствие множество всех $q \in \sigma^\circ$, удовлетворяющих условиям (24)–(25). Это множество обозначим через $\Xi(\mathcal{B})$. Ясно, что если $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$, то $\Xi(\mathcal{B}_1) \supset \Xi(\mathcal{B}_2)$ и $\Xi(\mathcal{B}_2)$ является гранью для многогранного множества $\Xi(\mathcal{B}_1)$. Несложно убедиться, что при выполнении условия двойственной невырожденности множества $\Xi(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, не пересекаются по относительно внутренним точкам, покрывая всё множество σ°. Совокупность множеств $\Xi(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, образует полиэдральный комплекс ξ.

Теорема 1. *Вектор цен $\hat{p} \in \sigma^\circ$ является равновесным тогда и только тогда, когда $\hat{p} \in \Omega(\mathcal{B}) \cap \Xi(\mathcal{B})$ при некотором $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$.*

Доказательство. Из $\hat{p} \in \Xi(\mathcal{B})$ следует, что при $p = \hat{p}$ структура производства-потребления $\mathcal{B}$, как было показано выше, является предпочтительной для всех участников модели. Вместе с тем из $\hat{p} \in \Omega(\mathcal{B})$ следует, что для величин $\hat{z}_{sj}$, однозначно получающихся в результате решения системы (13)–(15) совместно с (22), величины $\tilde{x}_j^s = \hat{z}_{sj}/\hat{p}$ задают оптимальные значения переменных x_j^s в задачах участников модели; при этом выполняются условия баланса товаров (8). Поэтому $\hat{p}$ — равновесный вектор цен модели.

Обратно, если $\hat{p}$ является равновесным, то ему соответствует совокупность векторов $\tilde{x}^s$, $s \in S$, которые являются решениями соответствующих задач участников (2)–(4), (5)–(7) и удовлетворяют условию баланса товаров (8). Если принять $\widehat{\mathcal{B}} = \{(s,j) \in S \times J \mid \tilde{x}^s_j > 0\}$, то легко убедиться, что $\hat{p} \in \Omega(\widehat{\mathcal{B}}) \cap \Xi(\widehat{\mathcal{B}})$. Теорема 1 доказана.

Таким образом, задача отыскания равновесного вектора цен приводит к следующей задаче: найти пару соответствующих друг другу клеток $\Omega(\mathcal{B}) \in \omega$ и $\Xi(\mathcal{B}) \in \xi$, имеющих непустое пересечение.

Известно, что задача линейной комплементарности (см. [12]) приводит к аналогичной задаче с той лишь особенностью, что возникающие в этом случае полиэдральные комплексы состоят из многогранных конусов.

Из сказанного следует, что задача отыскания равновесного вектора цен в рассматриваемой модели приводит к задаче полиэдральной комплементарности, обобщающей задачу линейной комплементарности.

Получающуюся задачу можно также переформулировать в виде задачи о неподвижной точке. Для этого на множестве Ω следует ввести точечно-множественное отображение $F : \Omega \to 2^{\sigma^\circ}$ следующим образом. Как отмечалось выше, каждая точка $p \in \Omega$ попадает в относительную внутренность ровно одного множества $\Omega(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$. Обозначая соответствующее множество $\mathcal{B}$ через $\mathcal{B}_p$, по определению положим $F(p) = \Xi(\mathcal{B}_p)$. В результате теорема 1 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 2. *Вектор $\hat{p} \in \sigma^\circ$ является равновесным тогда и только тогда, когда $\hat{p}$ является неподвижной точкой отображения F, т. е. $\hat{p} \in F(\hat{p})$.*

Так как $\hat{p} \in F(\hat{p})$ эквивалентно $\hat{p} \in F^{-1}(\hat{p})$, то в формулировке теоремы 2 отображение F можно заменить на $\Phi = F^{-1}$. Отображение Φ определено на σ° и каждой точке $q \in \sigma^\circ$ в качестве образа $\Phi(q)$ сопоставляет клетку $\Omega(\mathcal{B}^q) \in \omega$, где $\mathcal{B}^q$ однозначно определяется по точке q условием: q принадлежит относительной внутренности клетки $\Xi(\mathcal{B}^q)$.

§ 3. Модель с фиксированными бюджетами

Для классической линейной модели обмена известен её частный случай, рассмотренный Д. Гейлом [1] и именуемый моделью с фиксированными бюджетами. Речь идёт о модели, в которой у потребителей нет начальных запасов товаров: товары уже имеются на рынке в необходимых количествах. У потребителей имеются только начальные запасы денег.

Для рассматриваемой модели соответствующий аналог модели обмена с фиксированными бюджетами получается, если правую часть $\alpha_i + (p, d^i)$ в (6) заменить на λ_i, считая, что величины λ_i и λ_k, $i \in I$ и $k \in K$, связаны условием

$$\sum_{i\in I}\lambda_i = \sum_{k\in K}\lambda_k + 1, \tag{26}$$

которое является аналогом условия (11). Соответствующим образом изменится условие (13) в формулировке транспортной задачи модели. Оно примет вид

$$-\sum_{j\in J} z_{ij} = -\lambda_i, \quad i \in I. \tag{27}$$

Известно, что в модели обмена с фиксированными бюджетами равновесие существует всегда, в отличие от общего случая, когда равновесие может и не существовать [10]. Доказательство существования равновесия в модели с фиксированными бюджетами, приведённое в монографии Д. Гейла [1], опирается на сведéние задачи нахождения равновесия к оптимизационной задаче вида: максимизировать $\sum_{i\in I}\lambda_i \ln(c^i, x^i)$ при условиях $\sum_{i\in I} x^i = e$, $x^i \geqslant 0$, $i \in I$. Излагаемый ниже подход опирается на принципиально иную оптимизационную задачу, к описанию которой мы переходим.

Как отмечалось, транспортная задача модели разрешима при любом p из множества Ω, описание которого задаётся условием (1) и системой неравенств

$$\sum_{j\in Q} p_j + \sum_{k\in K}\lambda_k \geqslant 0 \text{ при } Q \subset J. \tag{28}$$

В результате возникает вогнутая функция $f(p)$, которая при данном $p \in \Omega$ задаёт оптимальное значение целевой функции (12). При $p \notin \Omega$ полагаем, что $f(p) = -\infty$. Как отмечалось ранее, функция $f(p)$ является кусочно линейной и области линейности этой функции совпадают с множествами $\Omega(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, т. е. задаются клетками введённого полиэдрального комплекса ω. Специфика рассматриваемого случая модели с фиксированными бюджетами состоит в том, что клетки $\Xi(\mathcal{B})$ двойственного полиэдрального комплекса ξ позволяют описать субдифференциальное отображение $G : p \in \Omega \to \partial f(p)$.

Под $\partial f(p)$ для вогнутой функции f по определению понимается множество её субградиентов в точке p, т. е. множество векторов g таких, что выполняется условие

$$f(q) \leqslant f(p) + (g, q - p) \text{ при любом } q. \tag{29}$$

Легко видеть, что для выпуклой функции $(-f)$ вектор $(-g)$ является субградиентом в общепринятом смысле, а её субдифференциал $\partial(-f)(p)$ связан с субдифференциалом $\partial f(p)$ равенством $\partial(-f)(p) = -\partial f(p)$.

Так как в данном случае функция $f(p)$ порождается задачей линейного программирования с изменяющейся правой частью системы её ограничений, то (см. [7]) множество $\partial f(p)$ может быть описано посредством оптимальных векторов двойственных переменных, отвечающих оптимальному решению задачи (12)–(16) в точке p, т. е. если $W(p)$ — множество оптимальных двойственных векторов $w = (u_1, \dots, u_{m+l}, v_1, \dots, v_n)$ в точке p, то $\partial f(p)$ является проекцией множества $W(p)$ на пространство переменных v_j, $j \in J$, что можно записать в виде: $\partial f(p) = V(p)$. Покажем, что отображение $G = \partial f$ связано с введённым ранее отображением $F : p \in \Omega(\mathcal{B}) \to \Xi(\mathcal{B}_p)$ следующим образом:

$$\partial f(p) = \{\ln q + te \mid q \in F(p), t \in \mathbb{R}^1\}, \tag{30}$$

где $\ln q = (\ln q_1, , \dots, \ln q_n)$, а $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

В самом деле, для p из относительной внутренности $\Omega^\circ(\mathcal{B})$ клетки $\Omega(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, множество $W(p)$ задаётся как множество всех решений системы неравенств (18)–(19) при условии, что неравенства, соответствующие парам $(s, j) \in \mathcal{B}$, должны выполняться как равенства:

$$\begin{array}{ll} -u_i + v_j = \ln c_j^i & \text{при } i \in I,\ (i, j) \in \mathcal{B}, \\ u_k - v_j = -\ln c_j^k & \text{при } k \in K,\ (k, j) \in \mathcal{B}. \end{array}$$

Ясно, что при этом величины u_s и v_j $(s \in I \cup K,\ j \in J)$ можно изменять на одно и то же слагаемое, что не изменит величин разностей $u_s - v_j$. Отсюда следует, что множество соответствующих векторов $v = (v_1, \dots, v_n)$, т. е. множество $V(p)$, таково, что если $v \in V(p)$, то $(v + te) \in V(p)$ при любом t.

Вводя величины $q_j > 0$ и $y_s > 0$ формулами $u_s = -\ln y_s$, $v_j = \ln q_j$, получаем, что для этих величин выполняются условия (24)–(25); при этом вектор $q = (q_1, \dots, q_n)$ можно умножать на положительное число. Поэтому можно считать, что $q \in \sigma^\circ$. Следовательно, $q \in \Xi(\mathcal{B}) = F(p)$. Столь же просто получаем и обратное, т. е. взяв $q \in \Xi(\mathcal{B})$ $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, можно определить величины y_s в соответствии с формулами (24)–(25) и убедиться, что величины $u_s = -\ln y_s$ и $v_j = \ln q_j$ задают оптимальный вектор двойственных переменных в задаче (12)–(16) при $p \in \Omega^\circ(\mathcal{B})$.

Равенство (30) позволяет переформулировать теорему 2 для рассматриваемого случая фиксированных бюджетов в следующем виде.

Теорема 3. *Точка $\hat{p} \in \sigma^\circ$ задает равновесный вектор цен модели тогда и только тогда, когда $\ln \hat{p} \in \partial f(\hat{p})$.*

Замечание. В приведённом обосновании этого утверждения использовались полиэдральные комплексы w и ξ, которые были введены в предположении, что выполняется условие двойственной невырожденности. Однако можно показать, что теорема 3 верна и без этого предположения. На доказательстве этого факта мы не останавливаемся.

Введём в рассмотрение функцию $h(p)$, задавая её при $p \in \sigma^\circ$ формулой $h(p) = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \ln p_j$ и доопределяя на границе $\partial\sigma$ симплекса σ по непрерывности: $h(p) = 0$ при $p \in \partial\sigma$. Для $p \notin \sigma$ считаем $h(p) = +\infty$.

Функция $h(p)$ строго выпукла на σ. На $\Omega \supset \sigma$ определяется вогнутая функция $f(p)$. Тем самым на σ определена строго выпуклая функция $\varphi(p) = h(p) - f(p)$. Эта функция очевидным образом непрерывна, а значит, на компакте σ имеет точку минимума. Ввиду строгой выпуклости функции φ такая точка будет единственной. Кроме того, из свойств функций h и f следует, что точка минимума не может принадлежать границе $\partial\sigma$. В этом можно убедиться, рассматривая точку $p \in \sigma^\circ$, которая стремится к некоторой точке $\bar{p} \in \partial\sigma$ по определённому направлению g. В этом случае, как несложно показать, будем иметь $\dfrac{\partial h}{\partial g}(p) \to +\infty$, в то время как $\dfrac{\partial f}{\partial g}(p)$ не будет меняться при p, достаточно близких к $\bar{p}$ (ввиду кусочной линейности функции f). В итоге получаем, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial g}(p) \to +\infty$$

при $p \to \bar{p}$. Таким образом, точка минимума функции φ на σ лежит внутри σ (т. е. принадлежит множеству σ°).

Доопределим функцию φ на всём $\mathbb{R}^n$: для $p \notin \sigma$ положим $\varphi(p) = +\infty$.

Теорема 4. *Вектор $\hat{p}$ является равновесным вектором цен в модели с фиксированными бюджетами тогда и только тогда, когда $\hat{p}$ является точкой минимума функции $\varphi(p)$.*

Доказательство. Как равновесный вектор цен модели, так и точка минимума функции φ принадлежат множеству σ°. Необходимое и достаточное условие того, что точка $\hat{p} \in \sigma^\circ$ является точкой минимума для функции φ, заключается в том, что $0 \in \partial\varphi(\hat{p})$. По теореме Моро–Рокафеллара $\partial\varphi(\hat{p}) = \partial h(\hat{p}) + \partial(-f)(\hat{p}) = \partial h(\hat{p}) - \partial f(\hat{p})$. При этом имеем

$$\partial h(\hat{p}) = \{\ln \hat{p} + te \mid t \in \mathbb{R}^1\}.$$

Кроме того, множество $\partial f(\hat{p})$ таково, что если $g \in \partial f(\hat{p})$, то $(g + te) \in \partial f(\hat{p})$ при любом t. Тем самым условие $0 \in \partial\varphi(p)$ эквивалентно условию

$\ln \hat{p} \in \partial f(\hat{p})$. Отсюда и из теоремы 3 следует утверждение теоремы 4. Теорема 4 доказана.

Следствие. *При предположении, что все $c^s > 0$, $s \in S$, равновесный вектор цен в модели с фиксированными бюджетами существует и единственен.*

Замечание. Требование положительности векторов c^i при $i \in I$ может быть ослаблено. Мы остановимся на этом в § 6.

Отправным фактом для получения утверждения теоремы 4 послужила теорема 2, связывающая равновесные векторы цен с неподвижными точками отображения F. Поскольку, как отмечалось, неподвижные точки отображения F совпадают с неподвижными точками обратного отображения $\Phi = F^{-1}$, отправляясь от отображения Φ, можно сформулировать в определённом смысле двойственный критерий равновесности. Для этого следует перейти к сопряжённым функциям. При этом для вогнутых функций это понятие вводится следующим образом: если f — вогнутая функция, то под сопряжённой к ней функцией понимается функция f^*, определяемая формулой

$$f^*(y) = \inf_x \{(x, y) - f(x)\}.$$

Несложно убедиться, что при этом f^* — вогнутая функция и $f^*(y) = -(-f)^*(-y)$, где $(-f)^*$ — сопряжённая к выпуклой функции $(-f)$ в общепринятом смысле. Кроме того, как и для выпуклых функций, субдифференциальные отображения ∂f и ∂f^* являются взаимно обратными. Напомним, что для вогнутых функций субградиент определяется в соответствии с неравенством (29).

Теорема 5. *Вектор $\hat{p} \in \sigma^\circ$ является равновесным вектором цен модели тогда и только тогда, когда $\hat{p}$ является точкой минимума функции $\psi(p) = -f^*(\ln p)$ на множестве σ°.*

Доказательство. Как следует из доказательства теоремы 4, равновесность вектора $\hat{p} \in \sigma^\circ$ эквивалентна тому, что $\ln \hat{p} \in \partial h(\hat{p}) \cap \partial f(\hat{p})$. В силу взаимной обратности субдифференциальных отображений для сопряжённых функций это условие эквивалентно условию

$$\hat{p} \in \partial h^*(\ln \hat{p}) \cap \partial f^*(\ln \hat{p}).$$

Последнее означает, что для выпуклой функции $\eta = h^* - f^*$ имеем $0 \in \partial \eta(\ln \hat{p})$. Следовательно, $\hat{p}$ является точкой минимума функции $\eta(\ln p)$ на множестве положительных векторов p.

Таким образом, равновесность $\hat{p}$ из σ° эквивалентна тому, что точка $\hat{p}$ является точкой минимума функции $\eta(\ln p) = h^*(\ln p) - f^*(\ln p)$ на множестве R^n_{++}.

Остаётся воспользоваться тем, что $h^*(x)$ ([2], с. 166) представимо в виде $h^*(x) = \ln \sum\limits_{j=1}^n e^{x_j}$. Поэтому $h^*(\ln p) = \ln \sum\limits_{j=1}^n p_j$ при любом $p > 0$. Теперь если $\hat{p}$ — равновесный вектор цен, то $\hat{p} \in \sigma^\circ$ и, будучи точкой минимума функции $\eta(\ln p)$ на R^n_{++}, $\hat{p}$ является точкой минимума этой функции на σ°. Но на σ° имеем $\sum\limits_{j=1}^n p_j = 1$. Следовательно, $h^*(\ln p) = 0$. Поэтому $\hat{p}$ — точка минимума функции $\psi(p) = -f^*(\ln p)$ на σ°.

Убедимся в справедливости обратного утверждения. Если $\hat{p}$ — точка минимума функции $\psi(p)$ на σ°, то $\hat{p}$ — точка минимума функции $\eta(\ln p)$ на σ°, так как на σ° функции $\psi(p)$ и $\eta(\ln p)$ совпадают. Но несложно убедиться, что функция $\eta(\ln p)$ является положительно однородной функцией нулевой степени переменного p: $\eta(\ln(tp)) = \eta(\ln p)$ при любом $t > 0$. Действительно, при $q \notin \sigma$ имеем $h(q) = +\infty$. Следовательно,

$$h^*(\zeta) = \sup_{q\in\mathbb{R}^n}\Big((q,\zeta) - h(q)\Big) = \sup_{q\in\sigma}\Big((q,\zeta) - h(q)\Big).$$

Поэтому при $\zeta = \ln(tp)$ получаем

$$h^*(\ln(tp)) = \sup_{q\in\sigma}\{(\ln t)\sum_{j=1}^n q_j + (q, \ln p) - h(q)\}.$$

Отсюда и из равенства $\sum\limits_{j=1}^n q_j = 1$ при $q \in \sigma$ следует, что

$$h^*(\ln(tp)) = \ln t + \sup_{q\in\sigma}\{(q,\ln p) - h(q)\} = \ln t + h^*(\ln p).$$

Аналогично, поскольку $\sum\limits_{j=1}^n q_j = 1$ и $f(q) = -\infty$ при $q \notin \Omega$, получаем

$$f^*(\ln(tp)) = \ln t + \inf_{q\in\Omega}\{(q,\ln p) - f(q)\} = \ln t + f^*(\ln p).$$

Следовательно,

$$\eta(\ln(tp)) = \ln t + h^*(\ln p) - (\ln t + f^*(\ln p)) = h^*(\ln p) - f^*(\ln p) = \eta(\ln p).$$

С учётом однородности функции $\eta(\ln p)$ заключаем, что $\hat{p}$ является точкой минимума функции $\eta(\ln p)$ на R^n_{++}. Значит, $\hat{p}$ — равновесный вектор цен модели. Теорема 5 доказана.

§ 4. Алгоритм субоптимизации для отыскания равновесного вектора цен

4.1. Описание алгоритма. Для задачи минимизации квазивыпуклой функции на выпуклом многограннике, заданном линейной системой уравнений и неравенств, в [3] была предложена процедура, обобщающая схему метода последовательного улучшения (симплекс-метода) для задач линейного программирования. Эта процедура, названная методом субоптимизации, состоит в направленном переборе граней исходного многогранника. При рассмотрении очередной грани решается задача отыскания минимума функции на аффинном носителе грани — этим объясняется название процедуры.

Предлагаемую процедуру отыскания равновесного вектора цен можно рассматривать как аналог метода субоптимизации применительно к задаче отыскания минимума введенной в § 3 функции $\psi(p)$ на множестве σ^0. Роль граней исходного многогранника выполняют клетки $\Xi(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$. Эта процедура является обобщением аналогичных построений для классической модели обмена, изложенных в [5, 14].

Один шаг процедуры состоит в следующем. К началу $(t+1)$-го шага имеются некоторое $\mathcal{B}_t \in \mathfrak{B}$ и точка $q^t \in \Xi(\mathcal{B}_t)$. Пусть $L(\mathcal{B}_t)$ — аффинный носитель клетки $\Xi(\mathcal{B}_t) \in \xi$, а $M(\mathcal{B}_t)$ — аффинный носитель клетки $\Omega(\mathcal{B}_t) \in \omega$. Ниже будет показано, что для любого $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ однозначно определяется точка r, являющаяся пересечением соответствующих аффинных носителей $L(\mathcal{B})$ и $M(\mathcal{B})$: $\{r\} = L(\mathcal{B}) \cap M(\mathcal{B})$. Пусть r^t — такая точка, порождаемая множеством $\mathcal{B}_t$. Возможны два случая.

(i) $q^t = r^t$. В этом случае проверяется выполнение условия $r^t \in \Omega(\mathcal{B}_t)$. Для этого подставляем $p = r^t$ в уравнения (13)–(14) и, требуя дополнительно выполнения условия $z_{sj} = 0$, $(s,j) \notin \mathcal{B}_t$, определяем величины $z_{sj}(r^t)$ из полученной системы уравнений (13)–(15). Условие $r^t \in \Omega(\mathcal{B}_t)$ эквивалентно условию $z_{sj}(r^t) \geqslant 0$ при всех $(s,j) \in \mathcal{B}_t$. Если это имеет место, то $p = r^t$ — равновесный вектор цен модели. Если это не так, то выбираем произвольное $z_{s_\circ j_\circ}(r^t) < 0$ и переходим к следующему шагу с $q^{t+1} = q^t$ и $\mathcal{B}_{t+1} = \mathcal{B}_t \setminus \{(s_\circ, j_\circ)\}$.

(ii) $q^t \neq r^t$. В этом случае рассматриваем изменяющуюся точку $q(\varepsilon) = q^t + \varepsilon(r^t - q^t)$ и определяем максимальное $\varepsilon = \varepsilon^*$ при $q(\varepsilon) \in \Xi(\mathcal{B}_t)$ и $\varepsilon \leqslant 1$.

Условие $q(\varepsilon) \in \Xi(\mathcal{B}_t)$ приводит (в соответствии с описанием множества $\Xi(\mathcal{B}_t)$) к условию $q(\varepsilon) > 0$ и системе неравенств (см. (24)–(25))

$$\frac{c_j^i}{q_j(\varepsilon)} \geqslant \frac{c_h^i}{q_h(\varepsilon)} \text{ при } (i,j) \in \mathcal{B}_t,\ h \in J,\ i \in I, \tag{31}$$

$$\frac{c_j^k}{q_j(\varepsilon)} \leqslant \frac{c_h^k}{q_h(\varepsilon)} \text{ при } (k,j) \in \mathcal{B}_t,\ h \in J,\ k \in K. \tag{32}$$

Ниже будет показано, что максимальное $\varepsilon = \varepsilon^*$ всегда существует.

Если оказалось, что $\varepsilon^* = 1$, то переходим к следующему шагу с $q^{t+1} = r^t$ и $\mathcal{B}_{t+1} = \mathcal{B}_t$. При этом уже будем иметь случай (i).

Если $\varepsilon^* < 1$, то выбор $\varepsilon > \varepsilon^*$ лимитируется каким-то из неравенств (31), (32). Если таким лимитирующим неравенством оказалось, например, неравенство из (31), соответствующее паре $(i_\circ, h_\circ) \notin \mathcal{B}_t$, то для следующего шага берём $\mathcal{B}_{t+1} = \mathcal{B}_t \cup \{(i_\circ, h_\circ)\}$. Аналогично, если лимитирующим оказалось неравенство (32), соответствующее паре $(k_\circ, h_\circ) \notin \mathcal{B}_t$, то $\mathcal{B}_{t+1} = \mathcal{B}_t \cup \{(k_\circ, h_\circ)\}$. В любом случае полагаем $q^{t+1} = q(\varepsilon^*)$ и переходим к следующему шагу.

4.2. Корректность алгоритма. Покажем, что в соответствии с приведённым описанием процедура одного шага алгоритма всегда осуществима.

4.2.1. Сначала покажем, что при любом $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ точка r, как пересечение аффинных носителей клеток $\Xi(\mathcal{B})$ и $\Omega(\mathcal{B})$, определяется однозначно. Аффинный носитель $L(\mathcal{B})$ клетки $\Xi(\mathcal{B})$ задаётся уравнением (1) и системой линейных уравнений

$$\frac{p_j^s}{c_j^s} = \frac{p_h^s}{c_h^s} \quad \text{при } (s,j),\ (s,h) \in \mathcal{B}. \tag{33}$$

Для задания аффинного носителя $M(\mathcal{B})$ клетки $\Omega(\mathcal{B})$, как отмечалось ранее, следует рассмотреть условия баланса груза (21) на каждой компоненте связности возникающего графа $\Gamma(\mathcal{B})$. Применительно к рассматриваемому случаю задачи с фиксированными бюджетами имеем

$$\sum_{i \in I_\nu} \lambda_i = \sum_{k \in K_\nu} \lambda_k + \sum_{j \in J_\nu} p_j, \quad \nu = 1, \ldots, \tau. \tag{34}$$

Здесь $I_\nu \subset I$, $J_\nu \subset J$, $K_\nu \subset K$ — множества, задающие множество вершин ν-й компоненты связности графа. Таким образом, для отыскания точки r нужно рассмотреть совместно системы уравнений (33) и (34). Ввиду того, что $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, граф $\Gamma(\mathcal{B})$ не содержит циклов. Поэтому система (33) совместна и задаёт пропорции между неизвестными p_j, $j \in J_\nu$. Это означает, что неизвестные p_j на ν-й компоненте связности определяются однозначно с точностью до множителя: $p_j = t_\nu g_j$, где g_j — некоторые положительные числа, задающие требуемые пропорции. Множители t_ν однозначно определяются из соответствующих уравнений системы (34) после подстановки в них указанного представления для p_j.

Таким образом, система (33)–(34) всегда имеет единственное решение и точка r определяется однозначно.

4.2.2. Теперь покажем, что при условиях $q(\varepsilon) \in \Xi(\mathcal{B}_t)$ и $\varepsilon \leqslant 1$ максимальное $\varepsilon = \varepsilon^*$ всегда существует. Этот факт требует доказательства, так как не все клетки $\Xi(\mathcal{B}_t)$ являются замкнутыми множествами ввиду присутствующего в описании этих множеств условия $q > 0$. Нужно показать, что это условие не может оказаться лимитирующим при увеличении ε. Покажем это.

Так как $q^t \in \Xi(\mathcal{B}_t)$, то $q^t > 0$. Если и $r^t > 0$, то для $q(\varepsilon) = q^t + \varepsilon(r^t - q^t)$ при всех $t \in [0, 1]$ будет выполняться неравенство $q(\varepsilon) > 0$.

Пусть $r^t \leqslant 0$ и для некоторого $\hat{\varepsilon} \in (0, 1]$ выполняется: $q(\varepsilon) \in \Xi(\mathcal{B}_t)$ при $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon})$ и среди $q_j(\hat{\varepsilon})$ есть нули. Для таких j имеем

$$\frac{c_j^s}{q_j(\varepsilon)} \overset{(\varepsilon \to \hat{\varepsilon} - 0)}{\longrightarrow} +\infty \text{ при любом } s \in I \cup K.$$

Это означает, что $(k, j) \notin \mathcal{B}_t$ при любых $k \in K$. В то же время среди таких j найдется $j_\circ$ такое, что хотя бы одна пара $(i, j_\circ)$, $i \in I$, попадает в $\mathcal{B}_t$, например, пара, отвечающая максимальному среди соответствующих $c_j^i / q_j(\varepsilon)$, когда ε достаточно близко к $\hat{\varepsilon}$. Пусть $\nu_\circ$ — номер компоненты связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_t)$, в которой находится соответствующая такой паре дуга. Имеем $K_{\nu_\circ} = \varnothing$ и $I_{\nu_\circ} \neq \varnothing$. Кроме того, $r_j^t \leqslant 0$ при любом $j \in J_{\nu_\circ}$. Но из (34) следует, что $\sum\limits_{i \in I_{\nu_\circ}} \lambda_i = \sum\limits_{j \in J_{\nu_\circ}} r_j^t$, левая часть этого равенства положительна, а правая неположительна.

Полученное противоречие показывает, что условие $q > 0$ не может быть лимитирующим при увеличении ε. Поэтому максимальное $\varepsilon = \varepsilon^*$ существует.

4.2.3. Для завершения обоснования корректности алгоритма следует убедиться в том, что $\mathcal{B}_{t+1} \in \mathfrak{B}$. Для этого следует отметить, что при добавлении новой пары $(i_\circ, h_\circ)$ или $(k_\circ, h_\circ)$ в множество $\mathcal{B}_t$ в графе $\Gamma(\mathcal{B}_t)$ не появляется цикл, так как в каждой компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_t)$ между величинами $q_j(\varepsilon)$ взаимные пропорции не меняются и поэтому добавляемая дуга соединяет две различные компоненты связности. Следовательно, компоненты связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_{t+1})$, как и компоненты графа $\Gamma(\mathcal{B}_t)$, являются деревьями. Как отмечалось в § 2, это означает, что $\mathcal{B}_{t+1}$ является подмножеством некоторого базисного множества задачи (12)–(16).

Условия двойственной допустимости множества $\mathcal{B}_{t+1}$, эквивалентные условиям предпочтительности связей $(s, j) \in \mathcal{B}_{t+1}$, очевидным образом выполняются благодаря правилу выбора добавляемой пары $(i_\circ, h_\circ)$ или $(k_\circ, h_\circ)$.

Наконец, при исключении пары $(s_\circ, j_\circ)$ из множества $\mathcal{B}_t$ в случае (i) не может нарушиться условие s-накрываемости (20), так как для $z_{sj} = z_{sj}(r^t)$ выполняются условия (15) и (27) и все λ_i, λ_k положительны. Это означает, что среди $z_{s_\circ j}(r^t)$ также должны быть положительные величины; им соответствуют пары $(s_\circ, j) \neq (s_\circ, j_\circ)$, так как $z_{s_\circ j_\circ}(r^t) < 0$. Ясно, что такие $(s_\circ, j)$ принадлежат множеству $\mathcal{B}_t \subset \mathcal{B}_{t+1}$.

Таким образом, всегда $\mathcal{B}_{t+1} \in \mathfrak{B}$. Корректность алгоритма полностью обоснована.

4.3. Начало процесса. В качестве стартовой точки q° можно взять произвольную точку из σ°. Соответствующее множество $\mathcal{B}_\circ$ такое, что $q^\circ \in \Xi(\mathcal{B}_\circ)$, формируем из таких пар (i, j) и (k, j), что

$$\max_{h\in J} \frac{c_h^i}{q_h^0} = \frac{c_j^i}{q_j^0} \text{ при } i \in I \text{ и } \min_{h\in J} \frac{c_h^k}{q_h^0} = \frac{c_j^k}{q_j^0} \text{ при } k \in K.$$

При этом следует обеспечить отсутствие циклов в соответствующем графе $\Gamma(\mathcal{B}_\circ)$. Этого можно достичь, при необходимости незначительно варьируя выбранную точку q° таким образом, чтобы при каждом $s \in S$ в множество $\mathcal{B}_\circ$ попадала лишь одна пара (s, j) (т. е. приведённые выше max и min достигались лишь для одного h при каждом $i \in I$ и каждом $k \in K$ соответственно). Ясно, что в таком случае $\mathcal{B}_\circ \in \mathfrak{B}$.

§ 5. Конечность процесса

Целью проводимых ниже рассмотрений является доказательство следующего утверждения.

Теорема 6. *При выполнении условия двойственной невырожденности процесс субоптимизации позволяет получить вектор равновесных цен модели с фиксированными бюджетами за конечное число шагов.*

Доказательство. Так как в случае $q^t = r^t$ значение $\psi(q^t)$ однозначно определяется множеством $\mathcal{B}_t$, то в дальнейшем такое $\mathcal{B}_t$ не может повториться, если значение функции ψ убывает в текущей точке q^τ. Будет показано, что если $q^{t+1} \neq q^t$, то $\psi(q^{t+1}) < \psi(q^t)$. После этого для завершения доказательства нужно только показать, что процесс не может «забуксовать» на какой-то одной точке, т. е. не может оказаться, что $q^t = q^\tau$ при любом $t \geqslant \tau$.

Более подробно. Пусть на очередном шаге процесса имеем $q^t \neq r^t$. В соответствии с описанием алгоритма должен последовать сдвиг из q^t в направлении точки r^t по отрезку $[q^t, r^t]$ в пределах клетки $\Xi(\mathcal{B}_t)$.

Лемма 1. *Если* $h = r^t - q^t \neq 0$, *то*

$$\frac{\partial\psi}{\psi h}(q^t) < 0. \tag{35}$$

Доказательство. Так как $\psi(q) = -f^*(\ln q)$, то следует более подробно рассмотреть функцию $f^*(\ln q)$. Функция f^* — вогнутая, собственная и замкнутая. Для таких функций имеет место неравенство Фенхеля ([2], с. 121), которое в данном случае имеет вид

$$f(p) + f^*(\ln q) \leqslant (p, \ln q) \text{ при } p, q \in R^n_{++}. \tag{36}$$

Известно также, что это неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $\ln q \in \partial f(p)$, что эквивалентно $p \in \partial f^*(\ln q)$. Нас интересуют точки $q \in \Xi(\mathcal{B}_t)$. Как отмечалось ранее, для таких q имеем $\ln q \in \partial f(p)$ при $p \in \Omega^\circ(\mathcal{B}_t)$. Это следует из (30). Таким образом

$$f^*(\ln q) = (p, \ln q) - f(p), \text{ при } p \in \Omega^\circ(\mathcal{B}_t), q \in \Xi(\mathcal{B}_t). \tag{37}$$

Введём функции $\psi_p(q) = f(p) - (p, \ln q)$. Из изложенного следует, что на клетке $\Xi(\mathcal{B}_t)$ функция $\psi(q)$ совпадает с функциями $\psi_p(q)$ при $p \in \Omega^\circ(\mathcal{B}_t)$. В свою очередь, от $\psi_p(q)$ можно перейти к функциям

$$\bar\psi_p(q) = \psi_p(q) + \ln \sum_{j=1}^n q_j,$$

которые на σ° совпадают с $\psi_p(q)$, так как $\sum\limits_{j=1}^n q_j{=}1$. Но для $p \in \Omega^\circ(\mathcal{B}_t) \subset \Omega$ выполняется условие (1), т. е. $(p, e) = 1$. Следовательно, функции $\bar\psi_p(q)$ являются положительно однородными функциями нулевой степени: при любом $t > 0$ справедливо равенство $\bar\psi_p(tq) = \bar\psi_p(q)$. Действительно,

$$\begin{aligned}\bar\psi_p(tq) &= f(p) - (p, \ln(tq)) + \ln \sum_{j=1}^n (tq_j) \\ &= f(p) - (p, \ln q) - (p, e)\ln t + \ln t + \ln \sum_{j=1}^n q_j = \bar\psi_p(q).\end{aligned}$$

Поэтому вместо функции $\psi(q)$ на $\Xi(\mathcal{B}_t)$ можно рассматривать функции $\bar\psi_p(q)$ на R^n_{++}. Таким образом, для производной функции $\psi(q)$ в точке q^t по направлению h, не выводящему из аффинного носителя клетки $\Xi(\mathcal{B}_t)$, имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial h}(q^t) = \Big(\nabla\bar\psi_p(q^t), h\Big), \quad p \in \Omega^\circ(\mathcal{B}_t), \tag{38}$$

где $h = r^t - q^t$ и r^t — однозначно определяемая точка пересечения аффинных носителей клеток $\Omega(\mathcal{B}_t)$ и $\Xi(\mathcal{B}_t)$. Легко видеть, что

$$\nabla\bar{\psi}_p(q^t) = \begin{pmatrix} \dfrac{-p_1}{q_1^t} \\ \vdots \\ \dfrac{-p_n}{q_n^t} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} q_j^t} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-p_1}{q_1^t} \\ \vdots \\ \dfrac{-p_n}{q_n^t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

так как $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j^t = 1$ для $q^t \in \Xi(\mathcal{B}) \subset \sigma^\circ$. Далее имеем

$$\left(\nabla\bar{\psi}(q^t), h\right) = \left(\nabla\bar{\psi}_p(q^t), r^t - q^t\right) = \left(\nabla\bar{\psi}_p(q^t), r^t\right) - \left(\nabla\bar{\psi}_p(q^t), q^t\right).$$

Но $\left(\nabla\bar{\psi}_p(q^t), q^t\right) = -\sum\limits_{j=1}^{n} p_j + \sum\limits_{j=1}^{n} q_j^t = -1+1 = 0$, поскольку $p \in \Omega^\circ(\mathcal{B}_t) \subset \Omega$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1$ при $p \in \Omega$. Поэтому

$$\left(\nabla\bar{\psi}_p(q^t), h\right) = \left(\nabla\bar{\psi}_p(q^t), r^t\right) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{r_j^t}{q_j^t} + \sum_{j=1}^{n} r_j^t = -\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{r_j^t}{q_j^t} + 1,$$

так как $\sum\limits_{j=1}^{n} r_j^t = 1$. Теперь в силу (38) доказательство неравенства (35) сводится к доказательству того, что

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{r_j^t}{q_j^t} > 1 \text{ при } p \in \Omega^\circ(\mathcal{B}_t). \tag{39}$$

Пусть граф $\Gamma(\mathcal{B}_t)$ состоит из τ компонент связности и ν-й компоненте связности соответствует множество $J_\nu \subset J$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{r_j^t}{q_j^t} = \sum_{\nu=1}^{\tau} \sum_{j \in J_\nu} p_j \frac{r_j^t}{q_j^t}. \tag{40}$$

Для величин q_j^t, $j \in J_\nu$, должны соблюдаться пропорции, задаваемые системой равенств $\dfrac{q_j}{c_j^s} = \dfrac{q_l}{c_l^s}$, $\quad (s,j),(s,l) \in \mathcal{B}_t$. Пусть положительные величины g_j, $j \in J_\nu$, задают эти пропорции, т. е.

$$q_j^t = t_\nu^q g_j, \quad j \in J_\nu, \tag{41}$$

где t^q_ν — некоторый положительный множитель. Можно предполагать, что $\sum\limits_{j\in J_\nu} g_j = 1$ при любом $\nu = 1, \ldots \tau$. Для величин r^t_j, $j \in J_\nu$, пропорции будут теми же самыми, так как точки r^t и q^t принадлежат аффинному носителю клетки $\Xi(\mathcal{B}_t)$:

$$r^t_j = t^r_\nu g_j, \quad j \in J_\nu. \tag{42}$$

В общем случае вектор r^t, в отличие от q^t, не обязательно является строго положительным. Это верно и для величин t^r_ν. Они определяются из условия принадлежности точки r^t аффинному носителю клетки $\Omega(\mathcal{B}_t)$, т. е. получаются из условий баланса на компонентах связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_t)$:

$$\sum_{i\in I_\nu} \lambda_i = \sum_{j\in J_\nu} r^t_j + \sum_{k\in K_\nu} \lambda_k, \tag{43}$$

где $I_\nu \subset I$ и $K_\nu \subset K$ — множества, соответствующие ν-й компоненте связности. Имеем

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{r^t_j}{q^t_j} = \sum_{\nu=1}^{\tau} \frac{t^r_\nu}{t^q_\nu} \sum_{j\in J_\nu} p_j. \tag{44}$$

Так как $p \in \Omega^\circ(\mathcal{B}_t)$, то для p_j также должны выполняться условия баланса, аналогичные условиям для компонент r^t_j:

$$\sum_{i\in I_\nu} \lambda_i = \sum_{j\in J_\nu} p_j + \sum_{k\in K_\nu} \lambda_k.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j\in J_\nu} p_j = \sum_{i\in I_\nu} \lambda_i - \sum_{k\in K_\nu} \lambda_k = \sum_{j\in J_\nu} r^t_j = t^r_\nu \sum_{j\in J_\nu} g_j = t^r_\nu.$$

В результате из (44) получаем

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{r^t_j}{q^t_j} = \sum_{\nu=1}^{\tau} \frac{(t^r_\nu)^2}{t^q_\nu} \tag{45}$$

и требуемое неравенство (39), которое эквивалентно неравенству (35), приобретает вид

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} \frac{(t^r_\nu)^2}{t^q_\nu} > 1. \tag{46}$$

Относительно величин t_ν^q из (41) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} q_j^t = \sum_{\nu=1}^{\tau} t_\nu^q \sum_{j\in J_\nu} g_j = \sum_{\nu=1}^{\tau} t_\nu^q.$$

Так как $q^t \in \sigma^\circ$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j^t = 1$. Следовательно, $\sum\limits_{\nu=1}^{\tau} t_\nu^q = 1$. Аналогично, из (42) и $\sum\limits_{j=1}^{n} r_j^t = 1$ следует, что $\sum\limits_{\nu=1}^{\tau} t_\nu^r = 1$.

Как отмечалось выше, в силу неравенства $q^t > 0$ имеем $t_\nu^q > 0$ при любом $\nu = 1, \dots, \tau$, а среди величин t_ν^r могут быть и отрицательные.

Для доказательства (46) докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *При фиксированных* $\beta_\nu > 0$, $\nu = 1, \dots, \tau$, *таких, что* $\sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \beta_\nu = 1$, *минимальное значение функции* $\gamma(\alpha) = \sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \dfrac{\alpha_\nu^2}{\beta_\nu}$ *при условии*

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} \alpha_\nu = 1 \tag{47}$$

равно 1 и достигается при $\hat{\alpha}_\nu = \beta_\nu$.

Доказательство. Введём λ — множитель Лагранжа для условия (47). Тогда для оптимальных значений $\hat{\alpha}_\nu$ имеем

$$\begin{cases} 2\frac{\hat{\alpha}_\nu}{\beta_\nu} = \lambda, \quad \nu = 1, \dots, \tau, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \hat{\alpha}_\nu = 1. \end{cases}$$

Решением этой системы является $\lambda = 2$ и $\hat{\alpha}_\nu = \beta_\nu$, $\nu = 1, \dots, \tau$. Для минимального значения $\gamma(\hat{\alpha})$ имеем $\gamma(\hat{\alpha}) = \sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \dfrac{\beta_\nu^2}{\beta_\nu} = \sum\limits_{\nu=1}^{\tau} \beta_\nu = 1$. Лемма 2 доказана.

Таким образом, в условиях леммы 2 из условия $\alpha \neq \beta$ следует, что $\gamma(\alpha) > 1$.

Продолжим доказательство леммы 1. Применяя лемму 2 для $\alpha_\nu = t_\nu^r$ и $\beta_\nu = t_\nu^q$, можем утверждать, что если $t^r \neq t^q$, т. е. $r^t \neq q^t$, то неравенство (46) имеет место, а вместе с ним верно неравенство (35). Лемма 1 доказана.

Теперь покажем, что при выполнении условия двойственной невырожденности задачи (12)–(16) процесс не может "забуксовать т. е. через конечное число шагов обязательно реализуется ненулевой сдвиг из текущей точки q^t. Иными словами, будем иметь $\varepsilon^* > 0$ и $q^{t+1} \neq q^t$, а значит, $\psi(q^{t+1}) < \psi(q^t)$.

Причиной нулевого сдвига является наличие пары $(s,h) \notin \mathcal{B}_t$ такой, что

$$\frac{c_j^s}{q_j^t} = \frac{c_h^s}{q_h^t}, \quad (s,j) \in \mathcal{B}_t, \tag{48}$$

и в то же время соответствующее неравенство системы (31)–(32) оказывается лимитирующим при определении ε^*. В результате имеем $\varepsilon^* = 0$.

Пара $(s,h) \notin \mathcal{B}_t$, для которой выполняется (48), появляется при реализации на текущем шаге случая (i) и исключения из $\mathcal{B}_t$ пары $(s_\circ, j_\circ)$ такой, что $z_{s_\circ j_\circ}(r^t) < 0$. В этом случае $\mathcal{B}_{t+1} = \mathcal{B}_t \setminus \{(s_\circ, j_\circ)\}$ и $q^{t+1} = q^t$. Поэтому

$$\frac{c_j^{s_\circ}}{q_j^{t+1}} = \frac{c_{j_\circ}^{s_\circ}}{q_{j_\circ}^{t+1}}, \quad (s,j) \in \mathcal{B}_{t+1}, \tag{49}$$

хотя $(s_\circ, j_\circ) \notin \mathcal{B}_{t+1}$. Ниже будет показано, что на $(t+1)$-м шаге алгоритма будет выполняться неравенство $r^{t+1} \neq q^{t+1}$, т. е. реализуется случай (ii). Если бы в этом случае на $(t+1)$-м шаге алгоритма соответствующее неравенство в системе (31)–(32), порождаемой множеством $\mathcal{B}_{t+1}$, оказалось лимитирующим при определении величины ε^*, то это привело бы к возврату к прежнему множеству $\mathcal{B}_t$: $\mathcal{B}_{t+2} = \mathcal{B}_{t+1} \cup \{(s_\circ, j_\circ)\} = \mathcal{B}_t$. Покажем, что это невозможно.

Лемма 3. *При выполнении алгоритма за случаем* (i) *всегда следует случай* (ii). *Если при реализации случая* (i) *на шаге t из $\mathcal{B}_t$ исключается пара $(s_\circ, j_\circ)$, то соответствующее ей неравенство в системе* (31)–(32), *порождаемой множеством $\mathcal{B}_{t+1}$, не препятствует увеличению величины ε на шаге $(t+1)$.*

Доказательство. Рассмотрим граф $\Gamma(\mathcal{B}_t)$. Пусть для определенности пара $(s_\circ, j_\circ)$ соответствует дуге, принадлежащей компоненте связности с номером $\nu = 1$. Пусть множество вершин этой компоненты состоит из вершин $j \in J_1 \subset J$ и вершин вида $n+s$ при $s \in S_1 \subset S$. После удаления дуги, соответствующей паре $(s_\circ, j_\circ)$, компонента связности распадется на две компоненты. Соответственно распадутся множества J_1 и S_1: $J_1 = J_1' \cup J_1''$, $S_1 = S_1' \cup S_1''$, множества J_1', S_1' соответствуют одной части компоненты, а J_1'', S_1'' — другой. Пусть $s_\circ \in S_1'$, тогда $j_\circ \in J_1''$. Выпишем уравнения системы (13)–(15) при $p = r^t$, соответствующие вершинам той части компоненты, которой отвечают множества J_1', S_1'. Пусть

$S_1' = I_1' \cup K_1'$.

$$\begin{aligned} -\sum_{j\in J} z_{ij} &= -\lambda_i, && i \in I_1' \\ \sum_{i\in I} z_{ij} - \sum_{k\in K} z_{kj} &= q_j^t, && j \in J_1', \\ \sum_{j\in J} z_{kj} &= \lambda_k, && k \in K_1'. \end{aligned}$$

В приведённых суммах следует исключить переменные z_{sj} при $(s,j) \notin \mathcal{B}_t$, так как $z_{sj}(r^t) = 0$, $(s,j) \notin \mathcal{B}_t$. Если просуммировать эти уравнения, то все переменные, кроме $z_{s_\circ j_\circ}$, сократятся, что и даст явную формулу для $z_{s_\circ j_\circ}(r^t)$. Пусть $s_\circ \in I_1'$, т. е. $s_\circ = i_\circ$. При суммировании получаем

$$-z_{i_\circ j_\circ} = -\sum_{i\in I_1'} \lambda_i + \sum_{k\in K_1'} \lambda_k + \sum_{j\in J_1'} q_j^t$$

или

$$z_{i_\circ j_\circ} = \sum_{i\in I_1'} \lambda_i - \sum_{k\in K_1'} \lambda_k - \sum_{j\in J_1'} q_j^t. \tag{50}$$

Напомним, что $q^t = r^t$ и $z_{i_\circ j_\circ} = z_{i_\circ j_\circ}(r^t) < 0$. Вместе с тем должно быть $z_{i_\circ j_\circ}(r^{t+1}) = 0$, так как после указанного выше распадения компоненты связности на две части в системе (34), описывающей аффинное многообразие $M(\mathcal{B}_{t+1})$, будет присутствовать уравнение $\sum\limits_{i\in I_1'} \lambda_i = \sum\limits_{k\in K_1'} \lambda_k + \sum\limits_{j\in J_1'} p_j^t$. Отсюда следует, что $r^{t+1} \neq r^t (= q^{t+1})$. Поэтому на шаге $(t+1)$ реализуется уже случай (ii). Ясно, что при этом $J_1' \neq \varnothing$, ибо при $J_1' = \varnothing$ имели бы $K_1' = \varnothing$, $I_1' = \{i_\circ\}$ и $z_{i_\circ j_\circ} = \lambda_{i_\circ} > 0$. Кроме того, $J_1'' \neq \varnothing$, так как $j_\circ \in J_1''$. Из (50) легко видеть, каким образом следует изменять величины q_j, отклоняя их от q_j^t, чтобы величина $z_{i_\circ j_\circ}$ возрастала и в конце концов обратилась бы в нуль, что означало бы попадание точки q в $L(\mathcal{B}_{t+1})$: величины q_j при $j \in J_1'$ следует уменьшать, а для сохранения равенства $\sum\limits_{j\in J} q_j = 1$ следует одновременно увеличивать величины q_j при $j \in J_1''$. Если при этом сохранять взаимные пропорции между q_j на каждой из частей компоненты связности (т. е. как между q_j, $j \in J_1'$, так и между q_j, $j \in J_1''$), то $q \in M(\mathcal{B}_{t+1})$. Тогда при попадании в $L(\mathcal{B}_{t+1})$ точка q совпадёт с r^{t+1}.

Таким образом, описанные изменения текущей точки q в точности соответствуют движению из $q^{t+1} = r^t$ в r^{t+1}, выполняемому алгоритмом на $(t+1)$-м шаге. Если $j_1 \in J_1'$, то q_{j_1} будет уменьшаться, а $q_{j_\circ}$ — увеличиваться. Из (49) следует, что $\dfrac{c_{j_1}^{i_\circ}}{q_{j_1}^{t+1}} = \dfrac{c_{j_\circ}^{i_\circ}}{q_{j_\circ}^{t+1}}$. Следовательно, при указанных изменениях q (с сохранением $q_{j_1} > 0$) выполняется неравенство

$$\frac{c_{j_1}^{i_\circ}}{q_{j_1}} > \frac{c_{j_\circ}^{i_\circ}}{q_{j_\circ}}. \tag{51}$$

Это означает, что условие из системы (31), соответствующее паре $(s,h) = (i_\circ, j_\circ)$, не будет лимитирующим при определении величины ε^*.

Рассмотрение случая $s_\circ = k_\circ \in K_1$ аналогично и отличаетсся лишь тем, что изменение q сопровождается увеличением q_j при $j \in J_1'$ и уменьшением q_j при $j \in J_1''$. Таким образом, q_{j_1} будет увеличиваться, $q_{j_\circ}$ — уменьшаться, и неравенство, аналогичное неравенству (51), поменяет знак. Значит, условие системы (32), соответствующее паре $(s,h) = (k_\circ, j_\circ)$, выполняется при любых сдвигах из точки q^{t+1} в направлении точки r^{t+1}, а значит, не может быть лимитирующим при определении величины ε^*. Лемма 3 доказана.

Замечание. Следует отметить, что именно в доказанном факте проявляется упомянутое во введении свойство монотонности, характеризующее соответствующую рассматриваемому классу моделей задачу полиэдральной комплементарности и связывающее её с задачей линейной комплементарности из класса P.

Перейдём к заключительной части доказательства теоремы 6. Прежде всего отметим, что при реализации случая (ii) алгоритма, т. е. когда $q^t \neq r^t$, происходит расширение текущего множества $\mathcal{B}_t$. Следовательно, такой случай подряд может повториться лишь конечное число раз, после чего реализуется случай (i): $q^t = r^t$. Покажем, что между двумя последовательными реализациями случая (i) происходит строгое убывание текущего значения $\psi(q^t)$.

Пусть для множества $\mathcal{B}_t$ и $q^t \in \Xi(\mathcal{B}_t)$ реализовался случай (i), т. е. $r^t = q^t$, и для полученных по $p = r^t$ значений $z_{sj}(r^t)$ имеем $z_{s_\circ j_\circ}(r^t) < 0$.

Пусть $\mathcal{B}_{t+1} = \mathcal{B}_t \backslash \{(s_\circ, j_\circ)\}$, $q^{t+1} = q^t$. Согласно лемме 3 при отыскании величины ε^* на $(t+1)$-м шаге неравенства в системе (31)–(32), соответствующие $(s,h) = (s_\circ, j_\circ)$, не будут лимитировать увеличение ε. Пусть лимитирующим оказалось неравенство, соответствующее $(s,h) = (s_1, j_1)$, и мы переходим к следующему шагу, полагая $\mathcal{B}_{t+2} = \mathcal{B}_{t+1} \cup \{(s_1, j_1)\}$. Если при этом оказалось $\varepsilon^* = 0$, т. е. $q^{t+2} = q^{t+1}$, то

$$\frac{c_{j_1}^{s_1}}{q_{j_1}^{t+1}} = \frac{c_j^{s_1}}{q_j^{t+1}} \quad (s_1, j) \in \mathcal{B}_{t+1}. \tag{52}$$

Имеем $\mathcal{B}_{t+2} = \big(\mathcal{B}_t \cup \{(s_1, j_1)\}\big) \setminus \{(s_\circ, j_\circ)\}$. Введём множество $\mathcal{B}_{t+1}' = \mathcal{B}_t \cup \{(s_1, j_1)\}$. Из условия двойственной невырожденности следует, что множество $\mathcal{B}_t$ не может быть базисным множеством задачи (12)–(16). Кроме того, дуга, соответствующая паре (s_1, j_1), не может замыкать цикл в графе $\Gamma(\mathcal{B}_t)$, иначе соотствующее ей неравенство в системе (31)–(32) не могло бы быть лимитирующим. Таким образом, $\mathcal{B}'_{t+1} \in \mathfrak{B}$, и равенство (52) означает, что $q^{t+1} \in \Xi(\mathcal{B}'_{t+1})$. В то же время $M(\mathcal{B}'_{t+1}) \supset M(\mathcal{B}_t)$ и, стало быть, $q^{t+1} = r^t \in M(\mathcal{B}'_{t+1})$, так как $r^t \in M(\mathcal{B}_t)$. Таким образом, точка $\hat{r}^{t+1}$, являющаяся точкой пересечения $L(\mathcal{B}'_{t+1}) \cap M(\mathcal{B}'_{t+1})$, совпадает с точкой q^{t+1}. Иными словами, если на $(t+1)$-м шаге отправляться от множества $\mathcal{B}'_{t+1}$ и точки q^{t+1}, то возникает случай (i). При этом, определяя величины $z_{sj}^{\mathcal{B}'_{t+1}}(\hat{r}^{t+1})$ путем решения системы (13)–(15) при дополнительном условии $z_{sj} = 0$, $(s, j) \notin \mathcal{B}'_{t+1}$, мы получим прежние значения $z_{sj}^{\mathcal{B}_t}(r^t)$. В результате в соответствии с описанием алгоритма получим $\mathcal{B}'_{t+2} = \mathcal{B}'_{t+1} \setminus \{(s_\circ, j_\circ)\} = \mathcal{B}_{t+2}$, $q^{t+2} = q^{t+1}$.

Из приведённых выше рассуждений следует, что ситуация на $(t+2)$-м шаге качественно такая же, что и на $(t+1)$-м шаге, и отличается лишь тем, что множество $\mathcal{B}_t$ заменилось на $\mathcal{B}'_{t+1} = \mathcal{B}_t \cup \{(s_1, j_1)\}$. Поэтому неравенство в системе (31)–(32), соответствующее исключаемой паре $(s_\circ, j_\circ)$, снова не может быть лимитирующим.

Ясно, что описанные последовательные реализации случая (ii) с нулевой величиной сдвига могут повторяться лишь конечное число раз, так как текущее множество $\mathcal{B}_t$ при этом лишь расширяется, а ввиду предположения двойственной невырожденности, когда $\mathcal{B}_t$ станет базисным множеством, для $\mathcal{B}_{t+1} \setminus \{(s_\circ, j_\circ)\}$ уже не найдется пары (s_1, j_1), для которой бы выполнялось равенство (52), и величина сдвига будет отличной от нуля. В силу леммы 1 при ненулевой величине сдвига произойдёт убывание значения функции ψ: $\psi(q^{t+1}) < \psi(q^t)$.

Таким образом, множества $\mathcal{B}_t$, возникающие при реализации случая (i), не повторяются. Процесс конечен. Теорема 6 доказана.

§ 6. Возможные обобщения

Изложение алгоритма для случая фиксированных бюджетов приведено в предположении $c^i > 0$ при всех $i \in I$. Это условие можно ослабить, заменив его традиционным условием $\max\limits_{i \in I} c^i_j > 0$ при $j \in J$. Появление нулевых c^i_j приводит к тому, что в транспортной задаче (12)–(16) соответствующие z_{ij} исключаются из рассмотрения. Это повлияет на эффективную область $\mathrm{dom} f = \Omega$. Однако можно показать, что при этом $\Omega \cap \sigma^\circ \neq \varnothing$. Все утверждения и описание алгоритма остаются справедливыми. Необходимые коррективы изложения легко провести по аналогии с [14], где это проделано для обычной линейной модели обмена.

Рассмотренный алгоритм существенно использует факт определенной потенциальности возникающего отображения F: клетки

$$F(p) = \Xi(\mathcal{B}) \in \xi,$$

соответствующие точкам p из относительной внутренности клеток $\Omega(\mathcal{B}) \in \omega$, получаются по субдифференциальному отображению $\partial f \colon p \to \partial f(p)$, порождаемому функцией f, задающей оптимальное значение критерия в транспортной задаче (12)–(16) при данном векторе цен $p \in \Omega$. Этот факт не имеет места при отказе от фиксированных бюджетов и переходе к общему случаю модели, изложенному в § 1. Однако построения из § 2, касающиеся порождаемых моделью полиэдральных комплексов ω и ξ, остаются в силе. Для получения алгоритма в этом случае можно воспользоваться более общей схемой полиэдральной комплементарности, которая для классической модели обмена была рассмотрена в [6].

Возможно также в этом случае применение итеративной процедуры, в которой на каждом шаге процесса модель с фиксированными бюджетами используется в качестве аппроксимативной для исходной модели: по имеющемуся на k-м шаге процесса вектору цен p^k вычисляются бюджеты потребителей и находится равновесный вектор цен $\hat{p}^k$ в полученной модели с фиксированными бюджетами, который и принимается в качестве p^{k+1}. Такая процедура для классической модели обмена исследовалась в [14].

В заключение автор выражает искреннюю признательность анонимному рецензенту за внимательное прочтение рукописи статьи и содержательные замечания, способствовавшие улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гейл Д.** Теория линейных экономических моделей. М.: ИЛ, 1963.

2. **Рокафеллар Дж.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

3. **Рубинштейн Г. Ш., Шмырев В. И.** Методы минимизации квазивыпуклых функций на выпуклом многограннике // Оптимизация. Сб. науч. тр. Вып. 1. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1971. С. 82–117.

4. **Шмырев В. И.** Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 5. С. 1062–1066.

5. **Шмырев В. И.** Алгоритмы отыскания равновесия в моделях обмена с фиксированными бюджетами // Оптимизация. Сб. науч. тр. Вып. 31(48). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. С. 137–155.

6. **Шмырев В. И.** Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сибирский матем. журнал. 1985. Т. 26, № 2. С. 163–175.

7. **Шмырев В. И.** Введение в математическое программирование. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
8. **Шмырев В. И.** Нахождение равновесия в одном классе моделей производства–обмена // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2003. Т. 10, № 1. С. 65–91.
9. **Eaves B. C.** A finite algorithm for the linear exchange model // J. Math. Econom. 1976. V. 3, N 2. P. 197–204.
10. **Gale D.** The linear exchange model // J. Math. Econom. 1976. V. 3, N 2. P. 205–209.
11. **Lemke C. E.** A survey of complementarity theory// Variational inequalities and complementarity problems. New York: John Wiley and Sons Ltd, 1980. P. 213–239.
12. **Murty K. G.** Linear complementarity, linear and nonlinear programming. Berlin: Hedermann, 1988.
13. **Shmyrev V. I.** An algorithmic approach for searching an equilibrium in fixed budget exchange models// Russian contributions to game theory and eqilibrium theory. Edited by Theo S. H. Driessen, Gerard van der Laan, Valeri A. Vasil'ev and Elena B. Yanovskaya. Berlin: Springer–Verlag, 2006. P. 217–235.
14. **Shmyrev V. I., Shmyreva N. V.** An iterative algorithm for searching an equilibrium in the linear exchange model// Siberian Advances in Math. 1996. V. 6, N. 1. P. 87–104.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.

Статья поступила
30 мая 2005 г.