ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2007. Серия 1. Том 14, № 1. 70–86

УДК 519.714

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ МЕТОДЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛА БЕСПОВТОРНЫХ СЛОВ*)

Р. М. Колпаков

В статье представлена модификация метода оценки снизу числа бесповторных слов над конечным алфавитом. Эта модификация позволяет получить эффективную нижнюю оценку экспоненты роста числа трёхбуквенных слов, не содержащих периодичностей порядка, большего предельно минимально возможной величины 7/4.

Введение

В статье продолжены начатые в [4] исследования, посвящённые получению эффективных нижних оценок числа бесповторных слов над трёхбуквенным алфавитом. Под словом понимается произвольная конечная последовательность $w = a_1 \cdots a_n$ символов из некоторого алфавита. Число n называется *длиной* слова w и обозначается через $|w|$. Символ a_i слова w обозначается через $w[i]$. Слово $a_i \cdots a_j$, где $1 \leq i \leq j \leq n$, называется *подсловом* слова w и обозначается через $w[i:j]$. Для любого $i = 1, \ldots, n$ подслово $w[1:i]$ ($w[i:n]$) называется *преффиксом* (*суффиксом*) слова w. Натуральное число p называется *периодом* слова w, если $a_i = a_{i+p}$ для каждого $i = 1, \ldots, n-p$. Если p — минимальный период слова w длины n, отношение n/p называется *порядком* слова w. Два слова w' и w'' одинаковой длины n над некоторым алфавитом Σ называются *изоморфными*, если существует биекция $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ такая, что $w''[i] = \sigma(w'[i])$, $i = 1, \ldots, n$.

Число элементов любого конечного множества A обозначим через $|A|$. Произвольное множество слов W называется *факторным*, если для любого слова w из W все подслова слова w также содержатся в W. Подмножество всех слов длины n множества W будем обозначать через $W(n)$. Нетрудно показать (см., например, [8, 5]), что если множество W является факторным, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|W(n)|}$, который мы

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (гранты МД–3635.2005.1 и НШ–5400.2006.) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00994).

называем *предельной экспонентой роста числа слов* множества W. Для любого слова w длины не более n через $W^{(w)}(n)$ обозначим множество всех слов из $W(n)$, суффиксом которых является слово w.

Квадратом называется слово вида uu, где u — произвольное непустое слово. Избегая двусмысленности*, под *периодом* квадрата uu мы будем понимать длину слова u. Аналогичным образом, *кубом* называется слово вида uuu для произвольного непустого слова u. Слово называется *бесквадратным* (*бескубным*), если в нём нет подслов, являющихся квадратами (кубами).

Нетрудно видеть, что над двухбуквенным алфавитом не существует бесквадратных слов, имеющих длину, большую 3. С другой стороны, согласно классическим результатам из [16, 17] норвежского математика А. Туэ существуют сколь угодно длинные бесквадратные слова над трёхбуквенным алфавитом и сколь угодно длинные бескубные слова над двухбуквенным алфавитом. Таким образом, если обозначить через $S^{\langle \mathrm{sf} \rangle}(n)$ число различных бесквадратных слов длины n над трёхбуквенным алфавитом и через $S^{\langle \mathrm{cf} \rangle}(n)$ число различных бескубных слов длины n над двухбуквенным алфавитом, то $S^{\langle \mathrm{sf} \rangle}(n) > 0$ и $S^{\langle \mathrm{cf} \rangle}(n) > 0$ при любом натуральном n. Результаты А. Туэ для трёхбуквенных слов усилила Ф. Дежан в [9]. Она установила существование сколь угодно длинных бесквадратных слов над трёхбуквенным алфавитом, не содержащих подслов порядка более 7/4. С другой стороны, было показано, что в любом достаточно длинном трёхбуквенном слове содержится подслово порядка не менее 7/4. Таким образом, число 7/4 является предельным минимальным порядком запретных подслов для трёхбуквенных слов сколь угодно большой длины. Поэтому трёхбуквенные слова, не содержащие подслов порядка более 7/4, будем называть *предельно бесповторными* трёхбуквенными словами. Ф. Дежан также высказала гипотезу, что предельный минимальный порядок запретных подслов для k-буквенных слов сколь угодно большой длины равен 7/5 при $k = 4$ и $k/(k-1)$ при $k \geqslant 5$. Эта гипотеза была доказана для $k = 4$ в [15] и для $5 \leqslant k \leqslant 11$ в [12]. Вопрос о справедливости гипотезы Ф. Дежан для $k > 11$ в настоящее время остаётся открытым. Обозначим через $S^{\langle \mathrm{lf} \rangle}(n)$ число различных предельно бесповторных трёхбуквенных слов длины n. Из результата Ф. Дежан вытекает, что $S^{\langle \mathrm{lf} \rangle}(n) > 0$ при любом n.

Отметим, что множество всех бесквадратных трёхбуквенных слов, множество всех бескубных двухбуквенных слов и множество всех пре-

*Отметим, что период квадрата, вообще говоря, может не быть минимальным периодом этого слова.

дельно бесповторных трёхбуквенных слов являются, очевидно, факторными множествами. Поэтому существуют предельные экспоненты $\gamma^{\langle\mathrm{sf}\rangle} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{S^{\langle\mathrm{sf}\rangle}(n)}$, $\gamma^{\langle\mathrm{cf}\rangle} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{S^{\langle\mathrm{cf}\rangle}(n)}$ и $\gamma^{\langle\mathrm{lf}\rangle} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{S^{\langle\mathrm{lf}\rangle}(n)}$ роста числа слов этих множеств. В [7] показано, что с ростом n величины $S^{\langle\mathrm{sf}\rangle}(n)$ и $S^{\langle\mathrm{cf}\rangle}(n)$ растут экспоненциально: $S^{\langle\mathrm{sf}\rangle}(n) \geqslant 6 \cdot 1,032^n$ и $S^{\langle\mathrm{cf}\rangle}(n) \geqslant 2 \cdot 1,080^n$, т. е. $\gamma^{\langle\mathrm{sf}\rangle} \geqslant 1,032$ и $\gamma^{\langle\mathrm{cf}\rangle} \geqslant 1,080$. В дальнейшем в ряде работ* нижняя оценка для $\gamma^{\langle\mathrm{sf}\rangle}$ последовательно усиливалась. Наилучшими к настоящему времени верхними оценками для $\gamma^{\langle\mathrm{sf}\rangle}$ и $\gamma^{\langle\mathrm{cf}\rangle}$ являются оценки $\gamma^{\langle\mathrm{sf}\rangle} < 1,30178858$ и $\gamma^{\langle\mathrm{cf}\rangle} < 1,4576$, полученные в работах [14] и [10] соответственно. В [13] установлен экспоненциальный рост числа предельно бесповторных слов при стремлении длины слов к бесконечности как в случае трёхбуквенного алфавита, так и в случае четырёхбуквенного алфавита. Однако вытекающая из результатов данной статьи нижняя оценка для $\gamma^{\langle\mathrm{lf}\rangle}$ оказывается предельно близкой к 1. В [4] предложен новый метод оценки снизу числа бесповторных слов над конечными алфавитами. С помощью этого метода были получены оценки $\gamma^{\langle\mathrm{sf}\rangle} \geqslant 1,30125$ и $\gamma^{\langle\mathrm{cf}\rangle} \geqslant 1,456975$. Основным недостатком предложенного метода является большой объём компьютерных вычислений, необходимый для его реализации. В частности, с помощью данного метода нам не удалось оценить снизу величину $\gamma^{\langle\mathrm{lf}\rangle}$ вследствие чрезмерно большого объёма необходимых для этого компьютерных вычислений. В данной статье предлагается модификация метода из [4], для реализации которой требуется существенно меньший объём компьютерных вычислений. Используя предложенную модификацию, мы получаем оценки $\gamma^{\langle\mathrm{sf}\rangle} \geqslant 1,30173$ и $\gamma^{\langle\mathrm{lf}\rangle} \geqslant 1,245$. Из сравнения полученной для $\gamma^{\langle\mathrm{sf}\rangle}$ оценки с приведённой выше верхней оценкой для $\gamma^{\langle\mathrm{sf}\rangle}$ вытекает, что нам удалось оценить $\gamma^{\langle\mathrm{sf}\rangle}$ с точностью до $0,0001$, из чего следует высокая эффективность предложенной модификации.

Для получения нижней оценки предельных экспонент $\gamma^{\langle\mathrm{sf}\rangle}$ и $\gamma^{\langle\mathrm{lf}\rangle}$ мы будем рассматривать слова над алфавитом $\Sigma = \{0,1,2\}$. Множество всех таких слов будем обозначать через $\mathcal{L}$.

1. Оценка числа бесквадратных трёхбуквенных слов

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех бесквадратных слов из $\mathcal{L}$. Пусть m — натуральное число, $m > 2$, и w', w'' — два слова из $\mathcal{F}(m)$. Слово w'' назовём *потомком* слова w', если $w'[2:m] = w''[1:m-1]$ и $w'w''[m] = w'[1]w'' \in \mathcal{F}(m+1)$. В этом случае слово w' назовём *предком*

*Обзор работ, посвящённых оценке числа бесповторных слов, можно найти в [6].

слова w''. Так как $w'w'[m] \notin \mathcal{F}(m+1)$, то любое слово имеет не более двух потомков. Аналогично, любое слово может иметь не более двух предков. Индуктивным образом введём понятие тупиковых слов. Слово w из $\mathcal{F}(m)$ назовём *тупиковым справа* (*тупиковым слева*) тогда и только тогда, когда w удовлетворяет одному из двух следующих условий:

a) *Базис индукции.* Слово w не имеет ни одного потомка (предка).

b) *Индуктивный переход.* Все потомки (предки) слова w являются тупиковыми справа (тупиковыми слева).

Под *тупиковым* словом будем понимать слово, являющееся тупиковым справа или тупиковым слева. Обозначим через $\mathcal{L}_m$ множество всех слов из $\mathcal{L}$, не содержащих в качестве подслов тупиковых слов из $\mathcal{F}(m)$. Через $\mathcal{F}_m$ обозначим множество всех бесквадратных слов из $\mathcal{L}_m$. Отметим, что слово является тупиковым тогда и только тогда, когда любое изоморфное ему слово также является тупиковым. Поэтому имеет место следующий очевидный факт.

Утверждение 1. *Для любых изоморфных слов w', w'' и любом $n \geqslant |w'|$ справедливо равенство $|\mathcal{F}_m^{(w')}(n)| = |\mathcal{F}_m^{(w'')}(n)|$.*

Через $\mathcal{F}'(m)$ обозначим множество всех слов w из $\mathcal{F}(m)$ таких, что $w[1]=0$ и $w[2]=1$. Очевидно, что для любого слова из $\mathcal{F}(m)$ существует единственное изоморфное ему слово из $\mathcal{F}'(m)$. Пусть w', w'' — слова из $\mathcal{F}'(m)$. Слово w'' назовём *приведённым потомком* слова w', если w'' изоморфно некоторому потомку слова w'. В этом случае слово w' назовём *приведённым предком* слова w''. Обозначим через $\mathcal{F}''(m)$ множество всех слов из $\mathcal{F}'(m)$, не являющихся тупиковыми. В силу существования сколь угодно длинных бесквадратных слов над Σ это множество непусто для любого m. Положим $s = |\mathcal{F}''(m)|$. Занумеруем числами от 1 до s все слова из $\mathcal{F}''(m)$ в лексикографическом порядке. Определим квадратную матрицу $\Delta_m = (\delta_{ij})$ порядка s следующим образом: $\delta_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда i-е слово из $\mathcal{F}''(m)$ является приведённым предком j-го слова из $\mathcal{F}''(m)$; в противном случае $\delta_{ij} = 0$. Так как все элементы матрицы Δ_m являются неотрицательными числами, то (см., например, [1]) среди её собственных значений найдётся максимальное по модулю неотрицательное вещественное числое r, которому соответствует некоторый собственный вектор $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_s)$ с неотрицательными компонентами. Допустим, что $r > 1$ и все компоненты вектора $\tilde{x}$ положительны*. Обозначим через w_i i-е слово множества $\mathcal{F}''(m)$, $i = 1, \ldots, s$. При $n \geqslant m$ положим $S_m(n) = \sum\limits_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_i)}(n)|$ и оценим эту величину снизу. Для этого

*Для определённости будем полагать $x_1 = 1$.

индуктивным образом оценим снизу величину $S_m(n+1)$ через $S_m(n)$.

Сначала получим оценки для $|\mathcal{F}_m^{(w_i)}(n+1)|$ при $i = 1, \ldots, s$. Очевидно, что

$$|\mathcal{F}_m^{(w_i)}(n+1)| = |\mathcal{G}^{(w_i)}(n+1)| - |\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)|, \qquad (1)$$

где $\mathcal{G}^{(w_i)}(n+1)$ — множество всех слов w из $\mathcal{L}_m^{(w_i)}(n+1)$ таких, что слова $w[1:n]$ и $w[n-m+1:n+1]$ являются бесквадратными, и $\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)$ — подмножество всех таких слов из $\mathcal{G}^{(w_i)}(n+1)$, что их суффикс является квадратом. Обозначим через $\pi(i)$ множество всех приведённых предков слова w_i. Учитывая утверждение 1, легко заметить, что

$$|\mathcal{G}^{(w_i)}(n+1)| = \sum_{w \in \pi(i)} |\mathcal{F}_m^{(w)}(n)|. \qquad (2)$$

Теперь оценим сверху величину$|\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)|$. Для любого слова w из $\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)$ среди всех квадратов, являющихся суффиксами слова w, выберем минимальный квадрат. Период этого квадрата обозначим через $\lambda(w)$. Очевидно, что $\lfloor (m+1)/2 \rfloor < \lambda(w) \leqslant \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Обозначим через $\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)$ подмножество всех слов w из $\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)$таких, что $\lambda(w) = j$. Тогда

$$|\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)| = \sum_{\lfloor (m+1)/2 \rfloor < j \leqslant \lfloor (n+1)/2 \rfloor} |\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)|. \qquad (3)$$

Выберем такое натуральное число $p \geqslant m$, что $n \geqslant 2p$. Рассмотрим множество $\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)$, где $j \leqslant p$. Пусть w — произвольное слово из этого множества. Тогда суффикс $w[n-2j+2:n+1]$ слова w является квадратом, не содержащим в качестве подслов ни других квадратов, ни тупиковых слов из $\mathcal{F}(m)$ и содержащим в качестве суффикса слово w_i. Пусть $v_1, \ldots, v_t$ — всевозможные квадраты периода j, удовлетворяющие данным условиям. Обозначим через $\mathcal{H}_{j,k}^{(w_i)}(n+1)$ подмножество всех слов из $\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)$, имеющих в качестве суффикса квадрат v_k, $k = 1, \ldots, t$. Пусть $w \in \mathcal{H}_{j,k}^{(w_i)}(n+1)$. Поскольку префикс $w[1:n]$ является бесквадратным, то $w[n-2j+1] \neq w[n-2j+2] = v_k[1]$ и $w[n-2j+1] \neq w[n-j+1] = v_k[j]$, при этом $v_k[1] = w[n-j+2] \neq w[n-j+1] = v_k[j]$. Следовательно, символ $w[n-2j+1]$ однозначно определяется квадратом v_k как символ из алфавита Σ, отличный от двух различных символов $v_k[1]$ и $v_k[j]$. Обозначив этот символ через b_k, получаем, что квадрат v_k однозначно определяет подслово $w[n-2j+1:n]$ как слово $b_k v_k[1:2j-1]$. Таким образом, если это слово не является бесквадратным или в качестве подслова содержит тупиковое слово из $\mathcal{F}(m)$, то $\mathcal{H}_{j,k}^{(w_i)}(n+1) = \emptyset$. Пусть $b_k v_k[1:2j-1] \in \mathcal{F}_m$.

Тогда положим $u_k = b_k v_k[1 : m-1] = w[n-2j+1 : n-2j+m]$. Поскольку слово w как элемент множества $\mathcal{H}_{j,k}^{(w_i)}(n+1)$ однозначно определяется своим префиксом $w[1 : n-2j]$, имеем $|\mathcal{H}_{j,k}^{(w_i)}(n+1)| \leqslant |\mathcal{F}_m^{(u_k)}(n-2j+m)|$. Обозначим через u'_k слово из $\mathcal{F}'(m)$, изоморфное слову u_k. Тогда в силу утверждения 1 имеем

$$|\mathcal{H}_{j,k}^{(w_i)}(n+1)| \leqslant |\mathcal{F}_m^{(u'_k)}(n-2j+m)|.$$

Таким образом, обозначив через $U_j(w_i)$ множество всех слов* u'_k, получаем

$$|\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)| = \sum_{k=1}^{t} |\mathcal{H}_{j,k}^{(w_i)}(n+1)| \leqslant \sum_{u \in U_j(w_i)} |\mathcal{F}_m^{(u)}(n-2j+m)|. \qquad (4)$$

Теперь рассмотрим множество $\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)$ при $j > p$. Отметим, что в этом случае $j > m$. Пусть w — произвольное слово из $\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)$. Тогда имеем $w[n-2j+2 : n-j+1] = w[n-j+2 : n+1]$, т. е. $w[n-j-m+2 : n-j+1] = w_i$, и слово w однозначно определяется своим префиксом $w[1 : n-j-m+1]$. Следовательно, в этом случае справедливо неравенство

$$|\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)| \leqslant |\mathcal{F}_m^{(w_i)}(n-j+1)|. \qquad (5)$$

Из (3) с учётом неравенств (4) и (5) следует, что

$$|\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)| \leqslant A_p^{(w_i)}(n+1) + B_p^{(w_i)}(n+1), \qquad (6)$$

где

$$\begin{aligned} A_p^{(w_i)}(n+1) &= \sum_{\lfloor (m+1)/2 \rfloor < j \leqslant p} \left(\sum_{u \in U_j(w_i)} |\mathcal{F}_m^{(u)}(n-2j+m)| \right), \\ B_p^{(w_i)}(n+1) &= \sum_{p < j \leqslant \lfloor (n+1)/2 \rfloor} |\mathcal{F}_m^{(w_i)}(n-j+1)|. \end{aligned}$$

Теперь получим нижнюю оценку для $S_m(n+1)$. Используя равенство (1), имеем

$$S_m(n+1) = \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{G}^{(w_i)}(n+1)| - \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)|. \qquad (7)$$

*Отметим, что вообще говоря среди слов u'_k могут встречаться одинаковые слова, т. е. одно и тоже слово может содержаться в множестве $U_j(w_i)$ несколько раз.

Применяя равенство (2) и учитывая, что вектор $\tilde{x}$ является собственным вектором матрицы Δ_m, соответствующим собственному значению r, получаем

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{G}^{(w_i)}(n+1)| = \sum_{i=1}^{s}\bigl(x_i \sum_{w\in\pi(i)} |\mathcal{F}_m^{(w)}(n)|\bigr)$$

$$= (x_1; x_2; \ldots; x_s)\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \ldots & \delta_{s1} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{s2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{1s} & \delta_{2s} & \ldots & \delta_{ss} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |\mathcal{F}_m^{(w_1)}(n)| \\ |\mathcal{F}_m^{(w_2)}(n)| \\ \vdots \\ |\mathcal{F}_m^{(w_s)}(n)| \end{pmatrix}$$

$$= r\cdot (x_1; x_2; \ldots; x_s)\begin{pmatrix} |\mathcal{F}_m^{(w_1)}(n)| \\ |\mathcal{F}_m^{(w_2)}(n)| \\ \vdots \\ |\mathcal{F}_m^{(w_s)}(n)| \end{pmatrix} = r\cdot S_m(n). \quad (8)$$

Для оценки снизу второй суммы из правой части равенства (7) используем равенство (6):

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)| \leqslant \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot A_p^{(w_i)}(n+1) + \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot B_p^{(w_i)}(n+1), \quad (9)$$

где

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot B_p^{(w_i)}(n+1) = \sum_{p<j\leqslant\lfloor (n+1)/2\rfloor}\left(\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_i)}(n-j+1)|\right)$$

$$= \sum_{p<j\leqslant\lfloor (n+1)/2\rfloor} S_m(n-j+1). \quad (10)$$

Обозначив через $\zeta_j^{(k)}(w_i)$ число слов из множества $U_j(w_i)$, совпадающих с w_k, положим $\eta_k(j) = \sum\limits_{i=1}^{s} x_i \cdot \zeta_j^{(k)}(w_i)$, $k = 1, \ldots, s$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \cdot A_p^{(w_i)}(n+1) = \sum_{\lfloor (m+1)/2\rfloor<j\leqslant p}\ \sum_{i=1}^{s} x_i\left(\sum_{u\in U_j(w_i)} |\mathcal{F}_m^{(u)}(n-2j+m)|\right)$$

$$= \sum_{\lfloor (m+1)/2\rfloor<j\leqslant p}\ \sum_{k=1}^{s} \eta_k(j)\cdot |\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-2j+m)|. \quad (11)$$

Фиксируем такое натуральное $q \geqslant 2p - m$, что $n \geqslant q + m$. Для удобства сумму (11) представим в виде

$$\sum_{d=d_0}^{q} \sum_{k=1}^{s} \eta'_k(d) \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-d)|,$$

где $d_0 = 2 \cdot \lfloor (m+3)/2 \rfloor - m$, $\eta'_k(d) = \eta_k\bigl((d+m)/2\bigr)$ в случае, если $d+m$ чётно, и $\eta'_k(d) = 0$ в противном случае. Оценим эту сумму сверху некоторой суммой вида $\sum\limits_{d=d_0}^{q} \rho_d \cdot S_m(n-d)$ следующим образом. Будем последовательно вычислять коэффициенты ρ_d этой суммы при $d = d_0, d_0+1, \ldots, q$. Для каждого $d = d_0, d_0+1, \ldots, q-1$ наряду с числом ρ_d будем также вычислять числа $\eta''_1(d+1), \ldots, \eta''_s(d+1)$ такие, что

$$\sum_{j=d_0}^{d+1} \sum_{k=1}^{s} \eta'_k(j) \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-j)| \leqslant \sum_{k=1}^{s} \eta''_k(d+1) \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-d-1)| + \sum_{j=d_0}^{d} \rho_j \cdot S_m(n-j). \quad (12)$$

Для $d = d_0$ положим $\rho_{d_0} = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant s} (\eta'_k(d_0)/x_k)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{s} \eta'_k(d_0) \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-d_0)| = \rho_{d_0} \cdot S_m(n-d_0) + \sum_{k=1}^{s} \nu_k \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-d_0)|,$$

где $\nu_k = \eta'_k(d_0) - \rho_{d_0} \cdot x_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, s$. Обозначим через $\tilde{\nu}$ вектор $(\nu_1; \ldots; \nu_s)$ и рассмотрим вектор $\tilde{\nu}' = \Delta_m \tilde{\nu}$. Пусть $\tilde{\nu}' = (\nu'_1; \ldots; \nu'_s)$. Из соотношений (1) и (2) вытекает, что

$$|\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-d_0)| \leqslant |\mathcal{G}^{(w_i)}(n+1)| = \sum_{w \in \pi(k)} |\mathcal{F}_m^{(w)}(n-d_0-1)|$$

при любом $k = 1, \ldots, s$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{s} \nu_k \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-d_0)| \leqslant \sum_{k=1}^{s} \left(\nu_k \cdot \sum_{w \in \pi(k)} |\mathcal{F}_m^{(w)}(n-d_0-1)| \right) = \sum_{k=1}^{s} \nu'_k \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-d_0-1)|.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=d_0}^{d_0+1} \sum_{k=1}^{s} \eta'_k(j) \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-j)| \leqslant \rho_{d_0} \cdot S_m(n-d_0) + \sum_{k=1}^{s} \eta''_k(d_0+1) \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-d_0-1)|, \quad (13)$$

где $\eta''_k(d_0+1) = \eta'_k(d_0+1)+\nu'_k$. Предположим, что для некоторого d такого, что $d_0 < d < q$, уже получены числа $\rho_{d_0}, \ldots, \rho_{d-1}$ и $\eta''_1(d), \ldots, \eta''_s(d)$. Тогда мы полагаем $\rho_d = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant s}(\eta''_k(d)/x_k)$, $\tilde{\nu} = (\eta''_1(d) - \rho_d \cdot x_1, \ldots, \eta''_s(d) - \rho_d \cdot x_s)$ и $\tilde{\nu}' = \Delta_m \tilde{\nu}$. Положим также $\eta''_k(d+1) = \eta'_k(d+1) + \nu'_k$, где ν'_k — k-я координата вектора $\tilde{\nu}'$, $k = 1, \ldots, s$. Аналогично неравенству (13) в этом случае имеем неравенство

$$\sum_{k=1}^{s} \Big(\eta''_k(d) \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-d)| + \eta'_k(d+1) \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-d-1)|\Big) \leqslant \rho_d \cdot S_m(n-d) + \sum_{k=1}^{s} \eta''_k(d+1) \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-d-1)|.$$

Из этого неравенства вытекает справедливость неравенства (12) при каждом d. При $d = q$ мы полагаем $\rho_q = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant s}(\eta''_k(q)/x_k)$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{s} x_i A_p^{(w_i)}(n+1) = \sum_{d=d_0}^{q} \sum_{k=1}^{s} \eta'_k(d) \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n-d)| \leqslant \sum_{d=d_0}^{q} \rho_d \cdot S_m(n-d). \quad (14)$$

Для удобства обозначим через $\mathcal{P}_m^{(p,q)}(z)$ полином $\sum\limits_{d=d_0}^{q} \rho_d \cdot z^d$ от переменной z.

Пусть при некотором $\alpha > 1$ и каждом $i = m, m+1, \ldots, n-1$ выполняется неравенство $S_m(i+1) \geqslant \alpha S_m(i)$. Тогда при $i = m, m+1, \ldots, n-1$ имеем $S_m(i) \leqslant S_m(n)/\alpha^{n-i}$. Поэтому из (14) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{s} x_i A_p^{(w_i)}(n+1) \leqslant \sum_{d=d_0}^{q} \rho_d \cdot (S_m(n)/\alpha^d) = \mathcal{P}_m^{(p,q)}(1/\alpha) \cdot S_m(n).$$

Аналогичным образом из (10) следует, что

$$\sum_{i=1}^{s} x_i B_p^{(w_i)}(n+1) \leqslant \sum_{p<j\leqslant\lfloor(n+1)/2\rfloor} S_m(n)/\alpha^{j-1} < S_m(n)\cdot\sum_{j=p}^{\infty}\frac{1}{\alpha^j} = \frac{S_m(n)}{\alpha^{p-1}(\alpha-1)}.$$

Таким образом, из (9) имеем

$$\sum_{i=1}^{s} x_i\cdot|\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)| < S_m(n)\cdot\left(\mathcal{P}_m^{(p,q)}(1/\alpha)+\frac{1}{\alpha^{p-1}(\alpha-1)}\right).$$

Учитывая данное неравенство в совокупности с равенством (8), из соотношения (7) получим

$$S_m(n+1) > S_m(n)\cdot\left(r-\mathcal{P}_m^{(p,q)}(1/\alpha)-\frac{1}{\alpha^{p-1}(\alpha-1)}\right).$$

Следовательно, если α удовлетворяет неравенству

$$r-\mathcal{P}_m^{(p,q)}(1/\alpha)-\frac{1}{\alpha^{p-1}(\alpha-1)} \geqslant \alpha,$$

мы индуктивным образом получаем справедливость неравенства $S_m(n+1)\geqslant\alpha S_m(n)$ при любом n. Таким образом, в этом случае $S_m(n)=\Omega(\alpha^n)$. Так как порядок роста величины $S^{\langle\mathrm{sf}\rangle}(n)$ при $n\to\infty$, очевидно, не менее $S_m(n)$, из $S_m(n)=\Omega(\alpha^n)$ вытекает $S^{\langle\mathrm{sf}\rangle}(n)=\Omega(\alpha^n)$. Поэтому $\gamma^{\langle\mathrm{sf}\rangle}\geqslant\alpha$.

Для получения конкретной нижней оценки величины $\gamma^{\langle\mathrm{sf}\rangle}$ мы, используя компьютерные вычисления, рассмотрели параметры $m=45$, $p=52$ и $q=60$. Было установлено, что множество $\mathcal{F}''(45)$ состоит из 277316 различных слов, максимальное по модулю собственное значение r матрицы Δ_{45} равно* $1,302011$ и все компоненты собственного вектора, соответствующего этому значению, положительны. Далее, мы получили, что

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{45}^{(52,60)}(z) &= 3,759479\cdot z^{44}+3,176743\cdot z^{45}+6,048526\cdot z^{46}\\ &+ 7,120005\cdot z^{48}+14,679230\cdot z^{50}+41,594270\cdot z^{52}\\ &+ 37,431675\cdot z^{55}+40,471892\cdot z^{56}+32,780085\cdot z^{58}\\ &+ 5,235193\cdot z^{59}+275,705551\cdot z^{60}.\end{aligned}$$

*Здесь и далее мы приводим полученные числовые результаты с точностью до шести знаков после запятой.

Положим $\alpha = 1,30173$. Непосредственно было проверено, что

$$r - \mathcal{P}_{45}^{(52,60)}(1/\alpha) - \frac{1}{\alpha^{51}(\alpha-1)} \geqslant \alpha.$$

Кроме того, описанным выше индуктивным методом с очевидными модификациями, вытекающими из ограничения $n < q+m$, были установлены неравенства $S_{45}(n+1) \geqslant \alpha S_{45}(n)$ при каждом $n = 45, 46, \ldots, q+m-1 = 104$. Таким образом, было показано, что $\gamma^{\langle \mathrm{sf} \rangle} \geqslant 1,30173$.

2. Оценка числа предельно бесповторных трёхбуквенных слов

Аналогично нижней оценке для $\gamma^{\langle \mathrm{sf} \rangle}$ мы также можем получить нижнюю оценку для предельной экспоненты $\gamma^{\langle \mathrm{lf} \rangle}$ роста числа предельно бесповторных трёхбуквенных слов. Для этого обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех предельно бесповторных трёхбуквенных слов из $\mathcal{L}$. Под запретной периодичностью будем понимать периодичность порядка, большего чем $7/4$. Пусть m — натуральное число, $m > 2$. Аналогично случаю бесквадратных слов, для предельно бесповторных слов мы также можем ввести понятия потомка, предка и тупикового слова и обозначить через $\mathcal{L}_m$ множество всех слов из $\mathcal{L}$, не содержащих тупиковых слов из $\mathcal{F}(m)$ в качестве подслов, и через $\mathcal{F}_m$ множество всех предельно бесповторных слов из $\mathcal{L}_m$. Через $\mathcal{F}'(m)$ обозначим множество всех слов w из $\mathcal{F}(m)$ таких, что $w[1] = 0$ и $w[2] = 1$, и через $\mathcal{F}''(m)$ — множество всех слов из $\mathcal{F}'(m)$, не являющихся тупиковыми. Для слов из $\mathcal{F}''(m)$, аналогично случаю бесквадратных слов, мы вводим понятия приведённого потомка и приведённого предка, определяем квадратную матрицу Δ_m порядка s, где $s = |\mathcal{F}''(m)|$, и вычисляем максимальное по модулю неотрицательное собственное значение r этой матрицы. Если $r > 1$ и все компоненты соответствующего этому значению собственного вектора $\tilde{x} = (x_1; \ldots; x_s)$ положительны*, то обозначим через μ отношение максимальной компоненты вектора $\tilde{x}$ к его минимальной компоненте и при $n \geqslant m$ положим $S_m(n) = \sum\limits_{i=1}^{s} x_i \cdot |\mathcal{F}_m^{(w_i)}(n)|$, где w_i — i-ое слово множества $\mathcal{F}''(m)$, $i = 1, \ldots, s$.

Аналогично равенству (1) при $i = 1, \ldots, s$ имеем

$$|\mathcal{F}_m^{(w_i)}(n+1)| = |\mathcal{G}^{(w_i)}(n+1)| - |\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)|, \tag{15}$$

где $\mathcal{G}^{(w_i)}(n+1)$ — множество всех слов w из $\mathcal{L}_m^{(w_i)}(n+1)$ таких, что слова $w[1:n]$ и $w[n-m+1:n+1]$ являются предельно бесповторными,

*Для определённости будем полагать $x_1 = 1$.

и $\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)$ — подмножество всех слов множества $\mathcal{G}^{(w_i)}(n+1)$, содержащих в качестве суффикса некоторую запретную периодичность. Аналогично равенству (2) выполняется равенство

$$|\mathcal{G}^{(w_i)}(n+1)| = \sum_{w\in\pi(i)} |\mathcal{F}_m^{(w)}(n)|,$$

где $\pi(i)$ — множество всех приведённых предков слова w_i. Для любого слова w из $\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)$ обозначим через $\lambda(w)$ период минимальной запретной периодичности, являющейся суффиксом слова w. Тогда аналогично равенству (3) имеем

$$|\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)| = \sum_{\lfloor(4m+3)/7\rfloor<j\leqslant\lfloor 4n/7\rfloor} |\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)|,$$

где $\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)$ — подмножество всех слов w из $\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)$ таких, что $\lambda(w) = j$. Выберем такое натуральное $p \geqslant 4m/3 - 1$, что $n > \lfloor 7p/4\rfloor$. Пусть w — произвольное слово из множества $\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)$, где $j \leqslant p$. Тогда суффикс $w[n-\lfloor 7p/4\rfloor+1 : n+1]$ этого слова является запретной периодичностью, не содержащей в качестве подслов ни других запретных периодичностей, ни тупиковых слов из $\mathcal{F}(m)$ и содержащей в качестве суффикса слово w_i. Пусть $v_1,\dots,v_t$ — всевозможные запретные периодичности периода j, удовлетворяющие данным условиям. Обозначим через $\mathcal{H}_{j,k}^{(w_i)}(n+1)$ подмножество всех слов из $\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)$, имеющих в качестве суффикса запретную периодичность v_k, $k = 1,\dots,t$. Пусть $w \in \mathcal{H}_{j,k}^{(w_i)}(n+1)$. Тогда, как и в случае бесквадратных слов, символ $w[n-\lfloor 7j/4\rfloor]$ однозначно определяется периодичностью v_k как символ из алфавита Σ, отличный от двух различных символов $v_k[1]$ и $v_k[j]$. Обозначив этот символ через b_k, получаем, что подслово $w[n-\lfloor 7j/4\rfloor : n]$ однозначно определяется как слово $b_k v_k[1 : \lfloor 7j/4\rfloor]$. Пусть это слово принадлежит множеству $\mathcal{F}_m$. Обозначим через u'_k слово из $\mathcal{F}'(m)$, изоморфное слову $b_k v_k[1 : m-1]$. Аналогично неравенству (4) получаем неравенство

$$|\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)| \leqslant \sum_{u\in U_j(w_i)} |\mathcal{F}_m^{(u)}(n+m-\lfloor 7j/4\rfloor-1)|,$$

где $U_j(w_i)$ — множество всех слов* u'_k. Таким образом,

$$|\mathcal{H}^{(w_i)}(n+1)| \leqslant A_p^{(w_i)}(n+1) + \sum_{p<j\leqslant\lfloor 4n/7\rfloor} |\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)|, \qquad (16)$$

*Отметим, что так же, как и в случае бесквадратных слов, одно и тоже слово может содержаться в множестве $U_j(w_i)$ несколько раз.

где
$$A_p^{(w_i)}(n+1) = \sum_{\lfloor(4m+3)/7\rfloor<j\leqslant p}\left(\sum_{u\in U_j(w_i)}|\mathcal{F}_m^{(u)}(n+m-\lfloor 7j/4\rfloor-1)|\right).$$
Из соотношений (15) и (16) получаем
$$S_m(n+1)\geqslant \sum_{i=1}^{s}x_i\cdot|\mathcal{G}^{(w_i)}(n+1)| - \sum_{i=1}^{s}x_i\cdot|A_p^{(w_i)}(n+1)| \\ - \sum_{p<j\leqslant\lfloor 4n/7\rfloor}\left(\sum_{i=1}^{s}x_i\cdot|\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)|\right). \quad (17)$$
Аналогично равенству (8) справедливо равенство
$$\sum_{i=1}^{s}x_i\cdot|\mathcal{G}^{(w_i)}(n+1)| = r\cdot S_m(n). \quad (18)$$
Пусть $j>p$, т. е. $j\geqslant 4m/3$. Так как множества $\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)$ не пересекаются друг с другом, то имеем очевидную оценку
$$\sum_{i=1}^{s}x_i\cdot|\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)|\leqslant \max_{i=1,\dots,s}x_i\cdot|\mathcal{M}_j|, \quad (19)$$
где $\mathcal{M}_j=\bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)$. Ясно, что любое слово w из $\mathcal{M}_j$ однозначно определяется своим суффиксом $w[1:n-\lfloor 3j/4\rfloor]$, при этом $w[n+2-m-j]=w[n+2-m]=0$ и $w[n+3-m-j]=w[n+3-m]=1$. Таким образом, $|\mathcal{M}_j|\leqslant|\mathcal{M}'_j|$, где $\mathcal{M}'_j$ — множество всех слов w из $\mathcal{F}_m(n-\lfloor 3j/4\rfloor)$ таких, что $w[n+2-m-j]=0$ и $w[n+3-m-j]=1$. Рассмотрим множество $\mathcal{M}''_j$ всех слов w из $\mathcal{F}_m(n-\lfloor 3j/4\rfloor)$ таких, что $w[n+1-\lfloor 3j/4\rfloor-m]=0$ и $w[n+2-\lfloor 3j/4\rfloor-m]=1$. Имеется очевидное взаимно однозначное соответствие между словами из множеств $\mathcal{M}'_j$ и $\mathcal{M}''_j$. Поэтому $|\mathcal{M}'_j|=|\mathcal{M}''_j|$. Заметим также, что множество $\mathcal{M}''_j$ является объединением непересекающихся множеств $\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n-\lfloor 3j/4\rfloor)$, $i=1,\dots,s$, т. е.
$$|\mathcal{M}''_j|\leqslant\sum_{i=1}^{s}|\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n-\lfloor 3j/4\rfloor)|\leqslant S_m(n-\lfloor 3j/4\rfloor)/(\min_{i=1,\dots,s}x_i).$$
Следовательно, из (19) вытекает, что
$$\sum_{i=1}^{s}x_i\cdot|\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)|\leqslant(\max_{i=1,\dots,s}x_i)\cdot|\mathcal{M}'_j| = (\max_{i=1,\dots,s}x_i)\cdot|\mathcal{M}''_j| \\ \leqslant \mu\cdot S_m(n-\lfloor 3j/4\rfloor).$$

Таким образом,

$$\sum_{p<j\leqslant\lfloor 4n/7\rfloor}\left(\sum_{i=1}^{s} x_i\cdot|\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)|\right)\leqslant \mu\cdot\sum_{p<j\leqslant\lfloor 4n/7\rfloor} S_m(n-\lfloor 3j/4\rfloor). \quad (20)$$

Положим $\eta_k(j)=\sum\limits_{i=1}^{s} x_i\cdot\zeta_j^{(k)}(w_i)$, где $\zeta_j^{(k)}(w_i)$ — число слов из множества $U_j(w_i)$, совпадающих с w_k, $k=1,\ldots,s$. Тогда аналогично равенству (11) имеем

$$\sum_{i=1}^{s} x_i\cdot|A_p^{(w_i)}(n+1)|$$
$$=\sum_{\lfloor(4m+3)/7\rfloor<j\leqslant p}\ \sum_{k=1}^{s}\eta_k(j)\cdot|\mathcal{F}_m^{(w_k)}(n+m-\lfloor 7j/4\rfloor-1)|. \quad (21)$$

Фиксируем такое натуральное $q\geqslant\lfloor 7p/4\rfloor+1-m$, что $n\geqslant q+m$. Аналогично случаю бесквадратных слов, сумму (21) можно оценить сверху суммой вида $\sum\limits_{d=d_0}^{q}\rho_d\cdot S_m(n-d)$, где $d_0=\lfloor 7j_0/4\rfloor+1-m$ при $j_0=\lfloor(4m+3)/7\rfloor+1$.

Пусть при некотором $\alpha>1$ и каждом $i=m,m+1,\ldots,n-1$ выполняется неравенство $S_m(i+1)\geqslant\alpha S_m(i)$, т. е. $S_m(i)\leqslant S_m(n)/\alpha^{n-i}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{s} x_i\cdot|A_p^{(w_i)}(n+1)|\leqslant\sum_{d=d_0}^{q}\rho_d\cdot(S_m(n)/\alpha^d)=\mathcal{P}_m^{(p,q)}(1/\alpha)\cdot S_m(n), \quad (22)$$

где $\mathcal{P}_m^{(p,q)}(z)=\sum\limits_{d=d_0}^{q}\rho_d\cdot z^d$. Кроме того, из (20) вытекает, что

$$\sum_{p<j\leqslant\lfloor 4n/7\rfloor}\left(\sum_{i=1}^{s} x_i\cdot|\mathcal{H}_j^{(w_i)}(n+1)|\right)\leqslant\mu\cdot\sum_{p<j\leqslant\lfloor 4n/7\rfloor} S_m(n)/\alpha^{\lfloor 3j/4\rfloor}$$
$$<\mu S_m(n)\cdot\sum_{p<j}1/\alpha^{\lfloor 3j/4\rfloor}=\mu S_m(n)\cdot\left(\sum_{j\geqslant\lfloor 3(p+1)/4\rfloor}1/\alpha^j+\sum_{j\geqslant\lceil(p+1)/4\rceil}1/\alpha^{3j}\right)$$
$$=\mu S_m(n)\cdot\Big(1/\big(\alpha^{\lfloor(3p-1)/4\rfloor}(\alpha-1)\big)+1/\big(\alpha^{3\lfloor p/4\rfloor}(\alpha^3-1)\big)\Big).$$

Таким образом, из неравенства (17) с учётом соотношений (18) и (22) получаем

$$S_m(n+1) > S_m(n)\cdot\Big(r-\mathcal{P}_m^{(p,q)}(1/\alpha)-\mu\cdot\Big(1/\big(\alpha^{\lfloor(3p-1)/4\rfloor}(\alpha-1)\big) + 1/\big(\alpha^{3\lfloor p/4\rfloor}(\alpha^3-1)\big)\Big)\Big).$$

Следовательно, если

$$r-\mathcal{P}_m^{(p,q)}(1/\alpha)-\mu\cdot\Big(1/\big(\alpha^{\lfloor(3p-1)/4\rfloor}(\alpha-1)\big)+1/\big(\alpha^{3\lfloor p/4\rfloor}(\alpha^3-1)\big)\Big)\geqslant\alpha,$$

то $S_m(n+1)\geqslant\alpha S_m(n)$ при любом n, т. е. $S_m(n)=\Omega(\alpha^n)$. Поскольку порядок роста величины $S^{\langle\mathrm{lf}\rangle}(n)$ при $n\to\infty$ не меньше $S_m(n)$, получаем $S^{\langle\mathrm{lf}\rangle}(n)=\Omega(\alpha^n)$, т. е. $\gamma^{\langle\mathrm{lf}\rangle}\geqslant\alpha$.

Для получения конкретной оценки величины $\gamma^{\langle\mathrm{lf}\rangle}$ мы также использовали компьютерные вычисления с параметрами $m=42$, $p=72$, $q=85$ и установили, что множество $\mathcal{F}''(42)$ состоит из 36141 различных слов, максимальное по модулю собственное значение r матрицы Δ_{42} равно $1,247500$ и все компоненты соответствующего этому значению собственного вектора положительны. Далее, было показано, что

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{42}^{(72,85)}(z) &= 1,976268\cdot z^{42}+1,148062\cdot z^{44}+3,519576\cdot z^{45}\\ &+1,741046\cdot z^{47}+9,687624\cdot z^{49}+0,126312\cdot z^{50}+31,479339\cdot z^{52}\\ &+12,284335\cdot z^{53}+21.010557\cdot z^{54}+24.183001\cdot z^{56}+96.529327\cdot z^{61}\\ &+129,216325\cdot z^{64}+256,213310\cdot z^{66}+14,826731\cdot z^{67}+64,163103\cdot z^{68}\\ &+6,862805\cdot z^{69}+84,819931\cdot z^{70}+2,337610\cdot z^{72}+175,026144\cdot z^{73}\\ &+41,068102\cdot z^{74}+335,714818\cdot z^{75}+341,576384\cdot z^{78}+329,970329\cdot z^{80}\\ &+693,282157\cdot z^{81}+763,104210\cdot z^{82}+303,272754\cdot z^{83}+583,157071\cdot z^{84}\\ &+10510,070498\cdot z^{85}.\end{aligned}$$

Пусть $\alpha=1,245$. Непосредственно проверяется, что тогда выполняется неравенство

$$r-\mathcal{P}_{42}^{(72,85)}(1/\alpha)-\frac{1}{\alpha^{53}(\alpha-1)}-\frac{1}{\alpha^{54}(\alpha^3-1)}\geqslant\alpha.$$

Как и в случае бесквадратных слов, неравенства $S_{42}(n+1)\geqslant\alpha S_{42}(n)$ при $n=42,43,\ldots,q+m-1=126$ были получены аналогичным образом с учётом ограничения $n<q+m$. Таким образом, установлено, что $\gamma^{\langle\mathrm{lf}\rangle}\geqslant 1,245$.

3. Заключение

В заключение отметим, что согласно компьютерным экспериментам предложенный метод позволяет оценивать предельные экспоненты роста числа бесповторных слов с потенциально сколь угодно высокой точностью. Отметим также, что метод является достаточно универсальным: он может быть применён для оценки предельных экспонент роста числа слов над любым конечным алфавитом с любым, в том числе дробным, минимальным порогом для порядка запретных подслов (при условии, что рост числа слов является экспоненциальным). Более того, этот метод может быть легко модифицирован для случая, когда дополнительные ограничения накладываются на минимальное значение периода запретных подслов (см. [11]). Мы предполагаем, что данный метод может быть обобщён для оценки предельных экспонент роста числа слов, не содержащих в качестве подслов слов из языков, задаваемых термами (см., например, [3]). Другой интересной задачей является модификация предложенного метода для оценки снизу числа слов, не содержащих в качестве подслов слов вида uu', где u и u' имеют одинаковый буквенный состав (см., например, [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966.
2. **Евдокимов А. А.** О сильно ассиметричных последовательностях, порождённых конечным числом символов // Докл. АН СССР. 1968. Т. 179, № 6. С. 1268–1271.
3. **Зимин А. И.** Блокирующие множества термов // Математический сборник. 1982. Т. 119, № 3. С. 363–375.
4. **Колпаков Р. М.** Об оценке числа бесповторных слов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 2. С. 21–37.
5. **Baake M., Elser V., Grimm U.** The entropy of square-free words // Math. Comput. Modelling. 1997. V. 26, N 8–10. P. 13–26.
6. **Berstel J.** Growth of repetition-free words — a review // Theoret. Comput. Science. 2005. V. 340, N 2. P. 280–290.
7. **Brandenburg F.-J.** Uniformly growing k-th power-free homomorphisms // Theoret. Comput. Science. 1983. V. 23, N 1. P. 69–82.
8. **Brinkhuis J.** Nonrepetitive sequences on three symbols // Quart. J. Math. Oxford. 1983. V. 34, N 194. P. 145–149.
9. **Dejean F.** Sur un théorème de Thue // J. Combin. Theory. Ser. A. 1972. V. 13, N 1. P. 90–99.

10. Edlin A. The number of binary cube-free words of length up to 47 and their numerical analysis // J. Differ. Equations and Appl. 1999. V. 5, N 3–5. P. 153–154.

11. Ilie L., Ochem P., Shallit J. A generalization of repetition threshold // Theoret. Comput. Science. 2005. V. 345, N 2–3. P. 359–369.

12. Moulin O. J. Proof of Dejean's conjecture for alphabets with 5, 6, 7, 8, 9, 10 and 11 letters // Theoret. Comput. Science. 1992. V. 95, N 2. P. 187–205.

13. Ochem P. A generator of morphisms for infinite words // Proceedings of Workshop on Word Avoidability, Complexity, and Morphisms (Turku, July 2004). 2004. P. 9–14.

14. Ochem P., Reix T. Upper bound on the number of ternary square-free words // Proceedings of Workshop on Words and Automata (St. Petersburg. June 2006).

15. Pansiot J.-J. A propos d'une conjecture de F. Dejean sur les répétitions dans les mots // Discrete Appl. Math. 1984. V. 7, N 3. P. 297–311.

16. Thue A. Über unendliche Zeichenreihen // Norske Vidensk. Selsk. Skrifter. I. Mat.-Nat. Kl., Christiania. 1906. N 7. P. 1–22.

17. Thue A. Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen // Norske Vidensk. Selsk. Skrifter. I. Mat.-Nat. Kl., Christiania. 1912. N 10. P. 1–67.

Адрес автора:

МГУ, мех.-мат. факультет,
Воробьёвы горы,
119992 Москва,
Россия.
E-mail: foroman@mail.ru

Статья поступила
4 октября 2006 г.