ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2007. Серия 1. Том 14, № 1. 110–139

УДК 519.72

# О СЛОЖНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЧАСТИЧНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ СХЕМАМИ*)

*Л. А. Шоломов*

Пара $(f, g)$ частичных булевых функций характеризуется параметром $l_{\alpha\beta}$ — числом наборов $\tilde{x}$, на которых $(f(\tilde{x}), g(\tilde{x})) = (\alpha, \beta)$, где $\alpha$ и $\beta$ принимают значения 0, 1 и неопределённое. Рассматривается последовательная реализация системы $(f, g)$, когда сначала строится схема $S_f$ для $f$, которая затем достраивается до схемы $S_{f,g}$. Показано, что если область определения $D(f)$ включает $D(g)$, то можно последовательно реализовать $f$ и $g$ так, чтобы схемы $S_f$ и $S_{f,g}$ были одновременно асимптотически минимальными (т. е. удовлетворяли асимптотически наилучшим оценкам сложности для соответствующих классов), и что эти функции, вообще говоря, нельзя последовательно реализовать в порядке $g, f$, чтобы асимптотически минимальными были $S_g$ и $S_{f,g}$. Получена достижимая нижняя оценка сложности схем $S_{f,g}$ при последовательной реализации. Существенную роль играют информационные свойства частично определённых данных, изучение которых начато в предшествующих работах автора и продолжено здесь.

## Введение

При реальном синтезе схем, реализующих системы булевых функций, часто применяются методы, когда функции системы реализуются последовательно и при реализации каждой следующей функции используются части схем, построенных для предыдущих функций (см., например, [2]).

В настоящей статье исследуется асимптотическая сложность последовательной реализации систем частичных булевых функций при растущем числе переменных. Для простоты рассматриваются системы $(f, g)$, состоящие из двух функций. Они характеризуются наборами частот, с какими система $(f, g)$ принимает всевозможные пары значений (значения могут быть булевыми и неопределённым). Выясняется, можно ли,

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Отделения информационных технологий и вычислительных систем РАН по программе фундаментальных исследований и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–00577).

реализовав первую функцию системы асимптотически наилучшим образом (т. е. с асимптотически наилучшей для соответствующего класса оценкой сложности ), затем получить асимптотически наилучшую схему для всей системы, и зависит ли сложность последовательной реализации от порядка функций в системе.

Установлено, что если области определения $D(f)$ и $D(g)$ функций $f$ и $g$ совпадают (в частности, если $f$ и $g$ полностью определены), то при их последовательной реализации можно получить асимптотически наилучшую схему для $(f, g)$. При этом порядок реализации функций асимптотически не влияет на сложность схемы. В общем случае это не так. В частности, если $D(f) \supseteq D(g)$, то при последовательной реализации в порядке $(f, g)$ достижим асимптотически наилучший результат, а реализация в порядке $(g, f)$ в общем случае приводит к повышению сложности схем.

В статье показано, что для почти всех систем $(f', g')$ с теми же параметрами, что и у $(f, g)$, доопределения, получаемые при их реализации асимптотически наилучшими схемами, имеют почти одинаковый частотный состав пар булевых значений. Он может быть найден решением некоторых уравнений. То же относится и к асимптотически наилучшим реализациям функций $f'$. Если частоты доопределений для $f'$ и $(f', g')$ «несовместны», то $f'$ и $(f', g')$ нельзя одновременно реализовать асимптотически наилучшими схемами. Эти соображения позволяют поднять нижнюю оценку сложности последовательной реализации. Получаемая в результате оценка достаточно точна (достижима). Существенную роль играют свойства нечётких и частично определённых данных, которые исследовались в [10] (см. также [11, 12]). Их изучение продолжено в настоящей статье.

Данное исследование существенно использует результаты Олега Борисовича Лупанова.

## 1. Относительная сложность

Рассматривается реализация булевых функций схемами из функциональных элементов [4] в произвольном конечном базисе $\{E_1, \ldots, E_t\}$. Элемент $E_i$, $1 \leqslant i \leqslant t$, существенно зависит от $m_i$ переменных и ему приписан *вес* $P_i > 0$. Параметр $\rho = \min\{P_i/(m_i - 1)\}$, где минимум берётся по всем элементам $E_i$ с $m_i \geqslant 2$, называется *приведённым весом* базиса. Под *сложностью* $L(S)$ *схемы* $S$ понимается сумма весов входящих в неё элементов.

Булевы функции предполагаются частичными, т. е принимающими значения 0, 1 и $*$ (неопределённое). *Доопределением* частичной функции

$f$ называется любая функция $\hat{f}$, полученная из $f$ заменой всех неопределённых значений булевыми, а доопределением системы $F = (f_1, \dots, f_k)$ частичных функций — система $\hat{F} = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_k)$, образованная доопределениями функций из $F$. Схема $S$ *реализует систему* $F$, если $S$ реализует некоторое доопределение $\hat{F}$. Под *сложностью* $L(F)$ *системы* $F$ понимается минимальная из сложностей схем, реализующих $F$.

Систему $F(\tilde{x}) = F(x_1, \dots, x_n)$ будем характеризовать набором параметров $l_{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\alpha} \in \{0, 1, *\}^k$, где $l_{\tilde{\alpha}}$ — число наборов $\tilde{x}$ таких, что $F(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}$. Положим $\mathbf{l}(F) = (l_{\tilde{\alpha}} \mid \tilde{\alpha} \in \{0, 1, *\}^k)$. Обозначим через $p_{\tilde{\alpha}}$ частоту $l_{\tilde{\alpha}} 2^{-n}$ появления набора $\tilde{\alpha}$ среди значений $F(\tilde{x})$ и введём набор частот $P(F) = (p_{\tilde{\alpha}} \mid \tilde{\alpha} \in \{0, 1, *\}^k)$. Класс всех систем $F'$ от $n$ переменных с $\mathbf{l}(F') = \mathbf{l}(F)$ будем обозначать через $\mathcal{K}_n(F)$. Для класса $\mathcal{K}_n(F)$ введём *функцию Шеннона* $L(n, F) = \max\limits_{F' \in \mathcal{K}_n(F)} L(F')$.

Пусть наряду с системой $F(\tilde{x})$ задана частичная булева функция $g(\tilde{x})$. Скажем, что схема $S$ с $n+k$ входами $x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_k$ и одним выходом *реализует* $g$ *относительно доопределения* $\hat{F}$ *системы* $F$, если при подаче на входы значений $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \hat{f}_1(\tilde{\sigma}), \dots, \hat{f}_k(\tilde{\sigma})$, где $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, на выходе реализуется некоторое доопределение для $g(\tilde{\sigma})$. Под *сложностью* $L(g|\hat{F})$ *функции* $g$ *относительно доопределения* $\hat{F}$ будем понимать минимальную из сложностей схем, реализующих $g$ относительно $\hat{F}$.

Величина $L(g|\hat{F})$ зависит от выбранного доопределения $\hat{F}$. Если для исключения этой зависимости взять в качестве $L(g|F)$ минимум $L(g|\hat{F})$ по всем доопределениям $\hat{F}$, возникнут некоторые нежелательные эффекты (например, сложность любой функции $g$ относительно нигде не определённой функции окажется равной 0). Поэтому зависимость от доопределения исключать не будем.

В начальной части статьи ограничимся случаем, когда $L(g|\hat{F})$ не зависит от доопределения $\hat{F}$ (позже вернёмся к общей постановке). Пусть $D(f) = \{\tilde{\alpha} | f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}\}$ — область определения частичной функции $f$. Скажем, что *функция* $f$ *конкретнее функции* $g$, если $D(f) \supseteq D(g)$, и *система* $F$ *конкретнее* $g$, если каждая функция этой системы конкретнее $g$. Легко видеть, что если $F$ конкретнее $g$, то схема, реализующая $g$ относительно некоторого доопределения $\hat{F}$, реализует $g$ и относительно всякого другого доопределения системы $F$. Это позволяет определить *сложность* $L(g|F)$ *функции* $g$ *относительно системы* $F$ как $L(g|\hat{F})$ при произвольном $\hat{F}$. Если $F$ конкретнее $g$, то *функцией Шеннона* $L(n, g|F)$ *для относительной сложности* назовём максимум относительных сложностей $L(g'|F')$ для $(F', g') \in \mathcal{K}_n(F, g)$. Случай, когда система $F$ конкретней $g$, будем называть *специальным*. Ниже изучается асимптотическое поведение функций Шеннона при числе переменных $n \to \infty$ и числе функций $k = \mathrm{const}$ в системе.

## 2. Энтропия нечётких последовательностей

В дальнейшем понадобятся некоторые информационные свойства частично определённых последовательностей, которые удобно изучать в терминах нечётких последовательностей. Большинство цитируемых в данном разделе результатов установлено в [9] (в несколько иных терминах), но будем ссылаться на более позднюю статью [10], где результаты представлены в форме, используемой в настоящей статье (краткое изложение результатов из [10] имеется в [11]). Дадим соответствующие определения.

Пусть $M = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ и каждому подмножеству $T \subseteq M$, $T \neq \varnothing$, поставлен в соответствие символ $a_T$. Алфавит всех символов $a_T$ обозначим через $A$, а его подалфавит $\{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$ – через $A_0$. Символы из $A$ будем называть *нечёткими*, из $A_0$ – *чёткими*. *Доопределением символа* $a_T \in A$ назовём всякий чёткий символ $a_i$, $i \in T$, а *доопределением последовательности* в алфавите $A$ – результат замены всех её символов некоторыми доопределениями.

Система $F$ частичных булевых функций может быть описана в этих терминах следующим образом. Занумеруем наборы $\tilde{\sigma} \in \{0,1\}^k$ символами $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$. Символы $a_i$ образуют чёткий алфавит $A_0$. Каждому набору $\tilde{\alpha} \in \{0, 1, *\}^k$ поставим в соответствие символ $a_T$, где $T$ — множество номеров символов из $A_0$, соответствующих доопределениям набора $\tilde{\alpha}$. Совокупность символов $a_T$ образует нечёткий алфавит $A$. Система $F$ частичных булевых функций задаётся последовательностью длины $2^n$ в алфавите $A$.

Пусть $P = (p_T,\ T \subseteq M)$, где $p_T \geqslant 0$ и $\sum\limits_T p_T = 1$, — некоторый набор. Задав набор $Q = (q_i,\ i \in M)$, где $q_i \geqslant 0$ и $\sum\limits_i q_i = 1$, введём функцию*)

$$\mathcal{H}(P, Q) = -\sum_{T \subseteq M} p_T \log \sum_{i \in T} q_i$$

и положим $\mathcal{H}(P) = \min\limits_Q \mathcal{H}(P, Q)$. Нетрудно видеть, что минимум достижим. Случай, когда набор $P$ удовлетворяет условию $p_T = 0$ при $a_T \notin A_0$, будем называть *чётким*. При этом функция $\mathcal{H}(P, Q)$ приобретает вид $-\sum\limits_{i \in M} p_i \log q_i$, её минимум достигается в единственной точке $Q = P = (p_0, \ldots, p_{m-1})$ и совпадает с энтропией Шеннона $H(P) = -\sum\limits_{i \in M} p_i \log p_i$.

---

*) Здесь и всюду в дальнейшем log обозначает логарифм по основанию 2.

Функцию $\mathcal{H}(P)$ будем рассматривать как обобщение энтропийной функции на нечёткий случай (подробнее в [10]).

В дальнейшем понадобится следующая

**Лемма 1** [10]. *Набор $Q$ минимизирует функцию $\mathcal{H}(P,Q)$ тогда и только тогда, когда при каждом $i$, $i \in M$, выполнено неравенство*

$$\sum_{\{T:\, i\in T\}} \frac{p_T}{\sum\limits_{j\in T} q_j} \leqslant 1, \tag{1}$$

*где строгое неравенство может иметь место только при таких $i$, что $q_i = 0$.*

Пусть $\mathcal{K}_l$ — какой-либо класс нечётких последовательностей длины $l$. Скажем, что множество $\mathcal{D}_l$ чётких последовательностей длины $l$ *доопределяет класс* $\mathcal{K}_l$, если в нём имеется доопределение для каждой последовательности из $\mathcal{K}_l$. Обозначим через $N(\mathcal{K}_l)$ минимальную мощность множества $\mathcal{D}_l$, доопределяющего $\mathcal{K}_l$. Величину $\log N(\mathcal{K}_l)$ назовём *комбинаторной энтропией* класса $\mathcal{K}_l$.

Для заданных числа $l$ и набора $\mathbf{l} = (l_T,\, T \subseteq M)$, $\sum\limits_T l_T = l$, обозначим через $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ класс всех таких последовательностей длины $l$ в алфавите $A$, в каждой из которых символ $a_T$, $T \subseteq M$, встречается $l_T$ раз. Вместо $N(\mathcal{K}_l(\mathbf{l}))$ будем использовать обозначение $N_l(\mathbf{l})$. Введём набор частот $\mathbf{l}/l = (l_T/l \mid T \subseteq M)$. Следующее утверждение содержит оценки комбинаторной энтропии $\log N_l(\mathbf{l})$ класса $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$.

**Теорема 1** [10]. *Существуют константы $c_1 = c_1(m)$ и $c_2 = c_2(m)$ такие, что комбинаторная энтропия $\log N_l(\mathbf{l})$ класса $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ заключена в пределах*

$$l\,\mathcal{H}(\mathbf{l}/l) - c_1 \log l \leqslant \log N_l(\mathbf{l}) \leqslant l\,\mathcal{H}(\mathbf{l}/l) + c_2 \log l.$$

С классом $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ свяжем функционал $h_l(\mathbf{l}) = l\,\mathcal{H}(\mathbf{l}/l)$. Для нечёткой последовательности $\mathbf{a}$ длины $l$ обозначим через $\mathcal{K}_l(\mathbf{a})$ содержащий её класс $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ и положим $h_l(\mathbf{a}) = h_l(\mathbf{l})$, $N_l(\mathbf{a}) = N_l(\mathbf{l})$. В этих обозначениях теорема может быть переписана в виде

$$h_l(\mathbf{a}) - c_1 \log l \leqslant \log N_l(\mathbf{a}) \leqslant h_l(\mathbf{a}) + c_2 \log l.$$

Нечёткий символ $a_M$, доопределимый любым символом из $A_0$, будем называть *неопределённым* и обозначать через $*$.

**Лемма 2**. *Если последовательность $\mathbf{a}'$ длины $l'$ получена из последовательности $\mathbf{a}$ длины $l$ добавлением или изъятием некоторых неопределённых символов, то $h_{l'}(\mathbf{a}') = h_l(\mathbf{a})$.*

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем изъятия символа $*$. Пусть $\mathbf{l}$ и $\mathbf{l}'$ — наборы параметров последовательностей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$. Для них $l'_T = l_T$ при $T \neq M$ и $l'_M = l_M - l + l'$. После очевидных преобразований, учитывая равенство $\log \sum\limits_{i \in M} q_i = \log 1 = 0$, получаем

$$\mathcal{H}\left(\frac{\mathbf{l}}{l}, Q\right) = \frac{l'}{l}\mathcal{H}\left(\frac{\mathbf{l}'}{l'}, Q\right) - \frac{l-l'}{l}\log\sum_{i \in M} q_i = \frac{l'}{l}\mathcal{H}\left(\frac{\mathbf{l}'}{l'}, Q\right).$$

Следовательно, $l\,\mathcal{H}(\mathbf{l}/l, Q) = l'\mathcal{H}(\mathbf{l}'/l', Q)$. Взяв минимум по $Q$, получаем $h_l(\mathbf{a}) = h_{l'}(\mathbf{a}')$. Лемма 2 доказана.

**Следствие 1**. *Если* $\mathbf{a}$ *— последовательность в алфавите* $A_0 \cup \{*\} = \{a_0, \ldots, a_{m-1}, *\}$, *символ* $a_i$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, *встречается в ней* $l_i$ *раз и* $l' = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant m-1} l_i$, *то* $h_l(\mathbf{a}) = l' \log l' - \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant m-1} l_i \log l_i$.

Действительно, последовательность $\mathbf{a}'$, полученная из $\mathbf{a}$ удалением символа $*$, является чёткой. По лемме 2 имеем

$$h_l(\mathbf{a}) = h_{l'}(\mathbf{a}') = l' H\left(\frac{l_0}{l'}, \ldots, \frac{l_{m-1}}{l'}\right).$$

Эта величина преобразуется к виду, указанному в формулировке леммы 2.

## 3. Условная комбинаторная энтропия в специальном случае

Пусть $A = \{a_T,\ T \subseteq M\}$ и $B = \{b_U,\ U \subseteq L\}$ — нечёткие алфавиты, $\mathbf{a} = a_{T_1} a_{T_2} \ldots a_{T_l}$ и $\mathbf{b} = b_{U_1} b_{U_2} \ldots b_{U_l}$ — нечёткие последовательности длины $l$ в алфавитах $A$ и $B$. Обозначим через $l_{TU}$ число в этих последовательностях пар $(a_{T_i}, b_{U_i})$, совпадающих с $(a_T, b_U)$. Положим $l_T = \sum\limits_U l_{TU}$, $\mathbf{l}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (l_{TU},\ T \subseteq M, U \subseteq L)$ и $\mathbf{l}(\mathbf{a}) = (l_T,\ T \subseteq M)$. Обозначим через $\mathcal{K}_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ класс всех пар $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$ с $\mathbf{l}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = \mathbf{l}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Введём наборы частот $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (p_{TU} = l_{TU}/l,\ T \subseteq M, U \subseteq L)$, $P(\mathbf{a}) = (p_T = l_T/l,$ $T \subseteq M)$ и положим $\mathcal{H}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathcal{H}(P(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$, $\mathcal{H}(\mathbf{a}) = \mathcal{H}(P(\mathbf{a}))$. При вычислении $\mathcal{H}(P(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ доопределениями пары $(a_T, b_U)$ считаются чёткие пары $(a_i, b_j)$, $i \in T$, $j \in U$.

Будем говорить, что *символ* $a_T$ *конкретнее* $b_U$, если $a_T \in A_0$ или $b_U = *$, и что *последовательность* $\mathbf{a}$ *конкретнее* $\mathbf{b}$, если $l_{TU} > 0$ лишь тогда, когда $a_T$ конкретнее $b_U$. В данном разделе будем рассматривать *специальный случай*, когда $\mathbf{a}$ конкретнее $\mathbf{b}$. Для индексов $i \in M$ таких, что $l_i > 0$, введём величины $p_{U|i} = \dfrac{l_{iU}}{l_i}$, $U \subseteq L$, и набор $P(\mathbf{b}|a_i) =$

$(p_{U|i},\ U \subseteq L)$. Положим

$$\mathcal{H}(\mathbf{b}|a_i) = \mathcal{H}(P(\mathbf{b}|a_i)) = \min_{Q^{(i)}} \left\{ -\sum_{U\subseteq L} p_{U|i} \log \sum_{j\in U} q_j^{(i)} \right\},$$

где минимум берётся по наборам $Q^{(i)} = (q_j^{(i)},\ j \in L)$, $q_j^{(i)} \geqslant 0$, $\sum\limits_j q_j^{(i)} = 1$. Введём величину

$$\mathcal{H}(\mathbf{b}|\mathbf{a}) = \sum_{i:\, p_i>0} p_i \mathcal{H}(\mathbf{b}|a_i)$$

и функционал $h_l(\mathbf{b}|\mathbf{a}) = l\mathcal{H}(\mathbf{b}|\mathbf{a})$.

Следующий факт вытекает из теоремы 3 [12].

**Теорема 2**. *Если последовательность* $\mathbf{a}$ *конкретнее* $\mathbf{b}$, *то*

$$\mathcal{H}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathcal{H}(\mathbf{a}) + \mathcal{H}(\mathbf{b}|\mathbf{a}).$$

Домноженив обе части равенства на $l$, получаем

**Следствие 2**. *Если последовательность* $\mathbf{a}$ *конкретнее* $\mathbf{b}$, *то* $h_l(\mathbf{a},\mathbf{b}) = h_l(\mathbf{a}) + h_l(\mathbf{b}|\mathbf{a})$.

Обозначим через $\mathbf{b}^{(i)}$ последовательность длины $l_i$ ($l_i$ взято из $\mathbf{l}(\mathbf{a})$), полученную из $\mathbf{b}$ удалением символов $b_{U_j}$ при всех таких $j$, что $a_{T_j} \neq a_i$.

**Лемма 3**. *Если последовательность* $\mathbf{a}$ *конкретнее* $\mathbf{b}$, *то*

$$h_l(\mathbf{b}|\mathbf{a}) = \sum_{i\in M} h_{l_i}(\mathbf{b}^{(i)}).$$

Доказательство. Имеют место равенства

$$lp_i\mathcal{H}(\mathbf{b}|a_i) = l\,\frac{l_i}{l} \min_{Q^{(i)}} \left\{ -\sum_{U} \frac{l_{iU}}{l_i} \log \sum_{j\in U} q_j^{(i)} \right\} = l_i \mathcal{H}\left(\frac{\mathbf{l}(\mathbf{b}^{(i)})}{l_i}\right) = h_{l_i}(\mathbf{b}^{(i)}).$$

Просуммировав их по $i$, получаем $l\mathcal{H}(\mathbf{b}|\mathbf{a}) = \sum\limits_{i\in M} h_{l_i}(\mathbf{b}^{(i)})$. Левая часть совпадает с $h_l(\mathbf{b}|\mathbf{a})$. Лемма 3 доказана.

## 4. Асимптотика относительной сложности в специальном случае

Пусть задана система частичных функций $F = (f_1, \ldots, f_k)$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Рассматривая $F$ как нечёткую последовательность $\mathbf{a}_F$ длины $l = 2^n$, можно ввести функционал $h_l(\mathbf{a}_F)$, для которого будем использовать обозначение $h_n(F)$. В предположении, что $\log h_n(F) \sim n$, в [8, 9] установлено соотношение

$$L(n, F) \sim \rho \frac{h_n(F)}{\log h_n(F)}. \tag{2}$$

Применительно к функции $f$ функционал $h_n(f)$ приобретает вид

$$h_n(f) = l' \log l' - l_0 \log l_0 - l_1 \log l_1,$$

где $l_0$ и $l_1$ взяты из $\mathbf{l}(f)$, $l' = l_0 + l_1$. В этом случае известен окончательный результат (см. [7] и ссылки из [7]):

$$L(n, f) = \rho \frac{h_n(f)}{\log h_n(f)}(1 + o(1)) + O(n). \tag{3}$$

Пусть наряду с $F$ задана частичная функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $F$ конкретнее $g$. Рассматривая $F$ и $g$ как нечёткие последовательности $\mathbf{a}_F$ и $\mathbf{b}_g$ длины $l = 2^n$, введём функционал $h_l(\mathbf{b}_g|\mathbf{a}_F)$, для которого будем использовать обозначение $h_n(g|F)$. Применяя лемму 3 и следствие 1, выпишем его явное выражение

$$h_n(g|F) = \sum_{\tilde\sigma \in \{0,1\}^k} l'_{\tilde\sigma} \log l'_{\tilde\sigma} - \sum_{(\tilde\sigma\tau) \in \{0,1\}^{k+1}} l_{\tilde\sigma\tau} \log l_{\tilde\sigma\tau}, \tag{4}$$

где $l_{\tilde\sigma\tau}$ взяты из $\mathbf{l}(F, g)$, $l'_{\tilde\sigma} = l_{\tilde\sigma 0} + l_{\tilde\sigma 1}$.

**Теорема 3**. *Если система $F$ конкретнее $g$, то*

$$L(n, g|F) = \rho \frac{h_n(g|F)}{\log h_n(g|F)}(1 + o(1)) + O(n).$$

Доказательство. *Верхняя оценка.* Введём частичные функции $g^{\tilde\sigma}(\tilde x)$, $\tilde\sigma \in \{0,1\}^k$, положив для $\tilde a \in \{0,1\}^n$:

$$g^{\tilde\sigma}(\tilde a) = \begin{cases} g(\tilde a), & \text{если } F(\tilde a) = \tilde\sigma, \\ \quad * & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим частичную функцию

$$\varphi(\tilde{x},\tilde{y}) = \bigvee_{\tilde{\sigma}} K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{y}) g^{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}),$$

где $\tilde{y}=(y_1,\ldots,y_k)$, $\tilde{\sigma}=(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)$ и $K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{y}) = y_1^{\sigma_1}\ldots y_k^{\sigma_k}$. Схема, реализующая функцию $\varphi$, реализует $g$ относительно $F$. Действительно, если значение $g(\tilde{a})$ определено, то, поскольку $F$ конкретнее $g$, определены значения $f_1(\tilde{a}),\ldots,f_k(\tilde{a})$, составляющие $F(\tilde{a})$. При этом если $F(\tilde{a})=\tilde{\sigma}$, то для любого доопределения $\hat{F}$ системы $F$ выполнено соотношеине

$$\varphi(\tilde{a},\hat{F}(\tilde{a})) = \varphi(\tilde{a},\tilde{\sigma}) = g^{\tilde{\sigma}}(\tilde{a}) = g(\tilde{a}).$$

Из выражения для $\varphi$ с учётом (3) и (4) получаем

$$\begin{aligned} L(g|F) \leqslant L(\varphi) &\leqslant \rho \sum_{\tilde{\sigma}} \frac{h_n(g^{\tilde{\sigma}})}{\log h_n(g^{\tilde{\sigma}})}(1+o(1)) + O(n) \\ &= \rho \frac{\sum\limits_{\tilde{\sigma}} h_n(g^{\tilde{\sigma}})}{\log \sum\limits_{\tilde{\sigma}} h_n(g^{\tilde{\sigma}})}(1+o(1)) + O(n) = \rho\frac{h_n(g|F)}{\log h_n(g|F)}(1+o(1)) + O(n). \quad (5) \end{aligned}$$

*Нижняя оценка.* Пусть $J$ — некоторый алгоритм такой, что для любой системы $F$ и функции $g$, где $F$ конкретнее $g$, существует такое двоичное слово (программа) $p_{F,g}$, что для любого доопределения $\hat{F}$ результатом $J(p_{F,g},\hat{F})$ является некоторое доопределение $\hat{g}$ функции $g$. Обозначим через $l_J(g|F)$ минимум длин программ для пары $(F,g)$, а через $l_J(n,g|F)$— максимум величин $l_J(g'|F')$ по всем $(F',g')\in\mathcal{K}_n(F,g)$. Покажем, что существует такая константа $c$, зависящая от числа $k$ функций в $F$, что

$$l_J(n,g|F) \geqslant h_n(g|F) - cn. \quad (6)$$

Для неотрицательного целого $s$ положим $\tilde{s} = \pi_1\pi_1\ldots\pi_t\pi_t01$, где $\pi_1\ldots\pi_t$, $t \leqslant \log(s+1)+1$, — двоичная запись s. Доопределение системы $F'\in\mathcal{K}_n(F)$ может быть задано двоичным набором

$$\alpha = \tilde{n}\tilde{k}\tilde{l}_{\tilde{\sigma}_0}\tilde{l}_{\tilde{\sigma}_1}\ldots\tilde{l}_{\tilde{\sigma}_{3^k-1}}\mu,$$

где $\tilde{l}_{\tilde{\sigma}_i}$, $0\leqslant i\leqslant 3^k-1$, — параметры класса $\mathcal{K}_n(F)$ при некотором упорядочении наборов из $\{0,1,*\}^k$, $\mu$ — двоичная запись номера доопределения системы $F'$ в доопределяющем множестве для $\mathcal{K}_n(F)$, удовлетворяющем оценке из теоремы 1 (при $l=2^n$). Очевидно, что длина $l(\alpha)\leqslant h_n(F)+c'n$.

Некоторое доопределение $(\hat{F}', \hat{g}')$ пары $(F', g')$ из $\mathcal{K}_n(F, g)$ может быть восстановлено по двоичному набору $\beta = \tilde{l}(\alpha)\alpha p_{F,g}$ длины $l(\beta) \leqslant h_n(F) + l_J(n, g|F) + c''n$. Эта оценка справедлива для всех $(F', g')$ из $\mathcal{K}_n(F, g)$. Поэтому она не меньше комбинаторной энтропии класса $\mathcal{K}_n(F, g)$ и в силу теоремы 1

$$h_n(F) + l_J(n, g|F) + c''n \geqslant h_n(F, g) - c_1 n.$$

Учитывая равенство

$$h_n(F, g) = h_n(F) + h_n(g|F), \tag{7}$$

вытекающее из следствия 2, получаем (6).

Пусть $\mathfrak{N}(n, L)$ — множество неизоморфных схем в заданном базисе, имеющих $n$ входов, 1 выход и сложность, не превосходящую $L$. Мощность $N(n, L)$ этого множества удовлетворяет оценке из [4]:

$$N(n, L) \leqslant (c(L + n))^{\frac{1}{\rho}L+1}.$$

Для $(F', g') \in \mathcal{K}_n(F, g)$ возьмём схему $S_{F',g'}$ минимальной сложности, реализующую $g$ относительно $F$, и поставим ей в соответствие двоичное слово $\gamma_{F',g'} = \tilde{n}\tilde{L}'\nu$, где $L' = \lceil L(n, g|F) \rceil$, $\nu$ — двоичная запись номера схемы из множества $\mathfrak{N}(n + k, L')$ (при некотором его упорядочении), которая изоморфна схеме $S_{F',g'}$. Длина этого слова удовлетворяет оценке

$$l(\gamma_{F',g'}) \leqslant \frac{1}{\rho} L(n, g|f) \log(L(n, g|F) + n) + c'n.$$

Набор $\gamma_{F',g'}$ может быть использован в качестве программы $p_{F,g}$ для алгоритма $J$, который по нему строит схему, реализующую $g$ относительно $F$, и с её помощью по произвольному доопределению $\hat{F}'$ находит некоторое доопределение функции $\hat{g}'$. В силу сказанного и (6) имеем

$$\frac{1}{\rho} L(n, g|f) \log(L(n, g|F) + n) + c'n \geqslant l_J(n, g|F) \geqslant h_n(g|F) - cn.$$

Из этого неравенства следует требуемая нижняя оценка для $L(n, g|F)$. Теорема 3 доказана.

Систему $F = (f_1, \ldots, f_k)$ такую, что $D(f_1) \supseteq \ldots \supseteq D(f_k)$, будем называть *системой с вложенными областями определения*. Последовательное применение равенства (7) даёт

$$h_n(F) = h_n(f_1) + h_n(f_2|f_1) + h_n(f_3|f_1 f_2) + \ldots + h_n(f_k|f_1 \ldots f_{k-1}). \tag{8}$$

Используя (4), можно выписать явное представление функционала $h_n(F)$:

$$h_n(F) = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{\tilde\sigma \in \{0,1\}^s} (l'_{\tilde\sigma} \log l'_{\tilde\sigma} - l_{\tilde\sigma 0} \log l_{\tilde\sigma 0} - l_{\tilde\sigma 1} \log l_{\tilde\sigma 1}), \tag{9}$$

где для $\tilde\sigma \in \{0,1\}^s$ параметры $l_{\tilde\sigma\tau}$ взяты из набора $\mathbf{l}(F_{s+1}) = \mathbf{l}(f_1, \ldots, f_{s+1})$, а $l'_{\tilde\sigma} = l_{\tilde\sigma 0} + l_{\tilde\sigma 1}$.

**Теорема 4**. *Если $F$ — система функций с вложенными областями определения, то*

$$L(n,F) = \rho \frac{h_n(F)}{\log h_n(F)} (1 + o(1)) + O(n), \tag{10}$$

*где $h_n(F)$ находится согласно (9).*

Доказательство. Каждая система $F_s$ конкретнее $f_{s+1}$. Поэтому в силу (5) и (8) имеем

$$\begin{aligned} L(n,F) &\leqslant L(n,f_1) + \sum_{s=1}^{k-1} L(n, f_{s+1}|F_s) \\ &\leqslant \rho\Big(\frac{h_n(f_1)}{\log h_n(f_1)} + \sum_{s=1}^{k+1} \frac{h_n(f_{s+1}|F_s)}{\log h_n(f_{s+1}|F_s)}\Big)(1+o(1)) + O(n) \\ &= \rho \frac{h_n(F)}{\log h_n(F)}(1+o(1)) + O(n). \end{aligned}$$

Нижняя оценка вытекает из мощностных соображений и теоремы 1, в соответствии с которой комбинаторная энтропия класса $\mathcal{K}_n(F)$ не меньше $h_n(F) - cn$. Теорема 4 доказана.

**Следствие 3**. *Если области определения функций системы $F$ совпадают, то имеет место оценка (10), где*

$$h_n(F) = l \log l - \sum_{\tilde\sigma \in \{0,1\}^k} l_{\tilde\sigma} \log l_{\tilde\sigma}, \quad l = \sum_{\tilde\sigma \in \{0,1\}^k} l_{\tilde\sigma}.$$

**Следствие 4**. *Если $F = (f_1, \ldots, f_k)$ – система с вложенными областями определения, то*

$$\begin{aligned} L(n,F) = (L(n,f_1) + L(n,f_2 \mid f_1) + L(n, f_3 \mid f_1 f_2) + \ldots \\ \ldots + L(n, f_k | f_1 \ldots f_{k-1}))(1+o(1)) + O(n). \end{aligned}$$

Это означает, что для системы $F$ частичных функций с вложенными областями определения метод последовательной реализации, при котором сначала строится схема $S_1$, реализующая $f_1$, затем схема $S_2$, реализующая $f_2$ относительно $f_1$, далее схема $S_3$, реализующая $f_3$ относительно $(f_1, f_2)$, и так далее, позволяет получить схему для $F$ с асимптотически наилучшей для класса $\mathcal{K}_n(F)$ оценкой сложности. Более того, схемы, возникающие на шагах $i$ для систем $F_i = (f_1, \ldots, f_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, будут асимптотически наилучшими для классов $\mathcal{K}_n(F_i)$.

## 5. Последовательная реализация

Последовательные реализации общего типа будем изучать для случая систем $(f, g)$ из двух функций. Если не накладывать каких-либо условий на схему $S_f$ для $f$, то при последовательной реализации тривиально достижима наилучшая схема для $(f, g)$: схема $S_f$, полученная из минимальной схемы для $(f, g)$ удалением элементов, не принадлежащих цепям, ведущим к выходу $f$, может быть достроена до наилучшей схемы для $(f, g)$. В связи с этим будем рассматривать последовательные реализации при ограничениях на сложность схемы $S_f$.

Тот факт, что схема $S_1$ является подсхемой схемы $S$, будем обозначать $S_1 \subseteq S$. Задавшись параметром $t$, $t \geqslant L(f)$, введём характеристику *сложности последовательной реализации* пары $(f, g)$ при ограничении $t$ на сложность реализации функции $f$, положив

$$L_t(f, g) = \min\{s \mid \exists S_1 \exists S (S_1 \subseteq S \wedge (S_1 \text{ реализует } f) \wedge \\ L(S_1) \leqslant t \wedge (S \text{ реализует } (f, g)) \wedge L(S) \leqslant s\}.$$

Очевидно, что $L_t(f, g) \geqslant L(f, g)$.

Задавшись функцией $t(n)$, $t(n) \geqslant L(n, f)$, введём *функцию Шеннона* $L_{t(n)}(n, f, g)$ *для последовательной реализации* как максимум величин $L_{t(n)}(f', g')$ по всем $(f', g') \in \mathcal{K}_n(f, g)$. Ясно, что $L_{t(n)}(n, f, g) \geqslant L(n, f, g)$. Нас будет интересовать возможность одновременного достижения при последовательной реализации асимптотик для $L(n, f)$ и $L(n, f, g)$, т. е. выполнимость соотношения $L_{t(n)}(n, f, g) \sim L(n, f, g)$ при $t(n) \sim L(n, f)$.

Из доказательства теоремы 4 вытекает

**Теорема 5**. *Если функция $f$ конкретнее $g$, $t(n) \sim L(n, f)$ и выполнено условие $L(n, f, g)/n \to \infty$, то*

$$L_{t(n)}(n, f, g) \sim L(n, f, g).$$

**Замечание.** Асимптотика $L_{t(n)}(n, f, g) \sim L(n, f, g)$ достижима в классе последовательных реализаций, в котором схема $S_1$ для функции $f$

строится без привлечения информации о $g$, а реализация функции $g$ использует только выход схемы $S_1$.

**Следствие 5**. *Если $D(f) = D(g)$, $L(n,f,g)/n \to \infty$, $t(n) \sim L(n,f)$ и $t'(n) \sim L(n,g)$, то $L_{t(n)}(n,f,g) \sim L_{t'(n)}(n,g,f)$.*

Это означает, что для функций $f$ и $g$, имеющих одинаковую область определения (в частности, всюду определённых), порядок функций при последовательной реализации асимптотически не влияет на сложность. Это верно не только для двух функций, но и для произвольного конечного числа таких функций.

Далее понадобятся некоторые дополнительные свойства нечётких последовательностей.

## 6. Комбинаторная энтропия при заданных ограничениях

Пусть наряду с классом $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ задан класс $\mathcal{K}_l(\mathbf{s})$, где $\mathbf{s} = (s_0, \ldots, s_{m-1})$ и $s_0 + \ldots + s_{m-1} = l$, чётких последовательностей длины $l$, в которых смвол $a_i$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, встречается $s_i$ раз. Скажем, что *набор* $\mathbf{s}$ *совместим с* $\mathbf{l}$, если в $\mathcal{K}_l(\mathbf{s})$ имеются доопределения всех (эквивалентно, хотя бы одной) последовательностей из $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$. Обозначим через $N_l(\mathbf{l})_{\mathbf{s}}$ минимальное число последовательностей из $\mathcal{K}_l(\mathbf{s})$, образующих доопределение для $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$. Величину $\log N_l(\mathbf{l})_{\mathbf{s}}$ назовём *комбинаторной энтропией класса* $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ *при ограничении* $\mathbf{s}$ (на параметры доопределений).

Пусть $R = \|r_{Ti}\|$, $r_{Ti} \geqslant 0$, — матрица, строки которой соответствуют множествам $T \subseteq M$, столбцы — элементам $i \in M$. Элементы матрицы удовлетворяют условиям: 1) если $r_{Ti} > 0$, то $i \in T$, 2) $\sum\limits_{T,i} r_{Ti} = 1$. С матрицей $R$ свяжем функцию

$$\mathcal{I}(R) = \sum_{T,i} r_{Ti} \log \frac{r_{Ti}}{\sum\limits_{T} r_{Ti} \sum\limits_{i} r_{Ti}}.$$

Если рассматривать $R$ как матрицу совместных вероятностей, то $\mathcal{I}(R)$ совпадает с мерой взаимной информации [1]. Пусть заданы наборы $P = (p_T,\ T \subseteq M)$, где $p_T \geqslant 0$, $\sum\limits_{T} p_T = 1$, и $Q = (q_i,\ i \in M)$, где $q_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i} q_i = 1$. Будем говорить, что *матрица $R$ согласована с набором $P$ при ограничении $Q$*, если $\sum\limits_{i} r_{Ti} = p_T$, $\sum\limits_{T} r_{Ti} = q_i$. В этом случае функция $\mathcal{I}(R)$ приобретает вид

$$\mathcal{I}(R) = \sum_{T,i} r_{Ti} \log \frac{r_{Ti}}{p_T \cdot q_i}.$$

Обозначим через $\mathcal{H}(P)_Q$ минимум величин $\mathcal{I}(R)$, взятых по всем матрицам $R$, согласованным с $P$ при ограничении $Q$. Нетрудно видеть, что этот минимум достижим.

**Лемма 4**. *Величина $\mathcal{H}(P)_Q$, рассматриваемая как функция от $Q$ (при фиксированном $P$), выпукла по $Q$.*

Доказательство. Пусть $Q_1$ и $Q_2$ — некоторые ограничивающие наборы и значения $\mathcal{H}(P)_{Q_1}$ и $\mathcal{H}(P)_{Q_2}$ достигаются на матрицах $R_1$ и $R_2$. Возьмём произвольное $\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. При фиксированном $P$ функция $\mathcal{I}(R)$ для матриц $R$, согласованных с $P$, выпукла по $R$ [1]. Это означает, что $\lambda\mathcal{I}(R_1)+(1-\lambda)\mathcal{I}(R_2) \geqslant \mathcal{I}(\lambda R_1+(1-\lambda)R_2)$. Матрица $\lambda R_1+(1-\lambda)R_2$ согласована с $P$ и удовлетворяет ограничениям $\lambda Q_1+(1-\lambda)Q_2$. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(P)_{\lambda Q_1+(1-\lambda)Q_2} \leqslant \mathcal{I}(\lambda R_1+(1-\lambda)R_2) \leqslant \lambda\mathcal{I}(R_1)+(1-\lambda)\mathcal{I}(R_2)\\ = \lambda\mathcal{H}(P)_{Q_1}+(1-\lambda)\mathcal{H}(P)_{Q_2}.\end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

**Следствие 6**. *Величина $\mathcal{H}(P)_Q$, рассматриваемая как функция от $Q$, непрерывна во внутренних точках $Q$ области определения.*

Этот факт вытекает из непрерывности выпуклых функций внутри области определения [3].

Введём функционал $h_l(\mathbf{l})_\mathbf{s} = l\mathcal{H}(\mathbf{l}/l)_{(\mathbf{s}/l)}$. Следующая теорема содержит оценки комбинаторной энтропии класса $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ при ограничении $\mathbf{s}$.

**Теорема 6**. *Существуют константы $c_1 = c_1(m)$ и $c_2 = c_2(m)$ такие, что*

$$h_l(\mathbf{l})_\mathbf{s} - c_1\log l \leqslant \log N_l(\mathbf{l})_\mathbf{s} \leqslant h_l(\mathbf{l})_\mathbf{s} + c_2\log l.$$

Доказательство. *Нижняя оценка.* Обозначим через $t_\mathbf{s}(\mathbf{l})$ число последовательностей из $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$, доопределяемых одной последовательностью из $\mathcal{K}_l(\mathbf{s})$.

Рассмотрим произвольные $\mathbf{a} \in \mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ и $\mathbf{b} \in \mathcal{K}_l(\mathbf{s})$ такие, что $\mathbf{b}$ доопределяет $\mathbf{a}$. Пусть $v_{Ti}$ — число символов $a_T$ из $\mathbf{a}$, доопределённых в $\mathbf{b}$ символом $a_i$. Числа $v_{Ti}$ удовлетворяют условиям:

$$\sum_T v_{Ti} = s_i \ (i \in M), \quad \sum_i v_{Ti} = l_T \ (T \subseteq M), \quad v_{Ti} = 0 \ \text{ при } i \notin T. \tag{11}$$

При фиксированных $v_{Ti}$ последовательность $\mathbf{b}$ доопределяет

$$\frac{s_0!}{\prod\limits_T v_{T0}!}\cdots\frac{s_{m-1}!}{\prod\limits_T v_{T,m-1}!} = \frac{\prod\limits_i s_i!}{\prod\limits_{T,i} v_{Ti}!}$$

последовательностей из $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$, а всего $\mathbf{b}$ доопределяет

$$t(\mathbf{l})_{\mathbf{s}} = \sum_{\{v_{Ti}\},(11)} \frac{\prod\limits_i s_i!}{\prod\limits_{T,i} v_{Ti}!}$$

последовательностей из этого класса, где сумма берётся по всем наборам неотрицательных чисел $v_{Ti}$, удовлетворяющих условиям (11). В силу условия $0 \leqslant v_{Ti} \leqslant l$ и того, что число индексов $i$ и число множеств $T$ ограничены константами (зависящими от $m$), имеем

$$t_{\mathbf{s}}(\mathbf{l}) \leqslant l^c \max_{\{v_{Ti}\},(11)} \left( \prod_i s_i! \Big/ \prod_{T,i} v_{Ti}! \right), \qquad (12)$$

где $c = c(m)$ — константа. Класс $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ состоит из $l!/\prod_T l_T!$ последовательностей. Отсюда и из (12) следует, что минимальная мощность $N_l(\mathbf{l})_{\mathbf{s}}$ доопределяющего множества в классе $\mathcal{K}_l(\mathbf{s})$ для класса $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ удовлетворяет оценке

$$N_l(\mathbf{l})_{\mathbf{s}} \geqslant \frac{|\mathcal{K}_l(\mathbf{l})|}{t_{\mathbf{s}}(\mathbf{l})} \geqslant l^{-c} \min_{\{v_{Ti}\},(11)} \left( l! \prod_{T,i} v_{Ti}! \Big/ \prod_T l_T! \prod_i s_i! \right).$$

Из формулы Стирлинга следует, что для любых целых $z, z_1, \ldots, z_k$ ($z \geqslant 2$, $z_1 + \ldots + z_k = z$) выполнено равенство

$$\log \frac{z!}{\prod\limits_j z_j!} = z \log z - \sum_j z_j \log z_j + \theta \log z,$$

где $-c' \leqslant \theta \leqslant c'$, $c' = c'(k)$ – константа. С учётом этого получаем

$$\log N_l(\mathbf{l})_{\mathbf{s}} \geqslant \min_{\{v_{Ti}\},(11)} \big( l \log l - \sum_T l_T \log l_T - \sum_i s_i \log s_i \\ + \sum_{T,i} v_{Ti} \log v_{Ti} \big) - c_1 \log l.$$

Минимизируемое выражение может быть преобразовано к виду

$$l \sum_{T,i} (v_{Ti}/l) \log \frac{(v_{Ti}/l)}{(l_T/l)(s_i/l)} = l\mathcal{I}(\|v_{Ti}/l\|).$$

В силу (11) имеем $v_{Ti}/l = 0$ для $i \notin T$, $\sum\limits_i (v_{Ti}/l) = l_T/l$ и $\sum\limits_T (v_{Ti}/l) = s_i/l$. Поэтому

$$\log N_l(\mathbf{l})_{\mathbf{s}} \geqslant l\mathcal{H}(\mathbf{l}/l)_{(\mathbf{s}/l)} - c_1 \log l = h_l(\mathbf{l})_{\mathbf{s}} - c_1 \log l.$$

*Верхняя оценка.* Занумеруем последовательности $\mathbf{a}$ из $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ и $\mathbf{b}$ из $\mathcal{K}_l(\mathbf{s})$ индексами $r = 1, 2, \ldots, \dfrac{l!}{\prod_T l_T!}$ и $q = 1, 2, \ldots, \dfrac{l!}{\prod_i s_i!}$ соответственно. Рассмотрим таблицу $\|d_{qr}\|$, строки которой соответствуют последовательностям $\mathbf{b}_q$, столбцы — последовательностям $\mathbf{a}_r$, где

$$d_{qr} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{b}_q \text{ доопределяет } \mathbf{a}_r, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Во всех столбцах этой таблицы содержится одинаковое число единиц; обозначим его через $b_{\mathbf{s}}(\mathbf{l})$. Так как набор $\mathbf{s}$ совместим с $\mathbf{l}$, то $b_{\mathbf{s}}(\mathbf{l}) \geqslant 1$.

Оценим $b_{\mathbf{s}}(\mathbf{l})$. Рассмотрим произвольные $\mathbf{a}_r$ и $\mathbf{b}_q$ такие, что $\mathbf{b}_q$ доопределяет $\mathbf{a}_r$. Обозначим через $v_{Ti}$ число символов $a_T$ в последовательности $\mathbf{a}_r$, доопределяемых в $\mathbf{b}_q$ символом $a_i$. Числа $v_{Ti}$ удовлетворяют условиям (11). Так как при фиксированных $v_{Ti}$ последовательность $\mathbf{a}_r$ доопределяется

$$\prod_T \frac{l_T!}{\prod_i v_{Ti}!} = \frac{\prod_T l_T!}{\prod_{T,i} v_{Ti}!}$$

последовательностями из $\mathcal{K}_l(\mathbf{s})$, то

$$b_{\mathbf{s}}(\mathbf{l}) = \sum_{\{v_{Ti}\},(11)} \frac{\prod_T l_T!}{\prod_{T,i} v_{Ti}!} \geqslant \max_{\{v_{Ti}\},(11)} \frac{\prod_T l_T!}{\prod_{T,i} v_{Ti}!}.$$

Методом работы [5] в [6] установлено, что в матрице из нулей и единиц размера $n \times m$, содержащей не менее $s$ единиц в каждом столбце, можно выделить не более $(n/s)(\ln(ms/n)+1)+1$ строк, содержащих 1 в каждом столбце. Применив этот результат при

$$n = \frac{l!}{\prod_i s_i!}, \quad m = \frac{l!}{\prod_T l_T!}, \quad s = \max_{\{v_{Ti}\},(11)} \frac{\prod_T l_T!}{\prod_{T,i} v_{Ti}!},$$

получаем оценку

$$N_l(\mathbf{l})_{\mathbf{s}} \leqslant c\,l\,\frac{l!}{\prod_T l_T! \prod_i s_i!} \min_{\{v_{Ti}\},(11)} \prod_{T,i} v_{Ti}!,$$

где $c = c(m)$ — некоторая константа. Аналогично случаю нижней оценки эта величина может быть преобразована к виду

$$\log N_l(\mathbf{l})_{\mathbf{s}} \leqslant \min_{\{v_{Ti}\},(11)} l\mathcal{I}(\|v_{Ti}/l\|) + c' \log l. \tag{13}$$

Величина $l \cdot \min\limits_{\{v_{Ti}\},(11)} \mathcal{I}(\|v_{Ti}/l\|)$ отличается от $l\mathcal{H}(\mathbf{l}/l)_{(\mathbf{s}/l)} = h_l(\mathbf{l})_{\mathbf{s}}$ тем, что при её вычислении минимум берётся по целочисленным $v_{Ti}$. Нетрудно убедиться непосредственно, что изменение величины $v_{Ti}$ не более чем на 1 приводит к изменению $l\mathcal{I}(\|v_{Ti}/l\|)$ не больше чем на $O(\log v_{Ti})$. Поскольку $v_{Ti} \leqslant l$ и число пар $(T, i)$ ограничено константой (зависящей от $m$), получаем

$$l \cdot \min_{\{v_{Ti}\},(11)} \mathcal{I}(\|v_{Ti}/l\|) \leqslant h_l(\mathbf{l})_{\mathbf{s}} + c'' \log l,$$

что с учётом (13) обеспечивает требуемую верхнюю оценку. Теорема 6 доказана.

Пусть $\mathcal{B}_l \subseteq \mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ — некоторое множество последовательностей, и пусть $N(\mathcal{B}_l)_{\mathbf{s}}$ — мощность наименьшего подмножества последовательностей из $\mathcal{K}_l(\mathbf{s})$, доопределяющего $\mathcal{B}_l$. Из доказательства теоремы 6 вытекает

**Следствие 7**. *Если $|\mathcal{K}_l(\mathbf{l})|/|\mathcal{B}_l| \leqslant l^c$, где $c$ — константа, то комбинаторная энтропия $\log N(\mathcal{B}_l)_{\mathbf{s}}$ класса $\mathcal{B}_l$ при ограничении $\mathbf{s}$ удовлетворяет оценкам $h_l(\mathbf{l})_{\mathbf{s}} - c' \log l \leqslant \log N(\mathcal{B}_l)_{\mathbf{s}} \leqslant h_l(\mathbf{l})_{\mathbf{s}} + c'' \log l$.*

Далее понадобится обобщение теоремы 6 на случай двух нечётких последовательностей.

Пусть заданы нечёткие последовательности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ длины $l$ в алфавитах $A = \{a_T,\ T \subseteq M\}$ и $B = \{b_U,\ U \subseteq L\}$. Как и раньше, наборы параметров для пары $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и для $\mathbf{a}$ будем обозначать через $\mathbf{l}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (l_{TU},\ T \subseteq M, U \subseteq L)$ и $\mathbf{l}(\mathbf{a}) = (l_T,\ T \subseteq M)$, а содержащие их классы — через $\mathcal{K}_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $\mathcal{K}_l(\mathbf{a})$.

Пусть $\mathbf{s} = (s_0, \ldots, s_{m-1})$ — набор, совместимый с $\mathbf{l}(\mathbf{a})$. Будем говорить, что *доопределение* $(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}')$ *пары* $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$ $\mathbf{s}$-*ограничено*, если $\mathbf{l}(\hat{\mathbf{a}}') = \mathbf{s}$. Обозначим через $N_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{s}}$ минимальную мощность множества, содержащего $\mathbf{s}$-ограниченное доопределение для каждой пары $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$ из $\mathcal{K}_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Величину $\log N_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{s}}$ назовём *комбинаторной энтропией класса* $\mathcal{K}_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *при ограничении* $\mathbf{s}$.

Пусть $R^{(2)} = \|r_{TUij}\|$ — матрица, строки которой соответствуют парам множеств $(T, U)$, где $T \subseteq M$, $U \subseteq L$, столбцы — парам $(i, j)$, где $i \in M$ и $j \in L$, и элементы матрицы удовлетворяют условиям: 1) $r_{TUij} \geqslant 0$

и 2) если $r_{TUij} > 0$, то $i \in T$, $j \in U$, $\sum\limits_{T,U,i,j} r_{TUij} = 1$. Положим

$$\mathcal{I}(R^{(2)}) = \sum_{T,U,i,j} r_{TUij} \log \frac{r_{TUij}}{\sum\limits_{T,U} r_{TUij} \sum\limits_{i,j} r_{TUij}}.$$

Пусть заданы наборы $P^{(2)} = (p_{TU},\ T \subseteq M, U \subseteq L)$, где $p_{TU} \geqslant 0$ и $\sum\limits_{T,U} p_{TU} = 1$, и $Q^{(1)} = (q_i,\ i \in M)$, где $q_i \geqslant 0$ и $\sum\limits_i q_i = 1$. Будем говорить, что *матрица* $R^{(2)}$ *согласована с набором* $P^{(2)}$ *при ограничении* $Q^{(1)}$, если $\sum\limits_{i,j} r_{TUij} = p_{TU}$, $\sum\limits_{T,U,j} r_{TUij} = q_i$. Обозначим через $\mathcal{H}(P^{(2)})_{Q^{(1)}}$ минимум величин $\mathcal{I}(R^{(2)})$ по всем матрицам $R^{(2)}$, согласованным с $P^{(2)}$ при ограничении $Q^{(1)}$. Нетрудно видеть, что минимум достижим.

**Лемма 5**. *Величина $\mathcal{H}(P^{(2)})_{Q^{(1)}}$, рассматриваемая как функция от $Q^{(1)}$ (при фиксированном $P^{(2)}$), выпукла по $Q^{(1)}$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 4 и мы его опускаем. Как и в случае леммы 4 имеет место

**Следствие 8**. *Величина $\mathcal{H}(P^{(2)})_{Q^{(1)}}$, рассматриваемая как функция от $Q^{(1)}$, непрерывна во внутренних точках $Q^{(1)}$ области определения.*

Введём функционал $h_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{s}} = l\,\mathcal{H}(\mathbf{l}(\mathbf{a}, \mathbf{b})/l)_{(\mathbf{s}/l)}$.

**Теорема 7**. *Существуют такие $c_1 = c_1(m)$ и $c_2 = c_2(m)$, что $h_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{s}} - c_1 \log l \leqslant \log N_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{s}} \leqslant h_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{s}} + c_2 \log l$.*

Доказательство этой теоремы проводится по схеме доказательства теоремы  и мы его опускаем. Некоторое усложнение рассуждений возникает лишь в связи с тем, что ограничение касается не всего доопределения $(\hat{\mathbf{a}}', \hat{\mathbf{b}}')$, а его части $\hat{\mathbf{a}}'$.

Аналогом следствия 7 является

**Следствие 9**. *Если $\mathcal{B}_l \subseteq \mathcal{K}_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $|\mathcal{K}_l(\mathbf{l})|/|\mathcal{B}_l| \leqslant l^c$, то комбинаторная энтропия $\log N(\mathcal{B}_l)_{\mathbf{s}}$ класса $\mathcal{B}_l$ при ограничении* $\mathbf{s}$ *удовлетворяет оценкам $h_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{s}} - c' \log l \leqslant \log N(\mathcal{B}_l)_{\mathbf{s}} \leqslant h_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{s}} + c'' \log l$.*

## 7. Частотные характеристики доопределений

Обозначим через $\mathcal{D}_l(\mathbf{l})$ некоторое доопределяющее множество для класса $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$. Доопределение $\mathcal{D}_l(\mathbf{l})$ назовём *асимптотически наилучшим*, если $\log |\mathcal{D}_l(\mathbf{l})| \sim \log N_l(\mathbf{l})$ при $l \to \infty$. В этом разделе исследуются частоты символов $a_i$, $i \in M$, в чётких последовательностях, образующих асимптотически наилучшее доопределение.

**Лемма 6**. *Для любого* $P = (p_T,\ T \subseteq M)$, *где* $p_T \geqslant 0$ *и* $\sum\limits_T p_T = 1$, *и любого* $Q = (q_i,\ i \in M)$, *где* $q_i \geqslant 0$ *и* $\sum\limits_i q_i = 1$, *справедливо неравенство* $\mathcal{H}(P)_Q \geqslant \mathcal{H}(P,Q)$. *Если* $Q^0$ — *точка минимума функции* $\mathcal{H}(P,Q)$, *то*

$$\mathcal{H}(P)_{Q^0} = \mathcal{H}(P,Q^0).$$

Доказательство. Пусть значение $\mathcal{H}(P)_Q$ достигается на матрице $R = \|r_{Ti}\|$. Её элементы удовлетворяют соотношениям $\sum\limits_i r_{Ti} = p_T$, $\sum\limits_T r_{Ti} = q_i$.

Воспользовавшись для выпуклой функции $f(x) = x\log x$ неравенством Иенсена $\sum\limits_i \alpha_i f(x_i) \geqslant f(\sum\limits_i \alpha_i x_i)$ при $\alpha_i = q_i \big/ \sum\limits_{j\in T} q_j$ и $x_i = r_{Ti}/(p_T q_i)$, при заданном $T$ с учётом $r_{Ti} = 0$ при $i \notin T$, получаем

$$\sum_i r_{Ti}\log\frac{r_{Ti}}{p_T q_i} = p_T\left(\sum_{j\in T} q_j\right)\sum_i \frac{q_i}{\sum\limits_{j\in T} q_j}\frac{r_{Ti}}{p_T q_i}\log\frac{r_{Ti}}{p_T q_i} \geqslant p_T\log\frac{1}{\sum\limits_{j\in T} q_j}.$$

Просуммировав эти неравенства по $T$, получаем, что $\mathcal{H}(P)_Q \geqslant \mathcal{H}(P,Q)$.

Теперь рассмотрим набор $Q^0 = (q_0^0, q_1^0, \ldots, q_{m-1}^0)$, на котором достигается минимум функции $\mathcal{H}(P,Q)$. Введём матрицу $R = \|r_{Ti}\|$, положив $r_{Ti} = p_T q_i^0 \big/ \sum\limits_{j\in T} q_j^0$ при $i \in T$ и $r_{Ti} = 0$ при $i \notin T$. Убедимся в том, что матрица $R$ согласована с набором $P$ при ограничении $Q^0$. По лемме 1 набор $Q^0$ удовлетворяет неравенствам (1) (при $q_i = q_i^0$). Поскольку равенства могут нарушаться лишь при нулевых $q_i^0$, домножив обе части на $q_i^0$, получаем равенства $\sum\limits_{T:\, i\in T}\dfrac{p_T q_i^0}{\sum\limits_{j\in T} q_j^0} = q_i^0$, которые с учётом определения величин $r_{Ti}$ приобретают вид $\sum\limits_T r_{Ti} = q_i^0$. Равенства $\sum\limits_i r_{Ti} = p_T$ очевидным образом следуют из определения $r_{Ti}$. Отсюда

$$\mathcal{H}(P)_{Q^0} \leqslant \mathcal{I}(R) = \sum_{T,i} r_{Ti}\log\frac{r_{Ti}}{p_T q_i^0} = \sum_{T,i} r_{Ti}\log\frac{1}{\sum\limits_{j\in T} q_j^0} = \mathcal{H}(P,Q^0).$$

Лемма 6 доказана.

**Следствие 10**. *Справедливо неравенство* $h_l(\mathbf{l})_{\mathbf{s}} \geqslant l\,\mathcal{H}(\mathbf{l}/l, \mathbf{s}/l)$.

Дальнейшие рассуждения будем вести для случая, когда набор частот $P = \mathbf{l}/l = (p_T, T \subseteq M)$ символов в последовательностях класса $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ постоянен и $l \to \infty$. Будем рассматривать нетривиальный случай $\mathcal{H}(P) > 0$. Считаем, что компоненты $l_T$ набора $\mathbf{l}$ получаются округлением до целого (большего либо меньшего) значений $p_T l$ с соблюдением условия $\sum\limits_T l_T = l$. Поскольку изменение $l_T$ не более чем на 1 изменяет значение функционалов $h_l(\mathbf{l})$ и $h_l(\mathbf{l})_\mathbf{s}$ на $O(\log l)$, то при замене в них набора частот $\mathbf{l}/l$ на $P$ все полученные выше соотношения, связывающие эти функционалы с соответствующей комбинаторной энтропией, сохранятся.

Рассмотрим некоторое доопределение $\mathcal{D}_l(\mathbf{l})$ класса $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$. С каждой последовательностью $\mathbf{a} \in \mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ свяжем какое-либо её доопределение $\hat{\mathbf{a}} \in \mathcal{D}_l(\mathbf{l})$. Обозначим через $\mathbf{s}(\mathbf{a})$ набор параметров $(s_0, \ldots, s_{m-1})$ доопределения $\hat{\mathbf{a}}$. Будем (для определённости) измерять расстояние между наборами $Q = (q_0, \ldots, q_{m-1})$ и $Q' = (q'_0, \ldots, q'_{m-1})$ в равномерной метрике:

$$d(Q, Q') = \max_i |q_i - q'_i|.$$

**Теорема 8**. *Если $\mathcal{H}(P, Q)$ как функция от $Q$ имеет единственную точку минимума $Q_0$ и $\mathcal{D}_l(\mathbf{l})$ — асимптотически наилучшее доопределение класса $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$, то для любых положительных $\varepsilon$ и $c$ доля последовательностей $\mathbf{a}$ класса $\mathcal{K}_l(\mathbf{l})$, для которых $d(\mathbf{s}(\mathbf{a})/l, Q_0) \geqslant \varepsilon$, не превосходит $l^{-c}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех $\mathbf{a} \in \mathcal{K}_l(\mathbf{l})$ таких, что $d(\mathbf{s}(\mathbf{a})/l, Q_0) \geqslant \varepsilon$. Предположим, что теорема неверна и для некоторого $c > 0$ имеет место неравенство $|\mathcal{A}| \geqslant l^{-c}|\mathcal{K}_l(\mathbf{l})|$. Поскольку набор $\mathbf{s}$ принимает не более $l^m$ значений, найдётся $\mathbf{s}$, для которого мощность множества $\mathcal{B}$, образованного наборами $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ с $\mathbf{s}(\mathbf{a}) = \mathbf{s}$ , не меньше $l^{-c-m}|\mathcal{K}_l(\mathbf{l})|$. В силу следствий 7 и 10 $\mathbf{s}$-ограниченная комбинаторная энтропия класса $\mathcal{B}$ удовлетворяет оценкам

$$\log N_l(\mathcal{B})_\mathbf{s} \geqslant h_l(\mathbf{l})_\mathbf{s} - c' \log l \geqslant l\,\mathcal{H}(P, \mathbf{s}/l) - c'' \log l. \qquad (14)$$

Функция $\mathcal{H}(P, Q)$ выпукла по $Q$ и имеет единственную точку минимума $Q_0$. Поэтому найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $Q$ с $d(Q, Q_0) \geqslant \varepsilon$ справедливо неравенство $\mathcal{H}(P, Q) \geqslant \mathcal{H}(P, Q_0) + \delta = \mathcal{H}(P) + \delta$. Отсюда и из (14) получаем оценку $\log N_l(\mathcal{B})_\mathbf{s} \geqslant l(\mathcal{H}(P) + \delta) - c'' \log l$.

Так как доопределения последовательностей $\mathbf{a} \in \mathcal{B}$ имеют параметры $\mathbf{s}$ и входят в состав $\mathcal{D}_l(\mathbf{l})$, то

$$\log |\mathcal{D}_l(\mathbf{l})| \geqslant \log N_l(\mathcal{B})_\mathbf{s} \geqslant l(\mathcal{H}(P) + \delta) - c'' \log l. \qquad (15)$$

С другой стороны, поскольку доопределение $\mathcal{D}_l(\mathbf{l})$ асимптотически минимально, с учётом теоремы 1 имеем

$$\log|\mathcal{D}_l(\mathbf{l})| \sim \log N_l(\mathbf{l}) \sim l\mathcal{H}(P).$$

Это противоречит (15). Теорема 8 доказана.

В дальнейшем понадобится аналог леммы 6 для двумерного случая. Для наборов $P^{(2)} = (p_{TU},\ T \subseteq M, U \subseteq L)$, где $p_{TU} \geqslant 0$ и $\sum\limits_{T,U} p_{TU} = 1$, и $Q^{(2)} = (q_{ij},\ i \in M, j \in L)$, где $q_{ij} \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i,j} q_{ij} = 1$, функция $\mathcal{H}(P,Q)$ приобретает вид $\mathcal{H}(P^{(2)},Q^{(2)}) = -\sum\limits_{T,U} p_{TU} \log \sum\limits_{i\in T, j\in U} q_{ij}$. Будем говорить, что *набор* $Q^{(2)}$ *согласован с* $Q^{(1)} = (q_i,\ i \in T)$, если $\sum\limits_j q_{ij} = q_i$.

**Лемма 7**. *Справедливо неравенство*

$$\mathcal{H}(P^{(2)})_{Q^{(1)}} \geqslant \min\{\mathcal{H}(P^{(2)},Q^{(2)}) \mid Q^{(2)} \text{ согласован с } Q^{(1)}\}.$$

Доказательство. Пусть значение $\mathcal{H}(P^{(2)})_{Q^{(1)}}$ достигается на матрице $R^{(2)} = \|r_{TUij}\|$. Положим $q_{ij} = \sum\limits_{T,U} r_{TUij}$. В силу условия $\sum\limits_j q_{ij} = q_i$, накладываемого на матрицу $R^{(2)}$, набор $Q^{(2)} = (q_{ij})$ согласован с $Q^{(1)}$. Далее доказательство завершается как в лемме 6.

## 8. Нижние оценки сложности последовательной реализации

Применительно к паре функций $(f,g)$ введённые ранее для $(F,g)$ наборы параметров принимают вид $\mathbf{l}(f,g) = (l_{\alpha\beta},\ \alpha,\beta \in \{0,1,*\})$, $P(f,g) = (p_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}2^{-n},\ \alpha,\beta \in \{0,1,*\})$. Будем рассматривать последовательность пар $(f,g) = (f_n,g_n)$ частичных функций *с фиксированным набором частот* $P(f,g)$ при растущем числе переменных $n$. Считаем, что параметры $l_{\alpha\beta}$ получаются округлением величин $p_{\alpha\beta}2^n$ до целого с соблюдением соотношения $\sum\limits_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} = 2^n$. Параметры $P(f) = (p_\alpha,\ \alpha \in \{0,1,*\})$ и $\mathbf{l}(f) = (l_\alpha,\ \alpha \in \{0,1,*\})$ функции $f$ находятся суммированием параметров для $(f,g)$: $p_\alpha = \sum\limits_\beta p_{\alpha\beta}$, , $l_\alpha = \sum\limits_\beta l_{\alpha\beta}$.

Для $\alpha \in \{0,1,*\}$, $\mu \in \{0,1\}$ запись $\alpha \succeq \mu$ означает, что $\mu$ является доопределением $\alpha$. Считая $f$ и $g$ нечёткими последовательностями, можно подобно $h_l(\mathbf{a},\mathbf{b})$ ввести функционал $h_n(f,g) = 2^n \min\limits_Q \mathcal{H}(P(f,g),Q)$, где

$$\mathcal{H}(P(f,g),Q) = -\sum_{\alpha,\beta\in\{0,1,*\}} p_{\alpha\beta} \log \sum_{\mu\preceq\alpha,\nu\preceq\beta} q_{\mu\nu}, \quad Q = (q_{00},q_{01},q_{10},q_{11}).$$

В предположении постоянства набора $P(f,g)$ справедлива оценка (2).

**Лемма 8**. *Если компоненты набора $P(f) = (p_0, p_1, p_*)$ удовлетворяют условию $p_0 + p_1 > 0$, то минимум функции $\mathcal{H}(P(f), Q)$ по $Q = (q_0, q_1)$ достигается в единственной точке $Q(f) = (p_0/(1-p_*), p_1/(1-p_*))$.*

Доказательство. Пусть для определённости $p_0 > 0$. Тогда $q_0 > 0$ и соотношение из (1), относящееся к $q_0$, приобретает вид $p_0/q_0 + p_*/(q_0 + q_1) = 1$. Учитывая равенство $q_0 + q_1 = 1$, получаем $q_0 = p_0/(1-p_*)$ и $q_1 = 1 - q_0 = p_1/(1-p_*)$. Лемма 8 доказана.

Дальше будем рассматривать нетривиальный случай, когда $p_0$, $p_1 > 0$ (иначе $f$ доопределима до константы). Тогда обе компоненты набора $Q(f)$ из леммы 8 положительны.

Величина $\mathcal{H}(P(f,g))_{Q(f)}$, являясь частным случаем величины $\mathcal{H}(P^{(2)})_{Q^{(1)}}$, представляет собой минимум функции

$$\mathcal{I}(R^{(2)}) = \sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu} r_{\alpha\beta\mu\nu} \log \frac{r_{\alpha\beta\mu\nu}}{\sum\limits_{\alpha,\beta} r_{\alpha\beta\mu\nu} \sum\limits_{\mu,\nu} r_{\alpha\beta\mu\nu}}$$

по всем матрицам $R^{(2)} = \|r_{\alpha\beta\mu\nu}\|$, в которых строки соответствуют парам $\alpha\beta$ ($\alpha, \beta \in \{0,1,*\}$), столбцы — парам $\mu\nu$ ($\mu, \nu \in \{0,1\}$), элементы матриц $R^{(2)}$ удовлетворяют условиям $r_{\alpha\beta\mu\nu} \geqslant 0$, $r_{\alpha\beta\mu\nu} > 0 \Rightarrow (\mu \preceq \alpha, \nu \preceq \beta)$, $\sum\limits_{\alpha,\beta,\mu,\nu} r_{\alpha\beta\mu\nu} = 1$, $\sum\limits_{\mu,\nu} r_{\alpha\beta\mu\nu} = p_{\alpha\beta}$, $\sum\limits_{\alpha,\beta,\nu} r_{\alpha\beta\mu\nu} = p_\mu/(1-p_*)$. Положим $h_n(f,g)_{Q(f)} = 2^n \mathcal{H}(f,g)_{Q(f)}$.

Напомним, что рассматриваются пары $(f,g) = (f_n, g_n)$ с фиксированным набором частот $P(f,g)$ и с положительными компонентами $p_0$ и $p_1$ набора $P(f)$.

**Теорема 9**. *При $t(n) \sim L(n,f)$ справедлива оценка*

$$L_{t(n)}(n,f,g) \gtrsim \rho \frac{h_n(f,g)_{Q(f)}}{\log h_n(f,g)_{Q(f)}} \tag{16}$$

*и для любого $\varepsilon > 0$ доля систем $(f', g') \in \mathcal{K}_n(f,g)$ с*

$$L_{t(n)}(f', g') \leqslant (1-\varepsilon) \rho \frac{h_n(f,g)_{Q(f)}}{\log h_n(f,g)_{Q(f)}} \tag{17}$$

*стремится к 0 с ростом $n$.*

Доказательство. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. В силу положительности компонент $p_0$ и $p_1$ набора $P(f)$ точка $Q(f)$ минимума функции $\mathcal{H}(P(f), Q)$ по лемме 8 единственна и является внутренней точкой области определения (отрезка с концами (0,1) и (1,0)). По следствию 6 функция $\mathcal{H}(P(f))_Q$ непрерывна в точке $Q(f)$ и найдётся такое $\delta > 0$, что для всех $Q$ с $d(Q, Q(f)) \leqslant \delta$ выполнено

$$\mathcal{H}(P(f,g))_Q \geqslant \mathcal{H}(P(f,g))_{Q(f)} - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18}$$

Для всякой пары $(f', g') \in \mathcal{K}_n(f,g)$ возьмём реализующую её схему $S_{f',g'}$ сложности $L_{t(n)}(f',g')$, содержащую подсхему $S_{f'}$ для $f'$ с $L(S_{f'}) \leqslant t(n)$. Схемы $S_{f',g'}$ задают множество $\mathcal{D}_n^{(2)}(f,g)$ доопределений $(\hat{f}', \hat{g}')$ пар $(f',g') \in \mathcal{K}_n(f,g)$. Каждая функция $f' \in \mathcal{K}_n(f)$, участвуя в нескольких парах $(f',g')$, получает в $\mathcal{D}_n^{(2)}(f,g)$ несколько доопределений. Выделим одно из них, для которого расстояние $d(Q_{\hat{f}'}, Q(f))$ максимально. Здесь $Q_{\hat{f}'} = (l_0(\hat{f}')2^{-n}, l_1(\hat{f}')2^{-n})$, где $l_0(\hat{f}')$ и $l_1(\hat{f}')$ — числа нулевых и единичных значений функции $\hat{f}'$. Совокупность выделенных доопределений для всех функций из $\mathcal{K}_n(f)$ обозначим через $\mathcal{D}_n^{(1)}(f)$.

В силу условий теоремы и равенства (3) справедливо соотношение $t(n) \sim L(n,f) \sim \rho \dfrac{h_n(f)}{\log h_n(f)}$. Отсюда и из мощностных соображений [4] следует, что $\log |\mathcal{D}_n^{(1)}(f)| \sim h_n(f)$, а согласно теореме 1 доопределение $\mathcal{D}_n^{(1)}(f)$ из класса $\mathcal{K}_n(f)$ является асимптотически наилучшим. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех функций $f'$ класса $\mathcal{K}_n(f)$, доопределения $\hat{f}'$ которых, взятые из $\mathcal{D}_n^{(1)}(f)$, удовлетворяют условию

$$d(Q_{\hat{f}'}, Q(f)) \leqslant \delta. \tag{19}$$

По теореме 8 имеем $|\mathcal{A}| \geqslant |\mathcal{K}_n(f)|(1 - 2^{-2n})$.

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех пар $(f',g') \in \mathcal{K}_n(f,g)$ таких, что $f' \in \mathcal{A}$. Число пар $(f',g') \in \mathcal{K}_n(f,g)$ с участием функции $f' \in \mathcal{K}_n(f)$ одинаково для всех $f'$, поэтому $|\mathcal{B}| \geqslant |\mathcal{K}_n(f,g)|(1 - 2^{-2n})$. Доопределения всех пар $(f',g') \in \mathcal{B}$, взятые из $\mathcal{D}_n^{(2)}(f,g)$, по построению множества $\mathcal{D}_n^{(1)}(f)$ удовлетворяют условию (19).

Обозначим через $\mathcal{C}$ множество таких пар $(f',g')$ из класса $\mathcal{K}_n(f,g)$, что

$$L(S_{f',g'}) \leqslant (1-\varepsilon)\rho \frac{h_n(f,g)_{Q(f)}}{\log h_n(f,g)_{Q(f)}}. \tag{20}$$

Покажем, что

$$|\mathcal{C}| < |\mathcal{K}_n(f,g)| 2^{-n}. \tag{21}$$

Предположим, что $|\mathcal{C}| \geqslant |\mathcal{K}_n(f,g)|2^{-n}$. Тогда мощность множества $\mathcal{F} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ удовлетворяет оценке: $|\mathcal{F}| \geqslant |\mathcal{K}_n(f,g)|2^{-2n}$. Для $\mathbf{s} = (s_0, s_1)$,

$s_0 + s_1 = 2^n$, обозначим через $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$ множество всех пар $(f', g') \in \mathcal{F}$, для которых $(l_0(\hat{f}'), l_1(\hat{f}')) = \mathbf{s}$, где $(\hat{f}', \hat{g}') \in \mathcal{D}_n^{(2)}(f, g)$. Поскольку $\mathbf{s}$ может принимать не более $2^n + 1 \leqslant 2^{2n}$ значений, найдётся множество $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_{\mathbf{s}}$ такое, что

$$|\mathcal{F}'| \geqslant |\mathcal{F}| 2^{-2n} \geqslant |\mathcal{K}_n(f, g)| 2^{-4n}.$$

По следствию 9 получаем $N(\mathcal{F}')_{\mathbf{s}} \geqslant h_n(f, g)_{\mathbf{s}} - c''n$. В силу мощностных соображений отсюда следует существование пар $(f', g') \in \mathcal{F}'$, для которых

$$L(S_{f',g'}) \gtrsim \rho \frac{h_n(f, g)_{\mathbf{s}}}{\log h_n(f, g)_{\mathbf{s}}}. \tag{22}$$

Набор $\mathbf{s}$ соответствует параметрам доопределений функций из $\mathcal{A}$, а потому в силу (19) удовлетворяет условию $|2^{-n}\mathbf{s} - Q(f)| \leqslant \delta$. Согласно (18) выполнено неравенство $\mathcal{H}(P(f, g))_{(2^{-n}\mathbf{s})} > \mathcal{H}(P(f))_{Q(f)} - \varepsilon/2$. Отсюда и из (22) следует, что

$$L(S_{f',g'}) \gtrsim (1 - \frac{\varepsilon}{2}) \rho \frac{h_n(f, g)_{Q(f)}}{\log h_n(f, g)_{Q(f)}}.$$

С учётом $(f', g') \in \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{C}$ это противоречит (20). Поэтому справедливо неравенство (21), из которого следует, что (17) может иметь место лишь для малой доли функций из $\mathcal{K}_n(f, g)$. В силу произвольности $\varepsilon$ выполнено (16). Теорема 9 доказана.

В следующем разделе будут приведены примеры, когда оценка теоремы 9 достижима и даёт величину, превосходящую $L(n, f, g)$.

**Теорема 10**. *Если среди точек $Q^{(2)}$ минимума функции $\mathcal{H}(P(f, g), Q^{(2)})$ нет согласованных с $Q(f)$ и $t(n) \sim L(n, f)$, то найдётся $\gamma > 0$ такое, что для почти всех пар $(f', g') \in \mathcal{K}_n(f, g)$ выполнено неравенство*

$$L_{t(n)}(f', g') \geqslant (1 + \gamma) L(n, f, g).$$

Доказательство. Пусть минимум $\mathcal{H}(P(f, g), Q^{(2)})$ по наборм $Q^{(2)}$, согласованным с $Q(f)$, достигается на $Q_0^{(2)}$. В силу условий теоремы имеем

$$\mathcal{H}(P(f, g), Q_0^{(2)}) > \min_{Q^{(2)}} \mathcal{H}(P(f, g), Q^{(2)}) = \mathcal{H}(P(f, g)),$$

откуда по лемме 7

$$\mathcal{H}(P(f, g))_{Q(f)} \geqslant \mathcal{H}(P(f, g), Q_0^{(2)}) > \mathcal{H}(P(f, g)).$$

Поскольку члены этого неравенства не зависят от $n$, домножив обе части на $2^n$, при некотором $\gamma > 0$ получаем

$$h_n(f,g)_{2^n Q(f)} \geqslant (1+\gamma) h_n(f,g)$$

Остается воспользоваться теоремой 9 и оценкой (2). Теорема 10 доказана.

В примере 2 из следующего раздела будет показано, что условия теоремы 10 ослабить нельзя, в примере 3 будет описан класс систем некоторого вида, для которых условия теоремы 10, приводящие к повышению сложности последовательной реализации, выполнены почти всегда. Кроме того, из этих примеров будет следовать, что если $f$ конкретнее $g$, то при последовательной реализации в порядке $(g,f)$ сложность, вообще говоря, выше, чем в порядке $(f,g)$.

## 9. Примеры применения оценок

Введём функцию $L(h) = \rho \dfrac{h}{\log h}$ и положим $L_n = L(2^n)$. В возникающих в данной статье оценках сложности параметр $h$ имеет вид $h = \mathcal{H}2^n$, где $\mathcal{H}$ — энтропия некоторого типа (условная, безусловная, ограниченная). Поскольку $L(\mathcal{H}2^n)$ монотонно зависит от $\mathcal{H}$, сравнение сложностей можно заменить сравнением энтропий, а в силу соотношения $L(\mathcal{H}_1 2^n) + L(\mathcal{H}_2 2^n) \sim L((\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2)2^n)$ при асимптотических рассмотрениях суммирование сложностей можно заменить суммированием энтропий. Будем иметь дело со случаем, когда $\mathcal{H} = \mathrm{const}$. Тогда $L(\mathcal{H}2^n) \sim \mathcal{H} L_n$ и оценки сложности имеют вид $cL_n$, где константой $c$ является энтропия.

**Пример 1.** Пусть паре функций $(f,g) = (f_n, g_n)$ соответствует набор частот $P(f,g)$, в котором $p_{00}$, $p_{11}$, $p_{1*}$ положительны и $p_{\alpha\beta} = 0$ для остальных $(\alpha,\beta)$. Параметрами функции $f$ являются $p_0 = p_{00}$, $p_1 = p_{10} + p_{1*} = 1 - p_{00}$. Функция $g$ доопределима до $f$. Поэтому

$$\mathcal{H}(f,g) = \mathcal{H}(f) = H(p_{00}, 1-p_{00}) = -p_{00}\log p_{00} - (1-p_{00})\log(1-p_{00}).$$

Эта величина характеризует сложность совместной реализации $f$ и $g$, которая одновременно является сложностью последовательной реализации в порядке $(f,g)$. Рассмотрим теперь последовательную реализацию в обратном порядке $(g,f)$. По лемме 8 имеем $Q(g) = \big(\dfrac{p_{00}}{1-p_{1*}}, \dfrac{p_{11}}{1-p_{1*}}\big)$. Имеется единственный согласованный с $Q(g)$ набор $Q^{(2)}$, где $q_{00} = p_{00}$, $q_{01} = 0$, $q_{10} = \dfrac{p_{00}p_{1*}}{1-p_{1*}}$, $q_{11} = \dfrac{p_{11}}{1-p_{1*}}$. Из теоремы 9 и леммы 7 следует, что для упрощённой оценки снизу сложности последовательной реализации в порядке $(g, f)$ можно использовать величину

$$\mathcal{H}(P(f,g), Q^{(2)}) = -p_{00}\log p_{00} - p_{11}\log\frac{p_{11}}{1-p_{1*}} - p_{1*}\log(1-p_{00}).$$

Рассмотрим разность $\Delta_1 = \mathcal{H}(P(f,g), Q^{(2)}) - \mathcal{H}(f,g)$. С учётом $p_{11} = 1 - p_{00} - p_{1*}$ она преобразуется к виду

$$\Delta_1 = p_{11}\log\frac{(1-p_{00})(1-p_{1*})}{p_{11}} = p_{11}\log\frac{p_{11}+p_{00}p_{1*}}{p_{11}}$$

и потому положительна. Это означает, что сложность последовательной реализации $(g, f)$ асимптотически выше сложности совместной реализации.

Теперь воспользуемся оценкой теоремы 9. Имеется единственная матрица $R^{(2)}$, согласованная с $P(f,g)$ и ограниченная набором $Q(g)$. Её ненулевыми элементами $r_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ являются $r_{00,00} = p_{00}$, $r_{11,11} = p_{11}$, $r_{1*,10} = \dfrac{p_{00}p_{1*}}{1-p_{1*}}$, $r_{1*,11} = \dfrac{p_{11}p_{1*}}{1-p_{1*}}$. Выполнив соответствующие выкладки, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(P(f,g))_{Q(g)} &= \mathcal{I}(R^{(2)}) \\ &= -p_{00}\log p_{00} - p_{11}\log\frac{p_{11}}{1-p_{1*}} - \frac{p_{00}p_{1*}}{1-p_{1*}}\log p_{1*}. \qquad (23)\end{aligned}$$

Образуем разность

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \mathcal{H}(P(f,g))_{Q(g)} - \mathcal{H}(P(f,g), Q^{(2)}) \\ &= p_{00}p_{1*}\left(-\frac{\log p_{1*}}{1-p_{1*}} + \frac{\log(1-p_{00})}{p_{00}}\right).\end{aligned}$$

Стандартными методами нетрудно убедиться, что функция $\dfrac{\log x}{1-x}$ возрастает на $(0,1)$. Отсюда и из неравенства $1 - p_{00} > p_{1*}$ следует, что $\Delta_2 > 0$. Это означает, что нижняя оценка теоремы 9 выше упрощённой оценки и, следовательно, является более точной.

Покажем, что оценка из теоремы 9 достижима. Пусть $(f', g')$ — произвольная пара из $\mathcal{K}_n(f,g)$. Реализуем её последовательно в порядке $(g', f')$. Для этого сначала построим асимптотически наилучшую схему $S_1$ для $g'$, затем методом теоремы  — схему $S_2$, реализующую $f'$ относительно доопределения $\hat{g}'$, даваемого схемой $S_1$. Сложность схемы $S_1$ определяется энтропией

$$\mathcal{H}(g') = (1-p_{1*})H\big(\frac{p_{00}}{1-p_{1*}}, \frac{p_{11}}{1-p_{1*}}\big). \qquad (24)$$

Для почти всех $g'$ набор частот $P(\hat{g}')$ доопределения асимптотически совпадает с $Q(g)$ (см. доказательство теоремы 9). Для них

$$\mathcal{H}(f'|\hat{g}') \sim \frac{p_{00}}{1-p_{1*}} H(1-p_{1*}, p_{1*}). \tag{25}$$

Нетрудно проверить, что сумма оценок (24) и (25) преобразуется к виду (23). Отсюда следует, что для почти всех пар $(f', g') \in \mathcal{K}_n(f, g)$ верхняя оценка сложности последовательной реализации в порядке $(g', f')$ асимптотически совпадает с нижней оценкой теоремы 9.

Для иллюстрации рассмотрим случай $p_{00} = p_{11} = \frac{1}{4}$, $p_{1*} = \frac{1}{2}$. Константа $c$ в асимптотической оценке $cL_n$ сложности последовательной реализации при упорядочении $(f, g)$ имеет вид $2 - \frac{\log 3}{4} \approx 0{,}815$, в упрощённой нижней оценке сложности при упорядочении $(g, f)$ — вид $\frac{7}{4} - \frac{\log 3}{2} \approx 0{,}96$, в достижимой оценке теоремы 9 равна 1.

**Пример 2.** Пусть паре функций $(f, g) = (f_n, g_n)$ соответствует набор частот $P(f, g)$, в котором $p_{00}$, $p_{10}$, $p_{*1}$ положительны и $p_{\alpha\beta} = 0$ для остальных $(\alpha, \beta)$. Функция $f$ имеет параметры $p_0 = p_{00}$, $p_1 = p_{10}$ и $p_* = p_{*1}$. По лемме 8 единственной точкой минимума функции $\mathcal{H}(P(f, g), Q)$ является $Q(f) = \bigl(\frac{p_{00}}{1-p_{*1}}, \frac{p_{10}}{1-p_{*1}}\bigr)$. Решив систему (1), можно убедиться, что множество точек минимума функции $\mathcal{H}(P(f, g), Q^{(2)})$ образуется наборами $Q_\theta^{(2)}$, $0 \leqslant \theta \leqslant p_{*1}$, с компонентами $q_{00} = p_{00}$, $q_{10} = p_{10}$, $q_{01} = \theta$, $q_{11} = p_{*1} - \theta$. Среди них имеется единственный набор, согласованный с $Q(f)$. Он отвечает значению $\theta = \dfrac{p_{00}p_{*1}}{1-p_{*1}}$. Функция $g$ конкретнее $f$ и в силу теоремы 2

$$\mathcal{H}(f, g) = \mathcal{H}(g) + \mathcal{H}(f|g) = H(1-p_{*1}, p_{*1}) + (1-p_{*1}) H\Bigl(\frac{p_{00}}{1-p_{*1}}, \frac{p_{10}}{1-p_{*1}}\Bigr).$$

Рассмотрим последовательную реализацию произвольной пары $(f', g') \in \mathcal{K}_n(f, g)$. Сложность реализации $f'$ характеризуется энтропией

$$\mathcal{H}(f') = (1-p_{*1}) H\Bigl(\frac{p_{00}}{1-p_{*1}}, \frac{p_{10}}{1-p_{*1}}\Bigr).$$

Как и в предыдущем примере, набор частот доопределения $P(\hat{f}')$ почти всегда асимптотически совпадает с $Q(f) = \bigl(\frac{p_{00}}{1-p_{*1}}, \frac{p_{10}}{1-p_{*1}}\bigr)$, и сложность реализации $g'$ относительно $\hat{f}'$ будет определяться условной энтропией

$$\mathcal{H}(g'|\hat{f}') \sim \frac{p_{00}}{1-p_{*1}} H(p_{*1}, 1-p_{*1}) + \frac{p_{10}}{1-p_{*1}} H(1-p_{*1}, p_{*1})\bigr) = H(p_{*1}, 1-p_{*1}).$$

Сумма этих оценок асимптотически равна $\mathcal{H}(f,g)$. Следовательно, для почти всех пар $(f',g')$ из $\mathcal{K}_n(f,g)$ последовательные реализации (в любом порядке) дают асимптотически ту же сложность, что и совместная реализация. Это показывает, что условия теоремы 10 ослабить нельзя: при наличии среди точек минимума функции $\mathcal{H}(P(f,g),Q^{(2)})$ хотя бы одной, согласованной с $Q(f)$, асимптотического увеличения сложности при последовательной реализации может не произойти.

**Пример 3.** Этот пример относится к системам $(f,g)$ такого вида, что $f$ конкретнее $g$, и показывает, что в «типичной ситуации» системы $(g,f)$ удовлетворяют условиям теоремы 10 и при последовательной реализации в этом порядке их сложность выше, чем в порядке $(f,g)$.

Пусть паре функций $(f,g)=(f_n,g_n)$ соответствует набор частот $P(f,g)$, в котором $p_{00}$, $p_{01}$, $p_{10}$, $p_{11}$ и $p_{0*}$ положительны, а остальные равны 0. Покажем, что наборы $Q^{(2)}(f,g)=(q_{00},q_{01},q_{10},q_{11})$ и $Q(g)=(q_0,q_1)$ согласованы тогда и только тогда, когда $p_{00}p_{11}=p_{01}p_{10}$.

В соответствии с леммой 8 компонентами набора $Q(g)$ являются $q_\sigma=\dfrac{p_{0\sigma}+p_{1\sigma}}{1-p_{0*}}$ $(\sigma\in\{0,1\})$. Компонентами набора $Q^{(2)}(f,g)$ является решение системы уравнений

$$\frac{p_{0\sigma}}{q_{0\sigma}}+\frac{p_{0*}}{q_{00}+q_{01}}=1,\qquad \frac{p_{1\sigma}}{q_{1\sigma}}=1\quad(\sigma\in\{0,1\}).$$

Решая эту систему уравнений, получаем $q_{1\sigma}=p_{1\sigma}$, $q_{0\sigma}=\alpha p_{0\sigma}$, $\sigma\in\{0,1\}$, где $\alpha=\dfrac{1-p_{10}-p_{11}}{p_{00}+p_{01}}$. Для $\sigma\in\{0,1\}$ положим $q'_\sigma=q_{0\sigma}+q_{1\sigma}=\alpha p_{0\sigma}+p_{1\sigma}$. Если $Q(g)$ и $Q^{(2)}(f,g)$ согласованны, то $q'_\sigma=q_\sigma$ и $\dfrac{q'_0}{q'_1}=\dfrac{q_0}{q_1}$. Отсюда с учётом свойств отношений получаем

$$\frac{\alpha p_{00}+p_{10}}{\alpha p_{01}+p_{11}}=\frac{p_{00}+p_{10}}{p_{01}+p_{11}}=\frac{(1-\alpha)p_{00}}{(1-\alpha)p_{01}}=\frac{p_{00}}{p_{01}}=\frac{p_{10}}{p_{11}}.$$

Следовательно, $p_{00}p_{11}=p_{01}p_{10}$.

Обратно, если выполнено равенство $p_{00}p_{11}=p_{01}p_{10}$, то, обозначив через $\beta$ отношение $\dfrac{p_{01}}{p_{00}}$, получаем $p_{01}=\beta p_{00}$, $p_{10}=\beta p_{11}$. Поэтому

$$q'_0=q_{00}+q_{01}=\frac{p_{00}(1-p_{10}-p_{11})}{p_{00}+p_{01}}+p_{10}=\\ \frac{p_{00}+(p_{10}p_{01}-p_{00}p_{11})}{p_{00}+p_{01}}=\frac{p_{00}}{p_{00}+p_{01}}=\frac{1}{1+\beta}.$$

С другой стороны,

$$q_0 = \frac{p_{00} + p_{10}}{p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11}} = \frac{p_{00} + p_{10}}{(p_{00} + p_{10}) + \beta(p_{00} + p_{10})} = \frac{1}{1 + \beta}.$$

Следовательно, $q_0' = q_0$, и наборы $Q(g)$ и $Q^{(2)}(f, g)$ согласованны.

Функция $f$ конкретнее $g$. Поэтому сложность последовательной реализации пар $(f', g') \in \mathcal{K}_n(f, g)$ асимптотически совпадает со сложностью совместной реализации. Согласно теореме 10 в типичной ситуации (при $p_{00}p_{11} \neq p_{01}p_{10}$) последовательная реализация в порядке $(g', f')$ приводит для почти всех систем из $\mathcal{K}_n(f, g)$ к более сложным схемам.

Более детальное рассмотрение этого примера (которое опустим из-за громоздкости) показывает, что при реализации в порядке $(g', f')$ для почти всех пар из $\mathcal{K}_n(f, g)$ нижняя оценка теоремы 9 является асимптотически точной.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Гаврилов М. А., Девятков В. В., Пупырев Е. И.** Логическое проектирование дискретных автоматов. М.: Наука, 1977.
2. **Галлагер Р.** Теория информации и надёжная связь. М.: Советское радио, 1974.
3. **Лейхтвейс К.** Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
4. **Лупанов О. Б.** Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31–110.
5. **Нечипорук Э. И.** О сложности вентильных схем, реализующих булевские матрицы с неопределёнными элементами //Докл. АН СССР. 1980. Т. 163, № 1. С. 40–43.
6. **Сапоженко А. А.** О сложности дизъюнктивных нормальных форм, получаемых с помощью градиентного алгоритма //Дискретный анализ. Сборник научн. тр. Вып 21. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1972. С. 62–71.
7. **Чашкин А. В.** О реализации частичных булевых функций // Дискретные модели в теории управляющих систем: VII Международная конференция: Труды. М.: МАКС Пресс, 2006. С. 390–404.
8. **Шоломов Л. А.** О функционалах, характеризующих сложность систем недоопределённых булевых функций // Проблемы кибернетики. Вып. 19. М.: Наука, 1967. С. 123–140.
9. **Шоломов Л. А.** Информационные свойства функционалов сложности для систем недоопределённых булевых функций // Проблемы кибернетики. Вып. 34. М.: Наука, 1978. С. 133–150.
10. **Шоломов Л. А.** Сжатие частично определённой информации // Нелинейная динамика и управление. Вып. 4. М.: Физматлит, 2004. С. 385–399.

**11. Шоломов Л. А.** Кодирование частично-определённых дискретных источников без памяти // Докл. РАН. 2004. Т. 397, № 2. С. 178–180.

**12. Шоломов Л. А.** О мере информации нечётких и частично-определённых данных // Докл. РАН. 2006. Т. 410, № 1. С. 321–325.

Адрес автора:

Институт системного анализа РАН,
проспект 60-летия Октября, 9
117312 Москва,
Россия.
E-mail: sholomov@isa.ru

Статья поступила
14 октября 2006 г.