ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2007. Серия 1. Том 14, № 1. 21–26

УДК 519.17

О СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ГРАФОВ*)

В. Е. Алексеев, Д. В. Захарова

Рассматриваются классы графов, замкнутые относительно сложения по модулю 2, переименования вершин и удаления изолированных вершин. Доказывается, что имеется ровно пять таких классов.

Введение

Рассматриваются обыкновенные графы (неориентированные графы без петель и кратных рёбер). Множество вершин графа G обозначается через VG, множество рёбер — через EG. *Классом графов* будем называть множество графов, замкнутое относительно изоморфизма, т. е. такое, что при любом переименовании вершин в графе из этого множества получается граф из того же множества. Сумма по модулю 2 графов G_1 и G_2 определяется как граф $G = G_1 \oplus G_2$, у которого $VG = VG_1 \cup VG_2$, $EG = (EG_1 - EG_2) \cup (EG_2 - EG_1)$.

Симметрическим пространством графов назовём непустой класс графов, замкнутый относительно сложения по модулю 2 и удаления изолированных вершин.

Любое симметрическое пространство замкнуто и относительно добавления изолированной вершины, которое можно рассматривать как сложение с одновершинным графом. Так как для любого графа G граф $G \oplus G$ является пустым, то любое симметрическое пространство содержит все пустые графы. Таким образом, класс всех пустых графов $\mathbf{O}$ является минимальным элементом в семействе всех симметрических пространств. Максимальным, очевидно, является класс всех обыкновенных графов $\mathbf{G}$. Менее тривиальный пример — класс $\mathbf{ED}$ всех графов, у которых степени всех вершин чётны. Легко видеть, что он является симметрическим пространством.

Для любого графа G множество $S(G)$ всех его остовных подграфов с операцией сложения по модулю 2 является линейным векторным пространством над двухэлементным полем. Множество $C(G) = \mathbf{ED} \cap S(G)$

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–00553).

известно как пространство циклов графа G [1]. Представляет интерес вопрос о том, имеются ли в $S(G)$ другие подпространства, определяемые аналогичным образом. Иначе говоря, существуют ли другие нетривиальные симметрические пространства графов. В настоящей статье доказывается, что кроме трёх упомянутых выше имеется еще только два симметрических пространства графов, именно:

EE — класс всех графов с чётным числом рёбер,

$\mathbf{EDE} = \mathbf{ED} \cap \mathbf{EE}$.

Мы покажем также, что каждое симметрическое пространство графов порождается одноэлементным базисом.

В статье используются стандартные обозначения: O_n, P_n и C_n для пустого графа, простой цепи и простого цикла с n вершинами (C_3 называем также *треугольником*), $K_{p,q}$ для полного двудольного графа. *Звездой* называется полный двудольный граф, в котором одна доля состоит из одной вершины. Если в графе G нет подграфа, изоморфного графу H, то будем говорить, что G — граф без H.

Для графа G и инъекции f, определённой на множестве VG, через G^f будем обозначать граф , получаемый переименованием вершин графа G в соответствии с отображением f, т. е. $(a, b) \in EG^f$ тогда и только тогда, когда $(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) \in EG$. Через $[a, b]$ обозначаем подстановку, при которой вершины a и b меняются местами, а остальные вершины остаются неподвижными.

1. Базисы

Для множества графов A через $[A]$ обозначаем минимальное симметрическое пространство, содержащее все графы из A. Если A состоит из единственного графа G, то будем писать $[G]$.

Базисом симметрического пространства графов $\mathbf{X}$ будем называть минимальное по включению множество B такое, что $[B] = \mathbf{X}$.

Очевидно, класс $\mathbf{O}$ имеет базис, состоящий из одного графа P_1, а класс $\mathbf{G}$ имеет базис, состоящий из одного графа P_2. В этом разделе мы опишем базисы классов **ED, EE** и **EDE**.

Лемма 1. *В графе без P_3 каждая компонента связности состоит не более чем из двух вершин. В графе без P_4 каждая компонента связности является либо звездой, либо треугольником.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго рассмотрим компоненту связности в графе без P_4. Если в ней есть цикл, то эта компонента — треугольник, так как любой цикл большей длины содержит P_4, а если есть ребро, соединяющее вершину треугольника с вершиной вне треугольника, то также имеется P_4. Если же цикла нет, то эта компонента — дерево, а дерево без P_4, очевидно, является звездой. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любого графа G и любого $k \geqslant 3$ множество $G \oplus [C_k]$ содержит граф без P_k.*

Доказательство. Допустим, что в графе G имеется подграф P_k с множеством вершин U. Образуем граф $G' = G \oplus H$, где H — граф, изоморфный циклу C_k, с множеством вершин U, у которого все ребра, кроме одного, совпадают с рёбрами этого подграфа P_k. В графе H по крайней мере на $k-2$ ребра меньше, чем в графе G. После некоторого числа таких сложений получим граф без P_k. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. ED $= [C_3]$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathbf{ED}$. По лемме 2 множество $G \oplus [C_3]$ содержит граф H, в котором нет P_3. Тогда $G = H + F$, где $F \in [C_3]$. По лемме 1 в графе H каждая компонента связности состоит не более чем из двух вершин. Так как степени всех вершин в графах G и C_3 чётны, то они чётны и в графе H. Следовательно, каждая компонента связности графа H состоит из одной вершины, т. е. H пустой граф. Значит, $G = F \in [C_3]$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. EE $= [P_3]$.

Доказательство. Пусть G — произвольный граф из $\mathbf{EE}$. Если в G имеется вершина степени не менее 2, то, складывая его с графом, изоморфным P_3, получаем граф, в котором на два ребра меньше. После некоторого числа таких сложений получим граф H без P_3. В каждой компоненте связности графа H содержится не более двух вершин, причём число двухвершинных компонент чётно. На рис. 1 показано, что граф, состоящий из двух двухвершинных компонент, является суммой двух графов, получаемых из P_3 добавлением изолированной вершины. Следовательно, $G \in [P_3]$. Теорема 2 доказана.

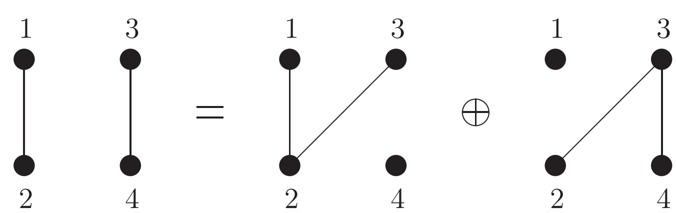

Рис. 1

Теорема 3. $\mathbf{EDE} = [\mathbf{C_4}]$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathbf{EDE}$. По лемме 2 множество $G \oplus [C_4]$ содержит граф H без P_4. По лемме 1 в графе H любая компонента связности является треугольником или звездой. Ввиду чётности степеней никаких звезд, кроме одновершинных, быть не может, а так как число рёбер тоже чётно, то чётным будет и число компонент-треугольников. На рис. 2 показано, что граф, состоящий из двух треугольных компонент, можно разложить в сумму трёх графов, изоморфных простому циклу C_4. Теорема 3 доказана.

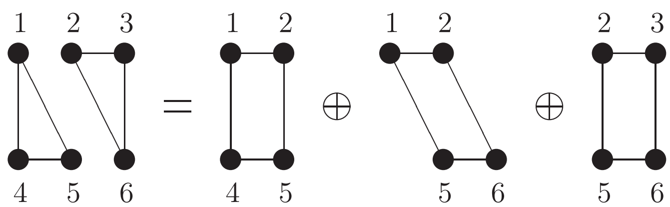

Рис. 2

2. Симметрические пространства

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема 4. *Имеется ровно* 5 *симметрических пространств графов*: $\mathbf{O}, \mathbf{G}, \mathbf{ED}, \mathbf{EE}, \mathbf{EDE}$.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3. *Любое симметрическое пространство графов, отличное от* $\mathbf{O}$, *содержит граф* C_4.

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}$ — симметрическое пространство, G — непустой граф из $\mathbf{X}$, a — вершина степени $q > 0$ в графе G. Добавив к графу G изолированную вершину b, получим граф $H \in \mathbf{X}$. Из графа $H \oplus H^{[a,b]}$ после удаления изолированных вершин получается граф L, изоморфный графу $K_{2,q}$, у которого одна доля состоит из вершин a и b. Пусть $c_1, c_2 \ldots, c_q$ — вершины второй доли. Переименуем их в соответствии с отображением f: $f(c_i) = c_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, q$ (c_{q+1} — новый элемент). В графе $L \oplus L^f$ множество вершин $\{a, b, c_1, c_{q+1}\}$ порождает подграф C_4, а все остальные вершины изолированные. Следовательно, $C_4 \in \mathbf{X}$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если симметрическое пространство* $\mathbf{X}$ *содержит граф, в котором есть вершина нечётной степени, то* $P_3 \in \mathbf{X}$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathbf{X}$, a — вершина нечётной степени в графе G. Как в доказательстве предыдущей леммы, из графа G можно получить граф $K_{2,q}$, причем q нечётно. По лемме 3 в $\mathbf{X}$ содержится граф C_4. Складывая граф $K_{2,q}$ с несколькими экземплярами графа $K_{2,2} = C_4$ и удаляя изолированные вершины, можно получить граф $K_{2,1} = P_3$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если симметрическое пространство* $\mathbf{X}$ *содержит граф с нечётным числом рёбер, то* $C_3 \in \mathbf{X}$.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что $C_4 \in \mathbf{X}$. Если взять любой граф из $\mathbf{X}$ с нечётным числом рёбер, то по лемме 2 из него и C_4 можно получить граф G без P_4. При этом число рёбер в графе G тоже будет нечётным. По лемме 1 в графе G каждая компонента связности является звездой или треугольником.

Если звезду $K_{1,q}$, $q \geqslant 3$, с центральной вершиной a и периферийными вершинами $b_1, b_2, \ldots, b_q$, сложить с циклом C_4, имеющим вершины a, b_1, b_2, c и рёбра $(a, b_1), (a, b_2), (b_1, c), (b_2, c)$, то получится граф с двумя компонентами связности $K_{1,2}$ и $K_{1,q-2}$. Таким образом, из графа G можно получить граф с нечётным числом рёбер, в котором каждая компонента связности изоморфна одному из графов C_3, $K_{1,2} = P_3$, или $K_{1,1} = P_2$. Пусть H — граф из класса $\mathbf{X}$ с наименьшим числом рёбер и без изолированных вершин, обладающий этими свойствами. Покажем, что H — это либо C_3, либо P_2. Так как $[P_2] = \mathbf{G}$, то в любом случае $C_3 \in \mathbf{X}$.

Сначала отметим, что в графе H не может быть компоненты P_3. Действительно, предположим, вершины a, b, c порождают такую компоненту, в которой b — центральная вершина. Добавив к графу H изолированную вершину x, получим граф H_1. Рассмотрим граф $L = H \oplus H_1^{[a,x]} \oplus H_1^{[c,x]}$. В нём вершины a, b, c, x изолированные, а подграф, порождённый остальными вершинами, совпадает с соответствующим подграфом графа H. Но это противоречит минимальности графа H.

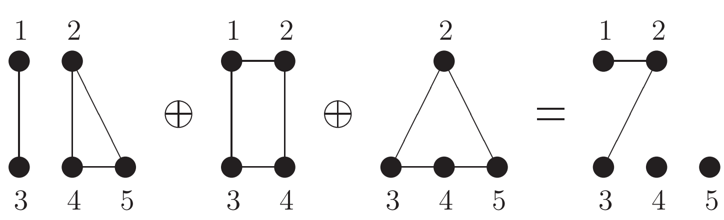

Рис. 3

Допустим, что в графе H имеется компонента связности, являющаяся треугольником. Если кроме треугольника в графе H имеется еще хотя бы одна компонента P_2, то H не минимален: сложив его с двумя циклами C_4, можно получить граф с теми же свойствами и с меньшим числом рёбер. Это показано на рис. 3. То же верно, если имеется два треугольника; в этом случае, как легко видеть, достаточно сложить граф H с тремя циклами C_4, чтобы превратить все 6 вершин этих компонент в изолированные.

Осталось рассмотреть случай, когда каждая компонента связности графа H состоит из двух вершин. Допустим, имеется более одной такой компоненты, и пусть $\{a,b\}$ и $\{c,d\}$ — множества вершин двух из них. Пусть F — граф, полученный добавлением к графу G изолированных вершин x и y. Граф $F \oplus F^{[a,x][b,y]} \oplus F^{[c,x][d,y]}$ получается из графа F удалением двух рёбер, а это опять противоречит минимальности графа H. Лемма 5 доказана.

3. Доказательство теоремы 4

Пусть $\mathbf{X}$ — симметрическое пространство, отличное от $\mathbf{O}$. Из леммы 3 и теоремы 3 следует, что $\mathbf{EDE} \subseteq \mathbf{X}$. Допустим, $\mathbf{EDE} \neq \mathbf{X}$ и рассмотрим три возможных случая:

(а) $\mathbf{X} \nsubseteq \mathbf{ED}$, $\mathbf{X} \nsubseteq \mathbf{EE}$;

(б) $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{ED}$, $\mathbf{X} \nsubseteq \mathbf{EE}$;

(в) $\mathbf{X} \nsubseteq \mathbf{ED}$, $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{EE}$.

В случае (а), как следует из лемм 3 и 4, класс $\mathbf{X}$ содержит графы P_3 и C_3. Сумма этих двух графов является графом с одним ребром. Следовательно, $\mathbf{X} = \mathbf{G}$.

В случае (б) класс $\mathbf{X}$ содержит граф C_3, а по теореме 1 он содержит все графы с чётными степенями. Значит, $\mathbf{X} = \mathbf{ED}$.

В случае (в) класс $\mathbf{X}$ содержит граф P_3, а по теореме 2 он содержит все графы с чётным числом рёбер. Значит, $\mathbf{X} = \mathbf{EE}$. Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зыков А. А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987.

Адрес авторов:

Нижегородский гос. ун-т,
факультет ВМК,
пр. Гагарина, 23, корп. 2,
603950 Нихний Новгород, Россия.
E-mail: ave@uic.nnov.ru

Статья поступила
24 ноября 2006 г.