ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2007. Серия 1. Том 14, № 1. 27–44

УДК 519.95

О ПОСТРОЕНИИ СХЕМ СУММАТОРОВ МАЛОЙ ГЛУБИНЫ*)

С. Б. Гашков, М. И. Гринчук, И. С. Сергеев

Рассматриваются методы построения схем n-разрядных сумматоров малой глубины (эффективность методов синтеза определяется глубиной схем при $n < 1000$).

Введение

Некоторые теоретические задачи синтеза схем для числовых сумматоров к настоящему времени решены. Окончательный результат для сложности таких схем получен Н. П. Редькиным [3], а асимптотика глубины установлена В. М. Храпченко [4]. Результат Храпченко может быть улучшен (гипотетически) только в остаточном члене.

Однако оптимальная по сложности схема сумматора имеет линейную глубину, а схема Храпченко не является эффективной (прежде всего из-за высокой сложности, а уменьшение последней приводит к росту глубины) для практического синтеза, интерес к которому существенно возрос в последние десятилетия.

В настоящей статье рассматривается вопрос минимизации глубины схем n-разрядных сумматоров при конкретных значениях n, $n < 1000$. Предложено несколько методов построения схем малой глубины и небольшой сложности (часть результатов содержится в [6, 7]). Рассматриваемые схемы имеют худшую асимптотику глубины, чем схемы, построенные по методу Храпченко. Однако при небольших значениях n (например, в типичном для приложений случае $n = 32$) превосходят его и другие известные методы.

Рассматривается задача построения схемы сложения двоичных n-разрядных чисел $A = [a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0]$ и $B = [b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0]$ (схема строится над базисом двуместных булевых функций — необходи-

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00994), программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–5400.2006.1) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Синтез и сложность управляющих систем»).

мые понятия изложены в [1, 5]). Сумму чисел A и B обозначим через $Z = [z_n, z_{n-1}, \ldots, z_0]$.

Введём обозначения $x_i = a_i + b_i$ («+» в булевых выражениях будет означать сумму по модулю 2) и $y_i = a_i b_i$. Известный метод сложения «столбиком» заключается в том, что на каждом шаге вычисляются очередной разряд числа Z по формуле $z_i = x_i + c_i$, где c_i — перенос из младших разрядов, и следующий перенос $c_{i+1} = y_i + x_i c_i$. Все x_i и y_i вычисляются со сложностью $2n$ и глубиной 1. По три операции необходимо для вычисления каждой пары z_i и c_{i+1} за исключением самой первой, так как $z_0 = x_0$ и $c_1 = y_0$, и старшего разряда $z_n = c_n$. Легко видеть, что c_1 вычисляется на глубине 1, c_2 — на глубине 3 и т. д., и окончательно $c_n = z_n$ вычисляется на глубине $2n - 1$. Следовательно, для сложности и глубины n-разрядного сумматора (будем обозначать их через $S(n)$ и $D(n)$ соответственно) справедливы оценки

$$S(n) \leqslant 5n - 3, \qquad D(n) \leqslant 2n - 1.$$

Н. П. Редькин в [3] показал, что $S(n) = 5n - 3$, т. е. построенная схема является минимальной по сложности.

Естественным образом возникает задача минимизации глубины схемы сумматора. Очевидно, что глубина реализации всех z_i определяется глубиной реализации z_n или z_{n-1}. При каждом i справедлива формула

$$c_i = y_{i-1} + x_{i-1}(y_{i-2} + x_{i-2}(\ldots(y_1 + x_1 y_0)\ldots)). \tag{1}$$

При этом $z_{n-1} = x_{n-1} + c_{n-1}$ и как функция независимых переменных x_i и y_i реализуется не сложнее (и не глубже) чем $z_n = c_n$. Действительно, если у схемы, реализующей z_n, на вход y_{n-1} подать x_{n-1}, а на вход x_{n-1} подать 1, то полученная схема будет реализовывать z_{n-1}.

Аналогично, положив $u_i = a_i \vee b_i$ и заметив, что $c_{i+1} = y_i \vee u_i c_i$, можно вывести формулу

$$c_i = y_{i-1} \vee u_{i-1}(y_{i-2} \vee u_{i-2}(\ldots(y_1 \vee u_1 y_0)\ldots)) \tag{2}$$

и получить ещё одно представление для z_n. В силу равенства $y_i \vee u_i c_i = u_i(y_i \vee c_i)$ (справедливого при подстановке $y_i = a_i b_i$ и $u_i = a_i \vee b_i$) также верна формула

$$c_i = u_{i-1}(y_{i-1} \vee u_{i-2}(\ldots y_2 \vee u_1(y_1 \vee y_0)\ldots)). \tag{3}$$

Таким образом, имеем оценку глубины сумматора в виде 1 плюс глубина c_n как функции от переменных x_i, y_i вида (1), либо 2 плюс глубина c_{n-1} как функции от переменных u_i, y_i вида (2) или (3).

§ 1. Метод «золотого сечения»

Формула (2) позволяет ограничить рассмотрение функциями

$$F_k = y_{k-1} \vee u_{k-1}(y_{k-2} \vee u_{k-2}(\ldots(y_1 \vee u_1 y_0)\ldots))$$

от переменных y_i и u_i, которые будем считать независимыми. Для удобства дальнейшего изложения введём обозначение

$$F_k(m) = y_{m+k-1} \vee u_{m+k-1}(y_{m+k-2} \vee u_{m+k-2}(\ldots(y_{m+1} \vee u_{m+1} y_m)\ldots)).$$

Положим $P_k(m) = u_{m+k-1} \cdot \ldots \cdot u_{m+1} \cdot u_m$ и $P_k = P_k(0)$. Очевидно, что

$$F_n = F_k(n-k) \vee P_k(n-k) F_{n-k}. \tag{4}$$

Обозначим через $D_F(k)$ глубину реализации функции F_k. Глубина реализации конъюнкции k переменных P_k равна $\lceil \log_2 k \rceil$.

Лемма 1. *При любом n справедливо неравенство*

$$D_F(n) < 1{,}441 \log_2 n + 1{,}68.$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $D_F(1) = 0$ и $D_F(2) = 2$. Далее по индукции можно показать, что $D_F(\Phi_l) \leqslant l$, где $\{\Phi_i\} = 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ — последовательность Фибоначчи, в которой $\Phi_i = \lfloor \varphi^{i+1}/\sqrt{5} \rceil$ и $\varphi = (\sqrt{5}+1)/2$ — пропорция золотого сечения ($\lfloor x \rceil$ обозначает ближайшее целое к числу x).

Действительно, если $D_F(\Phi_{l-1}) \leqslant l-1$ и $D_F(\Phi_{l-2}) \leqslant l-2$, то соотношение $D_F(\Phi_l) \leqslant l$ следует из формулы (4) (при выборе параметров $n = \Phi_l$ и $k = \Phi_{l-1}$), так как $\Phi_l = \Phi_{l-1} + \Phi_{l-2}$ и $\lceil \log_2 \Phi_{l-1} \rceil \leqslant l-2$.

При произвольном n выполняется неравенство

$$D_F(n) \leqslant \lceil \log_\varphi(\sqrt{5}n/\varphi) \rceil < 1{,}441 \cdot \log_2 n + 1{,}68.$$

Лемма 1 доказана.

Обозначим через $L_F(n,d)$ сложность реализации функции F_n схемой глубины d. Пусть d_n — глубина схемы для F_n, построенной методом леммы 1. Следуя [6], оценим сверху $L_F(n, d_n)$. Очевидно, реализация функций вида F_1 и P_1 не требует схемных затрат. Пара функций F_2 и P_2 реализуется со сложностью 3, а выходы вычисляются на глубинах 2 и 1 соответственно. Кроме того, F_2 вычисляется схемой со сложностью и глубиной 2. Далее, применяя (4), по индукции можно показать, что пара функций F_{Φ_l} и P_{Φ_l} вычисляется на глубинах l и $l-1$ соответственно схемой сложности $3(\Phi_l - 1)$, а F_{Φ_l} вычисляется схемой глубины l и сложности $3\Phi_l - \lceil (l+5)/2 \rceil$. При произвольном n справедливо неравенство

$$L_F(n, d_n) \leqslant 3n - \lceil (\lceil \log_\varphi(\sqrt{5}n) \rceil + 4)/2 \rceil < 3n - 0{,}72 \log_2 n - 2{,}83.$$

Обозначим через $L_F^*(n,d)$ сложность реализации системы функций $F_1,\ldots,F_n$ схемами с глубиной d. Покажем, что $L_F^*(n,d_n)=O(n\log n)$. Это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2. $L_F^*(\Phi_k,k)\leqslant\frac{3}{5}((2k-3)\Phi_{k+1}-(k-3)\Phi_k)$.

Доказательство. Будем строить схему, вычисляющую не только все F_i, но и все P_i, $i=1,\ldots,n$ (её сложность обозначим через L_n). Докажем, что $L_{\Phi_k}\leqslant\frac{3}{5}((2k-3)\Phi_{k+1}-(k-3)\Phi_k)$. Очевидно, это верно при $k=1,2$.

Рассмотрим индуктивный переход. При $n=\Phi_{k+1}$ воспользуемся схемой, реализующей $F_1,\ldots,F_{\Phi_{k-1}}$ и $F_1(\Phi_{k-1}),\ldots,F_{\Phi_k}(\Phi_{k-1})$ вместе с соответствующими конъюнкциями $P_1,\ldots,P_{\Phi_{k-1}}$ и $P_1(\Phi_{k-1}),\ldots,$ $P_{\Phi_k}(\Phi_{k-1})$. Недостающие функции $F_{\Phi_{k-1}+1},\ldots,F_{\Phi_{k+1}}$ вычисляются при помощи (4), для чего требуется дополнительно $2\Phi_k$ функциональных элементов. Требуется ещё Φ_k функциональных элементов для вычисления $P_{\Phi_{k-1}+1},\ldots,P_{\Phi_{k+1}}$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&L_F^*(\Phi_{k+1},k+1)\leqslant L_{\Phi_{k+1}}\leqslant L_{\Phi_k}+L_{\Phi_{k-1}}+3\Phi_k\\
&\quad\leqslant\frac{3}{5}\Big((2k-3)\Phi_{k+1}-(k-3)\Phi_k+(2k-5)\Phi_k-(k-4)\Phi_{k-1}+5\Phi_k\Big)\\
&\quad=\frac{3}{5}\Big((k+1)\Phi_{k+1}+(2k-1)\Phi_k\Big)=\frac{3}{5}\Big((2k-1)\Phi_{k+2}-(k-2)\Phi_{k+1}\Big).
\end{aligned}
$$

Лемма 2 доказана.

§ 2. Метод Храпченко

Пусть $n=k_1+\ldots+k_r$. Рекурсивное применение (4) с последовательным выбором параметра $k=k_1,k_2$ и т. д. приводит к формуле

$$F_n=F_{k_1}(m_1)\vee P_{k_1}(m_1)(\ldots(F_{k_{r-1}}(m_{r-1})\vee P_{k_{r-1}}(m_{r-1})F_{k_r})\ldots),\qquad(5)$$

где $m_i=k_{i+1}+\ldots+k_r$. Таким образом, функция F_n может быть получена подстановкой в формулу для F_r (из определения) функций $F_{k_i}(m_i)$ и $P_{k_i}(m_i)$ вместо переменных y_{r-i} и u_{r-i} соответственно. Рассматривая (5), когда $n=kr$ и все $k_i=k$, получаем соотношение

$$D_F(kr)\leqslant D_F(k)+D_F(r).$$

В. М. Храпченко в [4] указал способ построения схемы асимптотически минимальной глубины $\log_2 n$. Метод Храпченко основан на представлении, которое получается из (5) раскрытием скобок:

$$F_n = F_{k_1}(m_1) \vee P_{k_1}(m_1)F_{k_2}(m_2) \vee P_{k_1+k_2}(m_2)F_{k_3}(m_3) \vee \ldots \\ \vee P_{k_1+\ldots+k_{r-1}}(m_{r-1})F_{k_r}. \quad (6)$$

Имея метод, вычисляющий все дизъюнкты в формуле (6) с глубиной h, для глубины F_n получаем верхнюю оценку $h + \lceil \log_2 r \rceil$.

Теорема 1 (В. М. Храпченко). *При любом n справедливо неравенство $D_F(n) < \log_2 n + \sqrt{2\log_2 n} + 3$.*

Доказательство. Сначала доказывается неравенство

$$D_F(2^{\binom{l}{2}}) \leqslant \binom{l+1}{2},$$

которое справедливо при $l = 2$. Для индуктивного перехода применяется формула (6) с параметрами $n = 2^{\binom{l+1}{2}}$, $r = 2^l$ и $k_1 = \ldots = k_r = 2^{\binom{l}{2}}$. Дизъюнкты в формуле вычисляются на глубине $\binom{l+1}{2} + 1$, так как $D_F(k_j) \leqslant \binom{l+1}{2}$ по предположению, а для оценки глубины конъюнкции $P_{k_1+\ldots+k_j}$ используется неравенство $\log_2(k_1 + \ldots + k_j) < \binom{l}{2} + l = \binom{l+1}{2}$, где $j = 1, \ldots, r$.

Далее, для $n = 2^m$, где $\binom{l}{2} < m \leqslant \binom{l+1}{2}$, используем (6) с параметрами $r = 2^{m-\binom{l}{2}}$ и $k_1 = \ldots = k_r = 2^{\binom{l}{2}}$. Получаем оценку $D_F(2^m) \leqslant m + l + 1$, где $l = \lceil(\sqrt{1+8m} - 1)/2\rceil$. Для произвольного n имеем

$$D_F(n) \leqslant \lceil \log_2 n \rceil + \left\lceil \frac{\sqrt{1 + 8\lceil \log_2 n \rceil} - 1}{2} \right\rceil + 1 \\ < \lceil \log_2 n \rceil + \left\lceil \sqrt{2\log_2 n} \right\rceil + 1 < \log_2 n + \sqrt{2\log_2 n} + 3.$$

Теорема 1 доказана.

Как видно из сравнения (4) и (6), метод «золотого сечения» из предыдущего параграфа фактически является частным случаем общего метода Храпченко. Имея худшую асимптотику, схема, построенная по методу «золотого сечения», всё же не уступает асимптотически наилучшей схеме, построенной по методу Храпченко, вплоть до $n = 987 = \Phi_{15}$. Метод Храпченко позволяет строить схемы глубины 15 для $n \leqslant 1024 = 2^{\binom{5}{2}}$ (см. таблицу в приложении).

Методом Храпченко строятся схемы с глубиной как в теореме 1, реализующие F_n с линейной сложностью, а набор функций $F_1, \ldots, F_n$ —

со сложностью $O\left(c^{\sqrt{\log_2 n}} n\right)$, где c — некоторая константа. Последнее утверждение вытекает из леммы 4, для доказательства которой нам потребуется вспомогательная

Лемма 3. *Набор функций* $\{G_{i,j,s} = q_{i,j} q_{k,j-1} \cdot \ldots \cdot q_{k,s}\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant s < j \leqslant 2^l$, *реализуется схемой сложности* $2^{l-1}(2^l-1)k$ *и глубины* l.

Доказательство. Рассуждение проведём индукцией по l. Функции $G_{i,1,1}$ совпадают с соответствующими переменными $q_{i,1}$. Поэтому в случае $l = 0$ утверждение леммы справедливо.

Пусть $l > 0$. По предположению все функции $G_{i,j,s}$, $j \leqslant 2^{l-1}$, реализуются со сложностью $2^{l-2}(2^{l-1}-1)k$ и глубиной $l-1$. С такой же сложностью и глубиной реализуется набор функций $G_{i,j,s}$, $j \leqslant 2^l$, $s > 2^{l-1}$. Если $j > 2^{l-1} \geqslant s$, то $G_{i,j,s} = G_{i,j,2^{l-1}+1} G_{k,2^{l-1},s}$. Таким образом, для вычисления всех функций $G_{i,j,s}$, $j > 2^{l-1} \geqslant s$, требуется дополнительно $2^{2(l-1)}k$ элементов конъюнкции, расположенных на глубине l. Оценка сложности схемы следует из соотношения

$$2 \cdot 2^{l-2}(2^{l-1}-1)k + 2^{2(l-1)}k = 2^{l-1}(2^l-1)k.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\binom{l}{2} < m \leqslant \binom{l+1}{2}$. *Тогда* $L_F^*(2^m, m+l+1) < 3 \cdot 2^{m+l}$.

Доказательство. Будем строить схему, вместе с функциями F_i реализующую соответствующие конъюнкции P_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ (сложность такой схемы обозначим через L_n). При $m = 1$ утверждение верно для такой схемы.

Предполагая доказанным утверждение леммы для всех $m \leqslant \binom{l}{2}$, рассмотрим m такое, что $\binom{l}{2} < m \leqslant \binom{l+1}{2}$. В методе теоремы 1 функции F_s, $2^{\binom{l}{2}} < s \leqslant 2^m$, вычисляются по формулам

$$F_s = F_{s-(r-1)k}((r-1)k) \vee P_{s-(r-1)k}((r-1)k) F_k((r-2)k) \vee \ldots \\ \vee P_{s-k}(k) F_k, \quad (7)$$

где $k = 2^{\binom{l}{2}}$ и $r = \lceil s/k \rceil \leqslant 2^{m-\binom{l}{2}}$. Любой из наборов $\{F_i(jk),\ P_i(jk) \mid i = 1, \ldots, k\}$ реализуется со сложностью L_k. Все необходимые конъюнкции имеют вид $P_s(jk)$, $j = 0, \ldots, 2^{m-\binom{l}{2}}-1$, $s = 1, \ldots, 2^m - jk$. Следовательно, они могут быть реализованы схемой из леммы 3, на входы $q_{i,j}$ которой подаются соответствующие функции $P_i((j-1)k)$. Сложность такой схемы не превосходит $2^{m-\binom{l}{2}-1}(2^{m-\binom{l}{2}}-1)k$. Для вычисления функции F_s

по формуле (7) требуется $2(r-1)$ функциональных элементов — такие функции вычисляются с дополнительной сложностью

$$\sum_{i=1}^{2^{m-\binom{l}{2}}-1} 2ik = 2^{m-\binom{l}{2}}(2^{m-\binom{l}{2}}-1)k.$$

Окончательно имеем

$$L_F^*(2^m, m+l+1) \leqslant L_{2^m} < 2^{m-\binom{l}{2}} L_k + 3\cdot 2^{2(m-\binom{l}{2})-1}k$$
$$\leqslant 3\cdot(2^{l-1} + 2^{m-\binom{l}{2}-1})2^m \leqslant 3\cdot 2^{m+l}.$$

Лемма 4 доказана.

Как метод Храпченко, так и метод «золотого сечения» позволяют рассматривать (1) вместо (2) и получать аналогичные оценки для глубины функций F_n^+, которые отличаются от F_n тем, что в определении вместо операций $\vee$ используются операции $+$. При помощи таких функций удобнее оценивать глубину сумматора (см. введение).

Для практических целей метод Храпченко можно уточнить, используя последовательно разложения вида (6) с 2, 3, 4, 5 и т. д. дизъюнктами и выполняя оптимизацию по глубине.

§ 3. Троичный метод

По аналогии с дизъюнктивным разложением (4) можно построить конъюнктивное разложение для функции F_n. Пусть

$$V_k(m) = y_{m+k-1} \vee \ldots \vee y_{m+1} \vee y_m$$

и введём также обозначение $V_k = V_k(0)$. Тогда справедлива формула

$$F_n = (F_k(n-k) \vee P_k(n-k))(V_k(n-k) \vee F_{n-k}), \tag{8}$$

которая следует из (4), если заметить, что $F_kV_k = F_k$ и $F_k \vee P_kV_k = F_k$. Пусть $F'_k(m) = F_k(m) \vee P_k(m)$.

Чередуя разложения по правилам (4) и (8), получаем

$$F_n = F_{k_1}(m_1) \vee P_{k_1}(m_1)F_{n-k_1}$$
$$= F_{k_1}(m_1) \vee P_{k_1}(m_1)F'_{k_2}(m_2)(V_{k_2}(m_2) \vee F_{n-k_1-k_2}) = \ldots$$

и окончательно имеем

$$F_n = F_{k_1}(m_1) \vee [P_{k_1}(m_1)F'_{k_2}(m_2)]([V_{k_2}(m_2) \vee F_{k_3}(m_3)]$$
$$\vee [P_{k_3}(m_3)F'_{k_4}(m_4)]([V_{k_4}(m_4) \vee F_{k_5}(m_5)] \vee \ldots)), \tag{9}$$

где $m_i = n - (k_1 + \ldots + k_i)$, а «хвост» формулы (9) зависит от вида подстановки ((4) или (8)), произведённой на последнем шаге. Аналогично выводится формула

$$F_n = F'_{k_1}(m_1)([V_{k_1}(m_1) \vee F_{k_2}(m_2)] \vee [P_{k_2}(m_2)F'_{k_3}(m_3)]\cdot \\ \cdot([V_{k_3}(m_3) \vee F_{k_4}(m_4)] \vee [P_{k_4}(m_4)F'_{k_5}(m_5)](\ldots))). \quad (10)$$

Троичный метод [7] построения схемы сумматора описывается в следующей лемме.

Лемма 5. *При любом n справедливо неравенство*

$$D_F(n) < 1{,}262(\log_2 n + 1) + 1.$$

Доказательство. Формула (9) с параметрами $k_{2i-1} = 2$, $k_{2i} = 1$, $i \in \mathbb{N}$, имеет вид

$$F_n = [y_{n-1} \vee u_{n-1}y_{n-2}] \vee [u_{n-1}u_{n-2}(y_{n-3} \vee u_{n-3})]([y_{n-3} \vee y_{n-4} \vee u_{n-4}y_{n-5}] \\ \vee [u_{n-4}u_{n-5}(y_{n-6} \vee u_{n-6})]([y_{n-6} \vee y_{n-7} \vee u_{n-7}y_{n-8}] \vee \ldots)).$$

Функции в квадратных скобках реализуются с глубиной 2. Следовательно, с глубиной 2 можно выполнить следующие преобразования формул (под преобразованием понимается вычисление компонент в правой части как функций переменных из левой части)

$$q_1 \vee r_1(\ldots(q_{3n} \vee r_{3n})\ldots) \to Q_1 \vee R_1(\ldots(Q_n \vee R_n)\ldots), \quad (11)$$

$$q_1 \vee r_1(\ldots(q_{3n-2} \vee r_{3n-2}q_{3n-1})\ldots) \\ \to Q_1 \vee R_1(\ldots(Q_{n-1} \vee R_{n-1}Q_n)\ldots), \quad (12)$$

где $R_i = r_{3i-2}r_{3i-1}(q_{3i} \vee r_{3i})$, $Q_1 = q_1 \vee r_1q_2$ и $Q_i = q_{3i-3} \vee q_{3i-2} \vee r_{3i-2}q_{3i-1}$ при $i > 1$.

Первое преобразование можно записать сокращённо $F'_{3n} \to F'_n$ (при переобозначении символов переменных), а второе — $F_{3n-1} \to F_n$.

Обозначим через $D'_F(n)$ глубину реализации F'_n. Очевидно, что

$$D_F(n) \leqslant D'_F(n) \leqslant D_F(n+1).$$

Из (11) и (12) следует

$$D'_F(3n) \leqslant D'_F(n) + 2, \qquad D_F(3n-1) \leqslant D_F(n) + 2.$$

Применяя эти неравенства и учитывая, что $D'_F(1) = 1$ и $D_F(2) = 2$, получаем $D'_F(3^k) \leqslant 2k + 1$, $D_F((3^k + 1)/2) \leqslant 2k$.

Для произвольного n справедлива оценка

$$D_F(n) \leqslant \lceil \log_3 n \rceil + \lceil \log_3 (2n-1) \rceil < 1{,}262(\log_2 n + 1) + 1.$$

Лемма 5 доказана.

Троичный метод никогда не уступает методу «золотого сечения» и не уступает методу Храпченко вплоть до $n = (3^{17}+1)/2 \approx 6{,}5 \cdot 10^7$. Однако два последних метода имеют «аддитивные» аналоги, т. е. позволяют строить схемы, реализующие F_n^+ (такие схемы получаются из схем для F_n заменой элементов дизъюнкций на элементы суммы по модулю два). Следовательно, если d_n — глубина реализации F_n методом «золотого сечения» или методом Храпченко, то можно построить схему n-разрядного сумматора с глубиной d_n+1. В то же время, если троичный метод реализует F_n с глубиной d_n, то рассуждения из введения позволяют оценить глубину сумматора величиной $d_{n-1}+2$. Эту оценку уточняет следующая

Лемма 6. *При любом n справедливо неравенство $D(2n) \leqslant 3 + D_F(n)$.*

Доказательство. Полагая в формуле (9) все $k_i = 1$, имеем

$$F_n = y_{n-1} \vee [u_{n-1}(y_{n-2} \vee u_{n-2})]([y_{n-2} \vee y_{n-3}] \\ \vee [u_{n-3}(y_{n-4} \vee u_{n-4})]([y_{n-4} \vee y_{n-5}] \vee \ldots)).$$

Преобразуя так же выражение (2) для c_{2n-1} и используя равенство $y_i \vee u_i = u_i$, справедливое при подстановке $y_i = a_i b_i$ и $u_i = a_i \vee b_i$, получаем формулу

$$c_{2n-1} = y_{2n-2} \vee [u_{2n-2}u_{2n-3}]([y_{2n-3} \vee y_{2n-4}] \vee [u_{2n-4}u_{2n-5}](\ldots [y_1 \vee y_0])),$$

правая часть которой с глубиной 1 преобразуется к виду F_n (если произвести вычисления внутри квадратных скобок). Окончательно, утверждение леммы следует из замечания в конце введения. Лемма 6 доказана.

Оценим сложность троичного метода. Преобразование вида (11) или (12) функции от k переменных ($k = 2n-1$ для F_n и $k = 2n$ для F'_n) к функции от $\lceil k/3 \rceil$ переменных выполняется со сложностью не выше $k-1$. По индукции можно показать, что сложность схемы для соответствующей функции не превосходит 1,5$(k-1)$, так как $1{,}5(\lceil k/3 \rceil - 1) \leqslant (k-1)/2$. В частности, справедлива оценка $L_F(n, d_n) \leqslant 3(n-1)$, где d_n обозначает глубину схемы для F_n в троичном методе.

Как и для метода «золотого сечения», для троичного метода справедливо соотношение $L_F^*(n, d_n) = O(n \log n)$ (т. е. набор функций $F_1, \ldots, F_n$ реализуется схемой глубины d_n и сложности $O(n \log n)$), что вытекает из следующей довольно грубой оценки.

Лемма 7. *При любом n справедливы неравенства*

$$L_F^*(3^k, 2k+1) \leqslant (5k+1)3^k, \quad L_F^*((3^k+1)/2, 2k) \leqslant \frac{(30k-7)3^{k-1}-15}{4}.$$

Доказательство. Докажем первое неравенство (второе доказывается аналогично). Будем строить схему, реализующую все функции $f_1, \ldots, f_n$, где $f_1 = q_0 \vee r_0$ и при $i > 1$

$$f_i = q_{i-1} \vee r_{i-1}(t_{i-2} \vee u_{i-2}(y_{i-3} \vee u_{i-3}(\ldots(y_0 \vee u_0)\ldots))).$$

Сложность такой схемы обозначим через L_n. Эта схема реализует функции $F_1', \ldots, F_n'$, когда $q_i = t_i = y_i$ и $r_i = u_i$. Очевидно, что $L_1 = 1$, и утверждение леммы справедливо при $k = 0$.

При помощи (11) с глубиной 2 можно выполнить преобразования

$$\begin{aligned}
f_{3i} &\to f_i' = Q_{i-1}' \vee R_{i-1}'(T_{i-2}' \vee U_{i-2}(Y_{i-3} \vee U_{i-3}(\ldots(Y_0 \vee U_0)\ldots))),\\
f_{3i-1} &\to f_i'' = Q_{i-1}'' \vee R_{i-1}''(T_{i-2}'' \vee U_{i-2}(Y_{i-3} \vee U_{i-3}(\ldots(Y_0 \vee U_0)\ldots))),\\
f_{3i-2} &\to f_i''' = Q_{i-1}''' \vee R_{i-1}'''(T_{i-2}''' \vee U_{i-2}(Y_{i-3} \vee U_{i-3}(\ldots(Y_0 \vee U_0)\ldots))),
\end{aligned}$$

где $U_i = u_{3i+2}u_{3i+1}(y_{3i} \vee u_{3i})$, $Y_i = T_i' = y_{3i+3} \vee y_{3i+2} \vee u_{3i+2}y_{3i+1}$, $Q_i' = q_{3i+2} \vee r_{3i+2}t_{3i+1}$, $Q_i'' = q_{3i+1} \vee r_{3i+1}t_{3i}$, $Q_i''' = q_{3i}$, $R_i' = r_{3i+2}u_{3i+1}(y_{3i} \vee u_{3i})$, $R_i'' = r_{3i+1}u_{3i}$, $R_i''' = r_{3i}$, $T_i'' = y_{3i+2} \vee u_{3i+2}y_{3i+1}$, $T_i''' = t_{3i+2} \vee u_{3i+2}y_{3i+1}$.

При каждом i функции Y_i, U_i, Q_i', R_i', T_i', Q_i'', R_i'', T_i'', Q_i''', R_i''', T_i''' вычисляются со сложностью не более 15. Таким образом, реализация системы функций $f_1, \ldots, f_{3^k}$ сводится к реализации трёх систем $\{f_i'\}$, $\{f_i''\}$, $\{f_i'''\}$, $1 \leqslant i \leqslant 3^{k-1}$. Каждая из этих систем реализуется схемой, вычисляющей набор функций $\{f_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant 3^{k-1}$, входы которой соединяются с соответствующими выходами подсхемы, реализующей необходимые Y_i, U_i, Q_i', R_i', T_i', Q_i'', R_i'', T_i'', Q_i''', R_i''', T_i'''. По предположению индукции $L_{3^{k-1}} \leqslant (5(k-1)+1)3^{k-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
L_F^*(3^k, 2k+1) \leqslant L_{3^k} \leqslant 3L_{3^{k-1}} + 15 \cdot 3^{k-1} \leqslant (5(k-1)+1)3^k + 5 \cdot 3^k&\\
= (5k+1)3^k,&
\end{aligned}$$

что доказывает индуктивный переход. Лемма 7 доказана.

§ 4. Модификация троичного метода

Обозначим через $D_{VF}(k,l)$ глубину реализации функции $V_k(l) \vee F_l$ и аналогично через $D'_{VF}(k,l)$ глубину реализации функци $V_k(l) \vee F'_l$ (очевидно, что $D_{VF}(k,l) \leqslant D'_{VF}(k,l) \leqslant D_{VF}(k,l+1)$). Следующая лемма является усилением леммы 5.

Лемма 8. *При любом натуральном k справедливы неравенства*
$D'_{VF}((4^k-1)/3, 3^k) \leqslant 2k+1$, $D_{VF}((4^k-1)/3, (3^k+1)/2) \leqslant 2k$.

Доказательство. Заметим, что с глубиной 2 можно выполнить чуть более общие, чем (11) и (12), преобразования формул $q \vee F'_{3n} \to F'_n$ и $q \vee F_{3n+2} \to F_{n+1}$. Следовательно, с глубиной 2 выполняется преобразование

$$V_{(4^{k+1}-1)/3}(3^{k+1}) \vee F'_{3^{k+1}} = V_{4^k}(l_k) \vee V_{4^{k-1}}(l_{k-1}) \vee \ldots \vee V_1(l_0) \vee F'_{3^{k+1}}$$
$$\to V_{4^{k-1}}(m_{k-1}) \vee V_{4^{k-2}}(m_{k-2}) \vee \ldots \vee V_1(m_0) \vee F'_{3^k} = V_{(4^k-1)/3}(3^k) \vee F'_{3^k},$$

где $l_i = 3^{k+1} + (4^i-1)/3$ и $m_i = 3^k + (4^i-1)/3$. Первое утверждение леммы теперь следует из равенства $D'_{VF}(0,1) = 1$. Аналогично доказывается второе утверждение. Лемма 8 доказана.

Далее мы будем пользоваться следующим известным фактом, вытекающим из принципа двойственности (см., например, [5]).

Лемма 9. *Глубина реализации двойственных функций схемами в базисе всех двуместных булевых функций совпадает.*

Рассматриваемые далее схемы строятся над базисом $\{\vee, \wedge\}$. В этом случае схема, реализующая некоторую (монотонную) функцию, превращается в схему, реализующую двойственную к ней функцию, при замене всех элементов конъюнкции на элементы дизъюнкции и наоборот.

Как следствие, функция $P_6(4)F'_4$ реализуется схемой глубины 4, так как двойственная к ней функция имеет вид $V_5(5) \vee F_5$ (последняя реализуется с глубиной 4 согласно лемме 8). Функция F'_5 также реализуется с глубиной 4, так как согласно (8)

$$F'_5 = F'_3(2)(V_3(2) \vee F'_2),$$

функция $V_3(2) \vee F'_2$ является двойственной к функции вида $P_4(2)F_2$, которая очевидно реализуется с глубиной 3, а из троичного метода вытекает неравенство $D'_F(3) \leqslant 3$.

Следующая модификация троичного метода также описана в [7].

Лемма 10. *Неравенство $D_F(n) < 1,262\log_2 n + 2,05$ справедливо при* *любом* n.

Доказательство. Используя формулу (10), в которой $k_1 = k_{2i} = 5$ и $k_{2i+1} = 4$ для всех $i \geqslant 1$, можно заметить, что с глубиной 4 выполняются следующие преобразования формул

$$q_1 \vee r_1(\ldots(q_{9n} \vee r_{9n}q_{9n+1})\ldots) \to R_1(Q_1 \vee \ldots(Q_{n-1} \vee R_nQ_n)\ldots), \quad (13)$$

$$q_1 \vee r_1(\ldots(q_{9n-4} \vee r_{9n-4})\ldots) \to R_1(Q_1 \vee \ldots(Q_{n-1} \vee R_n)\ldots). \quad (14)$$

Переходы превращаются в равенства при подстановке вместо компонент R_i, Q_i подходящих функций от переменных из левой части. Эти функции имеют вид: F'_5 для R_1, $V_5(5) \vee F_5$ для Q_1, $P_5(4)F'_4$ и $V_4(5) \vee F_5$ для R_i и Q_i соответственно при $i > 1$.

Преобразования (13), (14) в сокращенной записи имеют вид $F_{9n+1} \to (F'_n)^*$ и $F'_{9n-4} \to (F_n)^*$ соответственно, где $(f)^*$ означает двойственную к f функцию.

Применяя новые соотношения $D_F(9n+1) \leqslant D'_F(n)$, $D'_F(9n-4) \leqslant D_F(n)$ с исходными данными $D'_F(1) = 1$ и $D'_F(5) \leqslant 4$, получаем

$$D'_F((17 \cdot 81^k - 1)/16) \leqslant 8k+1, \quad D'_F((81^{k+1} - 1)/16) \leqslant 8k+4,$$
$$D_F((17 \cdot 9^{2k+1} + 7)/16) \leqslant 8k+5, \; D_F((9^{2k+1} + 7)/16) \leqslant 8k.$$

Из этих соотношений при помощи (11) и (12) выводятся остальные:

$$D'_F((17 \cdot 3^{4k+1} - 3)/16) \leqslant 8k+3, \quad D'_F((3^{4k+5} - 3)/16) \leqslant 8k+6,$$
$$D_F((17 \cdot 3^{4k-1} + 21)/16) \leqslant 8k-1, \quad D_F((3^{4k+3} + 21)/16) \leqslant 8k+2.$$

При произвольном n имеем

$$D_F(n) \leqslant 2\log_3(16n) - 3 < 1{,}262\log_2 n + 2{,}05.$$

Лемма 10 доказана.

Уточнённый метод позволяет строить схемы с меньшей глубиной, чем в базовом троичном методе, уже для F_{10} и F_{15} (см. таблицу).

Оценки сложности модифицированного троичного метода $L_F(n, d_n) = O(n)$ и $L^*_F(n, d_n) = O(n \log n)$ (где d_n — глубина реализации F_n данным методом) получаются так же как и в предыдущем параграфе.

§ 5. Некоторые конкретные схемы

Компьютерный счёт, выполненный одним из авторов [7], показал, что для функций F_n, $n \leqslant 15$, модифицированным троичным методом строятся схемы глубины, минимально возможной при реализации в базисе

$\{\vee, \wedge\}$. На самом деле для некоторых небольших n результат этого метода (см. таблицу) можно улучшить.

Лемма 11. $D_F(17) \leqslant 6$; $D'_F(30) \leqslant 7$; $D_F(55) \leqslant 8$; $D'_F(101) \leqslant 9$.

Доказательство. Функция F_{17} реализуется с глубиной 6 в силу формулы

$$F_{17} = F_{10}(7) \vee P_{10}(7)F'_2(5)(V_2(5) \vee F_5) = F_{10}(7) \vee P_8(9)[u_8u_7F'_2(5)](V_2(5) \vee F_5), \quad (15)$$

так как $D_F(10) \leqslant 5$ из метода § 4, $D_{VF}(2,5) \leqslant 4$ согласно лемме 8, функция P_8 и функция в квадратных скобках реализуются с глубиной 3 каждая. Последнее верно в силу того, что двойственная функция имеет вид $a \vee F_3$.

Подставляя в (15) функцию $V_5(16) \vee F_9(7)$ вместо $F_{10}(7)$, получаем $D_{VF}(5,16) \leqslant 6$, так как $D_{VF}(5,9) \leqslant 5$ по лемме 8.

Далее заметим, что из (14) следует, что с глубиной 4 выполняется преобразование $P_{16}(9n-4)F'_{9n-4} \to (q \vee F_n)^*$. Отсюда вытекает, что функции $P_{16}(14)F'_{14}$ и $V_{15}(15) \vee F_{15}$ реализуются с глубиной 6. Следовательно, $D'_F(30) \leqslant 7$ в силу формулы

$$F'_{30} = F_{16}(14) \vee P_{16}(14)F'_{14}. \quad (16)$$

Неравенство $D_F(55) \leqslant 8$ следует из формулы

$$F_{55} = F_{30}(25) \vee [P_{30}(25)(y_{24} \vee u_{24})][y_{24} \vee F'_9(15)](V_{10}(15) \vee F_{15}),$$

в выводе которой используется несколько более общая чем (8) формула

$$V_l(n) \vee F_n = (V_l(n) \vee F'_k(n-k))(V_{k+l}(n-k) \vee F_{n-k}).$$

Функции внутри квадратных скобок реализуются с глубиной 5, а согласно доказанному выше $D_{VF}(10,15) \leqslant 6$.

Наконец, рассмотрим формулу

$$F'_{101} = F_{54}(47) \vee [P_{54}(47)(y_{46} \vee u_{46})(y_{46} \vee F'_3(43))] [V_4(43) \vee F'_{15}(28)](V_{19}(28) \vee F'_{28}).$$

Функции внутри квадратных скобок могут быть реализованы с глубиной 6. Подставляя в формулу (16) функцию $V_{21}(28) \vee F_{14}(14)$ вместо $F_{16}(14)$, получаем $D'_{VF}(21,28) \leqslant 7$, так как $D_{VF}(21,14) \leqslant 6$ согласно лемме 8. В частности, $D'_{VF}(19,28) \leqslant 7$. Следовательно, $D'_F(101) \leqslant 9$. Лемма 11 доказана.

§ 6. Линеаризация

Как было показано, методы §§ 1, 3 и 4 позволяют строить схемы сумматоров сложности $O(n \log n)$. Однако сложность может быть приведена к линейной при помощи следующего универсального алгоритма линеаризации [2, 4]. В нём используются два метода (условно назовём их методом A и методом B) реализации набора функций $F_1, \ldots, F_n$. Основная идея состоит в том, что при надлежащем выборе параметров сложность строящейся схемы будет «близка» к сложности метода A, а глубина — к глубине метода B.

Пусть k — натуральное число и $s = \lceil n/k \rceil$. Схема сумматора строится из следующих подсхем.

1) Вычисляются все $x_i = a_i + b_i$, $y_i = a_i b_i$ и $u_i = a_i \vee b_i$, где a_i и b_i — входы схемы сумматора. Для упрощения изложения положим $x_i = y_i = 0$, $u_i = 1$ для всех $i \geqslant n$.

2) При всех $j = 0, \ldots, s-1$ реализуются наборы функций $F_l(jk)$ и $P_l(jk)$, $1 \leqslant l \leqslant k$, от переменных u_i и y_i методом A. Пусть $Y_j = F_k(jk)$ и $U_j = P_k(jk)$.

3) Согласно (5) имеем

$$F_{jk} = Y_{j-1} \vee U_{j-1}(Y_{j-2} \vee U_{j-2}(\ldots(Y_1 \vee U_1 Y_0)\ldots)).$$

Реализация набора функций $\{F_{jk}\}$, $1 \leqslant j \leqslant s$, от переменных u_i и y_i сводится к реализации набора функций вида F_j от переменных U_i и Y_i. Выполним её методом B.

4) Для каждого $1 \leqslant l \leqslant k-1$ вычисляются все F_{jk+l}, $l = 1, \ldots, k-1$, по формулам $F_{jk+l} = F_l(jk) \vee P_l(jk) F_{jk}$ (фактически реализуется сумматор k-разрядного и одноразрядного чисел).

5) Окончательно разряды суммы определяются как $z_i = x_i + F_i$, $i < n$, и $z_n = F_n$.

Обозначим через $L_A(n)$, $D_A(n)$, $L_B(n)$, $D_B(n)$ сложность и глубину методов A и B соответственно. Тогда сложность построенной схемы не превосходит $sL_A(k) + L_B(s) + 7n$, так как сложность подсхем из 1)–5) не превосходит соответственно $3n$, $sL_A(k) + n$, $L_B(s)$, $2n$ и n. Аналогично, глубина схемы не превосходит величины $D_A(k) + D_B(s) + 4$, так как глубина подсхем 1)–5) не превосходит 1, $D_A(k)$, $D_B(s)$, 2 и 1 соответственно.

Заметим, что блок, состоящий из подсхем 2)–4), является схемой, реализующей систему функций $F_1, \ldots, F_n$.

Рассмотрим применение описанного алгоритма к получению конкретных оценок. В стандартном методе все функции $F_1, \ldots, F_n$ вычисляются в одной цепочке с глубиной и сложностью $2n - 2$. Линейная сложность и глубина $O(\sqrt{n})$ (как для реализации сумматора, так и для реализации системы функций $F_1, \ldots, F_n$) получаются, если в указанном алгоритме выбрать $k = O(\sqrt{n})$ и стандартный метод в качестве методов A и B.

Выбрав $k = O(\log n)$, только что полученный метод — в качестве метода А, а один из методов §§ 1, 3, 4 — в качестве метода В, получаем линеаризованную схему для метода из соответствующего параграфа с увеличением глубины на $O(\sqrt{\log n})$.

Для того чтобы построить схему линейной сложности с увеличением глубины на $O(\log\log n)$ (относительно глубины базовой схемы из §§ 1, 3, 4), в качестве метода A следует выбирать метод линейной сложности и логарифмической глубины (например, описанный абзацем выше).

Аналогичным образом приводится к линейной и сложность схемы, полученной методом Храпченко (см. также [4]). Например, положив $k = O\left(c^{\sqrt{\log_2 n}}\right)$, где c — константа из § 2, и выбрав в качестве методов A и B базовый метод Храпченко из теоремы 1, можно построить схему сложности $O\left(c_0^{\sqrt[4]{\log_2 n}} n\right)$, где c_0 — некоторая константа, и глубины $\log_2 n + \sqrt{2\log_2 n} + O(\sqrt[4]{\log n})$.

Далее выбором $k = O\left(c_0^{\sqrt[4]{\log_2 n}}\right)$ сложность схемы, полученной выше рассмотренным методом в качестве метода B и произвольного метода линейной сложности и логарифмической глубины в качестве метода A (с увеличением глубины на $O(\sqrt[4]{\log n})$), приводится к линейной.

Наконец, заметим, что для любого из перечисленных методов линейной сложности можно построить схему сложности $(9 + o(1))n$ с увеличением глубины на $O(\log\log n)$. Для этого следует выбрать $k = O(\log\log n)$ и в качестве метода A использовать стандартный метод, а в качестве метода B — исходный метод.

Более того, для «аддитивных» вариантов метода «золотого сечения» и метода Храпченко, которые основаны на представлении (1), можно получить верхнюю оценку сложности линеаризованного метода $(8+o(1))n$. Для этого рассмотрим «аддитивный» аналог описанного алгоритма линеаризации, использующий представление (1) и вычисление функций F_i^+. Напомним, что

$$F_k^+(m) = y_{m+k-1} + x_{m+k-1}(y_{m+k-2} + x_{m+k-2}(\ldots(y_{m+1} + x_{m+1}y_m)\ldots)).$$

Пусть $P_k^+(m) = x_{m+k-1} \cdot \ldots \cdot x_{m+1} \cdot x_m$. Для функций $F_k^+(0)$ и $P_k^+(0)$ будем использовать сокращённые обозначения F_k^+ и P_k^+.

Приведём краткое описание «аддитивного» алгоритма линеаризации.

Пусть методы A и B позволяют реализовать систему функций $F_1^+, \ldots, F_n^+$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ и положим $s = \lceil n/k \rceil$ (для краткости будем считать, что $n = sk$).

1) Вычисляются все $x_i = a_i + b_i$ и $y_i = a_i b_i$.

2) Для всех $j = 0, \ldots, s-1$ методом A реализуются наборы функций $F_l^+(jk)$ и $P_l^+(jk)$, $l = 1, \ldots, k$. Пусть $Y_j = F_k^+(jk)$ и $X_j = P_k^+(jk)$.

3) Методом B реализуется набор функций

$$F_{jk}^+ = Y_{j-1} + X_{j-1}(Y_{j-2} + X_{j-2}(\ldots(Y_1 + X_1 Y_0)\ldots)),$$

где $j = 1, \ldots, s$.

4) Для каждого $j = 1, \ldots, s-1$ по формулам $z_{jk+l} = (x_{jk+l} + F_l^+(jk)) + P_l^+(jk) F_{jk}^+$, и $z_n = F_n^+$ вычисляются все z_{jk+l}, $l = 1, \ldots, k-1$.

На основании рассуждений, аналогичных тем, которые были проведены выше, сложность и глубина построенной схемы не превосходят соответственно $sL_A(k) + L_B(s) + 6n$ и $D_A(k) + D_B(s) + 3$. Экономия n операций в оценке сложности (относительно «дизъюнктивного» алгоритма из начала параграфа) достигается за счёт того, что не нужно вычислять u_i.

Схемы линейной сложности для «аддитивных» методов «золотого сечения» и метода Храпченко строятся так же, как и для «дизъюнктивных» аналогов. Применяя алгоритм, в котором один из этих линеаризованных методов является методом B, стандартный метод — методом A, $k = O(\log\log n)$ для метода «золотого сечения» и $k = O(\sqrt[4]{\log n})$ для метода Храпченко, можно построить сумматор сложности $(8 + O(1/k))n$ и глубины $D_B(n) + O(k)$.

Таким образом, справедлива теорема, первая часть которой доказана в [4].

Теорема 2. *Существуют схемы сумматора n-разрядных чисел*
1) сложности $8n + O\left(n/\sqrt[4]{\log n}\right)$ и глубины

$$\log_2 n + \sqrt{2\log_2 n} + O\left(\sqrt[4]{\log n}\right),$$

2) сложности $8n + O(n/\log\log n)$ и глубины $1,441 \log_2 n + O(\log\log n)$,
3) сложности $9n + O(n/\log\log n)$ и глубины $1,262 \log_2 n + O(\log\log n)$.

§ 7. Приложение

В каждой клетке таблицы указывается максимальное из чисел n, для которого метод соответствующей строки позволяет построить схему для F_n с глубиной, соответствующей данному столбцу (ЗС — метод «золотого сечения», Хр — метод Храпченко, Хр2 — уточнённый метод Храпченко, Тр — троичный метод, Тр2 — вариант троичного метода из § 4). Последняя строка (в которой отражены результаты § 5) дополнена при помощи правил (11)–(14).

Для оценки глубины схемы сумматора в методах ЗС, Хр и Хр2 к глубине F_n следует прибавить 1, а для остальных методов воспользоваться леммой 6. Можно заметить, что, в частности, для имеющих прикладной интерес значений $n = 16, 32, 64, 128, 256$ троичный метод и метод «золотого сечения» позволяют реализовать сумматор с глубиной, не большей чем в методе Храпченко (и при этом имеют преимущество в сложности реализации).

Таблица

D_F	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ЗС	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
Хр	–	2	–	4	8	–	16	32	64	–	128	256	512	1024
Хр2	2	3	5	8	13	21	37	63	105	184	321	573	993	1729
Тр	2	3	5	9	14	27	41	81	122	243	365	729	1094	2187
Тр2	2	3	5	10	15	29	46	86	137	258	410	775	1230	2324
§ 5	2	3	5	10	17	30	55	101	164	303	491	910	1473	2728

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
2. **Офман Ю. П.** Алгоритмическая сложность дискретных функций // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 1. С. 48–51.
3. **Редькин Н. П.** О минимальной реализации двоичного сумматора // Проблемы кибернетики. Вып. 38. М.: Наука, 1981. С. 181–216.
4. **Храпченко В. М.** Об асимптотической оценке времени сложения параллельного сумматора // Проблемы кибернетики. Вып. 19. М.: Наука, 1967. С. 107–120.
5. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2002.
6. **Gashkov S. B., Andreev A. E., Lu A.** Optimization of comparator architecture // US patent application. 2004. № 6691283.

7. **Grinchuk M. I., Bolotov A. A.** Process for designing comparators and adders of small depth // US patent application. 2006. № 7020865.

Адрес авторов:

МГУ, мех.-мат. факультет,
Ленинские горы,
119992 Москва, Россия.

Статья поступила
4 октября 2006 г.