ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2007. Серия 1. Том 14, № 1. 87–93

УДК 519.95

ОБ ОДНОЙ ИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНОК ДЛЯ ЗАДЕРЖКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СУММАТОРА*)

В. М. Храпченко

Получена нетривиальная нижняя оценка задержки параллельного сумматора, построенного в классическом базисе $Б_0 = \{\&, \vee, ^-\}$ (с аддитивным остаточным членом порядка $\log\log\log n$).

В широком смысле параллельный n-разрядный сумматор понимается как любое устройство, вычисляющее по n цифрам каждого из двух слагаемых X и Y, полученным одновременно, цифры их суммы Z. В более узком смысле — это схема из функциональных элементов [1, 3], реализующая сложение двух n-разрядных чисел, которые также, как их сумма, представляются в позиционной двоичной системе счисления. Считая числа X и Y положительными и фиксируя запятую перед их старшими цифрами, мы можем задать вектор-функцию Σ_n, вычисляемую параллельным n-разрядным сумматором, системой равенств:

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i 2^{-i}, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} y_i 2^{-i}, \quad Z = X + Y, \quad Z = \sum_{i=0}^{n} z_i 2^{-i}. \qquad (1)$$

В [5] показано, что каким бы ни был конечный полный базис Б, над которым строятся схемы, вектор-функция Σ_n имеет задержку $T_Б(\Sigma_n)$, асимптотически равную $T_Б(K_n)$ — задержке конъюнкции $K_n = x_1 \dots x_n$, а именно

$$T_Б(\Sigma_n) \sim T_Б(K_n) \sim C_Б \log_2 n,$$

где $C_Б$ — константа, зависящая от базиса. Хотя понятие задержки впоследствии и уточнялось [6], результаты из [5] сохранили свою силу.

Для некоторых базисов константа $C_Б$ вычисляется легко. Это, например, базисы $Б_0 = \{\&, \vee, ^-$ (конъюнкция и дизъюнкция двуместные) и

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований ОПМ РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Синтез и сложность управляющих систем») и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–5400.2006.1).

$Б_3 = \{S_3^{2,3}, ^-, 0, 1\}$, где $S_3^{2,3}$ — функция голосования от трёх переменных, равная $1\,(0)$, когда большинство переменных равны $1\,(0)$. Для простоты будем полагать, что задержки всех элементов равны 1. Тогда для обоих базисов $C_Б = 1$. В то же время для многих базисов эта константа неизвестна. Наряду с этой проблемой существует и проблема уточнения асимптотической оценки.

В случае базиса $Б_3$ задержки обеих вектор-функций почти совпадают:

$$\log_2 n \leqslant T_{Б_3}(K_n) \leqslant T_{Б_3}(\Sigma_n) + O(1) \leqslant \log_2 n + O(1).$$

Коротко об этих оценках. Левое неравенство доказано в [7]. Следующее вытекает из двух соотношений для старшей цифры z_0 суммы Z:

а) если $y_1 = \ldots = y_{n-1} = 0$, то $z_0 = x_1 \ldots x_n y_n$;

б) независимо от базиса Б $T_Б(z_0) \leqslant T_Б(\Sigma_n)$.

Последнее неравенство связано со спецификой базиса $Б_3$, позволяющего особенно быстро вычислять все переносы, а значит, и цифры суммы Z. Их вычисление основано на следующем преобразовании [4], которое мы опишем для переноса z_0 в старший разряд, считая для простоты $n = 2^k$ (k — натуральное).

Исходная формула

$$z_0 = S_3^{2,3}(x_1, y_1, S_3^{2,3}(x_2, y_2, \ldots S_3^{2,3}(x_{2^{k-1}}, y_{2^{k-1}},$$
$$S_3^{2,3}(x_{2^{k-1}+1}, y_{2^{k-1}+1}, \ldots S_3^{2,3}(x_{2^k}, y_{2^k}, 0) \ldots)) \ldots))$$

разбивается на две части: первая заканчивается переменными $x_{2^{k-1}}$ и $y_{2^{k-1}}$, к которым добавляются соответствующие правые скобки (это почти подформула — только одно место не заполнено), во вторую входит всё остальное (это подформула). Далее формула заменяется эквивалентной (эквивалентность можно доказать, например, как в [7]):

$$\begin{aligned} z_0 = S_3^{2,3}\{&S_3^{2,3}(x_1, y_1, \ldots S_3^{2,3}(x_{2^{k-1}}, y_{2^{k-1}}, 0) \ldots), \\ &S_3^{2,3}(x_1, y_1, \ldots S_3^{2,3}(x_{2^{k-1}}, y_{2^{k-1}}, 1) \ldots), \\ &S_3^{2,3}(x_{2^{k-1}+1}, y_{2^{k-1}+1}, \ldots S_3^{2,3}(x_{2^k}, y_{2^k}, 0) \ldots)\}. \end{aligned}$$

Число переменных в главных подформулах уменьшилось вдвое, а добавилась только одна ступень. После k-кратного применения преобразования получается формула глубины $\log_2 n + O(1)$.

Расхождение между известными оценками для базиса $Б_0$ значительно больше [5]:

$$\log_2 n \leqslant T_{Б_0}(K_n) \leqslant T_{Б_0}(\Sigma_n) + O(1) \leqslant \log_2 n + \sqrt{2 \log_2 n} + O(1).$$

Вопрос: как их сблизить? Если всё упирается в нижнюю оценку, то использовать функцию K_n в качестве промежуточной функции уже больше не удастся, так как верхняя оценка для её задержки почти такая же, как приведённая нижняя. Хотелось бы подобрать ей замену, которая естественно не будет уже такой простой.

С помощью (1) нетрудно выписать последовательность равенств, однозначно определяющую все переносы (см., например, [5]):

$$\begin{aligned} &w_{n-1} = x_n y_n, \\ &w_{n-2} = x_{n-1}y_{n-1} \vee (x_{n-1} \vee y_{n-1})w_{n-1}, \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &w_{i-1} = x_i y_i \vee (x_i \vee y_i) w_i, \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &w_0 = x_1 y_1 \vee (x_1 \vee y_1) w_1, \end{aligned} \tag{2}$$

где w_{i-1} обозначает перенос из i-го разряда в $(i-1)$-й.

Положим $\tilde{x} = x_1, \ldots, x_n$, $\tilde{y} = y_1, \ldots, y_n$ и обозначим через $W_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ вектор-функцию $(w_0(\tilde{x}, \tilde{y}), \ldots, w_{n-1}(\tilde{x}, \tilde{y}))$, выражающую переносы w_0, $\ldots, w_{n-1}$ через переменные $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

Вводя в (2) вспомогательные переменные

$$u_i = x_i y_i, \qquad v_i = x_i \vee y_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

получим вектор-функцию $W_n'(\tilde{u}, \tilde{v})$, выражающую переносы $w_0, \ldots, w_{n-1}$ через вспомогательные переменные $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_{n-1}$:

$$\begin{aligned} w_{n-1} \quad &= \quad u_n, \\ w_{n-2} \quad &= \quad u_{n-1} \vee v_{n-1} w_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_{i-1} \quad &= \quad u_i \vee v_i w_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_0 \quad &= \quad u_1 \vee v_1 w_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Теперь заметим, что при любом базисе: а) вектор-функцию Σ_n можно вычислить с задержкой $O(1)$ относительно $W_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ (оставшиеся операции поразрядные); б) для вычисления $W_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ достаточно сначала вычислить u_i и v_i $(i = 1, \ldots, n)$ с задержкой $O(1)$ (см. (3)), а затем вычислить $W_n'(\tilde{u}, \tilde{v})$; в) $W_n'(\tilde{u}, \tilde{v})$ имеет ту же задержку, что и $w_0(\tilde{u}, \tilde{v})$. Отсюда следует, что при любом базисе Б

$$T_{\text{Б}}(\Sigma_n) \leqslant T_{\text{Б}}(w_0(\tilde{u}, \tilde{v})) + O(1).$$

Именно так в [5] задача о верхней оценке для задержки сумматора сводилась к такой же задаче для переноса w_0, а далее использовалось то, что w_0 с помощью равенств (4) можно записать в довольно простой форме:

$$w_0(\tilde{u}, \tilde{v}) = u_1 \vee v_1 u_2 \vee \ldots \vee v_1 \ldots v_{i-1} u_i \vee \ldots \vee v_1 \ldots v_{n-1} u_n.$$

Функция f_n $(n = 1, 2, \ldots)$, очень близкая к $w_0(\tilde{u}, \tilde{v})$:

$$f_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = w_0(x_n, \ldots, x_1, y_{n-1}, \ldots, y_1) \& y_n, \qquad (5)$$

изучалась, в том числе с точки зрения нижних оценок, в ряде работ (прежде всего в [2, 8, 9]). Поэтому заманчиво использовать её с целью получения нижней оценки для задержки $T_{\text{Б}}(\Sigma_n)$. Оказывается это возможно. Прежде всего заметим, что в силу (5) справедливо неравенство

$$T_{\text{Б}}(f_n) \leqslant T_{\text{Б}}(w_0(\tilde{u}, \tilde{v})) + O(1). \qquad (6)$$

Далее, сделав в (2) подстановку

$$x_i = u_i^*, \quad y_i = u_i^* \vee v_i^*, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad (7)$$

где $u_1^*, \ldots, u_n^*, v_1^*, \ldots, v_n^*$ — новые переменные, при всех $i < n$ получим

$$w_{i-1} = u_i^*(u_i^* \vee v_i^*) \vee (u_i^* \vee (u_i^* \vee v_i^*)) w_i = u_i^* \vee (u_i^* \vee v_i^*) w_i = u_i^* \vee v_i^* w_i,$$

а в оставшемся случае $w_{n-1} = u_n^*$, т. е.

$$\begin{array}{rcl} w_{n-1} & = & u_n^*, \\ w_{n-2} & = & u_{n-1}^* \vee v_{n-1}^* w_{n-1}, \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ w_{i-1} & = & u_i^* \vee v_i^* w_i, \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ w_0 & = & u_1^* \vee v_1^* w_1. \end{array} \qquad (8)$$

Вектор-функция $W_n'(\tilde{u}^*, \tilde{v}^*)$, выражающая переносы $w_0, \ldots, w_{n-1}$ через переменные $u_1^*, \ldots, u_n^*, v_1^*, \ldots, v_{n-1}^*$, отличается от вектор-функции $W_n'(\tilde{u}, \tilde{v})$ (см. (4)) только переменными. Поэтому при любом базисе Б

$$T_{\text{Б}}(w_0(\tilde{u}^*, \tilde{v}^*)) = T_{\text{Б}}(w_0(\tilde{u}, \tilde{v})). \qquad (9)$$

Теперь заметим, что функцию $w_0(\tilde{u}^*, \tilde{v}^*)$ можно вычислить не только прямо по формулам (8), но и таким искусственным способом: сначала по формулам (7) вычислить x_i и y_i $(i = 1, \dots, n)$ с задержкой $O(1)$, а затем вычислить $w_0(\tilde{x}, \tilde{y})$ как старшую цифру суммы Z. Отсюда следует, что при любом базисе Б

$$T_{\text{Б}}(w_0(\tilde{u}^*, \tilde{v}^*)) \leqslant T_{\text{Б}}(\Sigma_n) + O(1). \tag{10}$$

Соотношения (10), (9) и (6) указывают возможный путь уточнения нижней оценки для задержки сумматора.

Пусть S_n — произвольная формула над базисом Б_0, реализующая функцию f_n, $L(S_n)$ — сложность формулы S_n, т. е. число букв в ней, $D(S_n)$ — глубина формулы S_n, т. е. максимум числа операций базиса, следующих в ней друг за другом. При условии

$$n \geqslant 2^{2^{32}}. \tag{11}$$

в работе [9] доказана нижняя оценка

$$L(S_n)D(S_n) \geqslant \frac{n \cdot \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n}{8 \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 n} \tag{12}$$

(при меньших значениях n, но $n \geqslant 20$, она слабее тривиальной). Опираясь на (12) и считая выполненным (11), докажем, что

$$T_{\text{Б}_0}(f_n) \geqslant \log_2 n + 0,15 \log_2 \log_2 \log_2 n \tag{13}$$

(константа 0,15 близка к наилучшей константе при ограничении (11); усиливая ограничение, её можно сделать сколь угодно близкой к 1). Пусть теперь S_n — формула минимальной глубины. Тогда [6]

$$D(S_n) = D_{\text{Б}_0}(f_n) = T_{\text{Б}_0}(f_n).$$

Если бы не выполнялось неравенство (13), то в силу соотношения

$$L(S_n) \leqslant 2^{D(S_n)}$$

(справедливого для базиса Б_0) мы имели бы

$$L(S_n)D(S_n) < 2^{\log_2 n + 0,15 \log_2 \log_2 \log_2 n}(\log_2 n + 0,15 \log_2 \log_2 \log_2 n)$$

и с учетом ограничения (11)

$$L(S_n)D(S_n) < n(\log_2 \log_2 n)^{0,15}(\log_2 n + 2^{-32} \log_2 n),$$

что при ограничении (11) противоречит (12). Итак, неравенство (13) доказано.

Из него с помощью (6), (9) и (10) легко извлекается слабая, но нетривиальная нижняя оценка:

$$T_{\text{Б}_0}(\Sigma_n) \geqslant \log_2 n + 0,15 \log_2 \log_2 \log_2 n - c,$$

где с — положительная константа.

Естественно возникает вопрос о возможностях дальнейшего повышения нижней оценки на этом пути. В [8] показано, что в классе формул над монотонным базисом $\{\&, \vee\}$, реализующих функцию f_n, минимум величины $L(S_n)D(S_n)$ имеет порядок $n(\log_2 n)^2$. Правдоподобно, что такую оценку можно получить и в немонотонном базисе Б_0, хотя скорее всего это достаточно трудная задача. При этом её решение не позволило бы поднять нижнюю оценку больше чем до

$$T_{\text{Б}_0}(f_n) \geqslant \log_2 n + \log_2 \log_2 n$$

(при прежнем способе рассуждения). Это же относится к нижней оценке для $T_{\text{Б}_0}(\Sigma_n)$. Разрыв между верхней и нижней оценками остался бы попрежнему значительным. Видимо, надо искать другие пути.

Автор с благодарностью вспоминает Олега Борисовича Лупанова, который, выслушав на одном из своих семинаров скромный результат этой статьи, подчеркнул, что это первая нетривиальная нижняя оценка задержки параллельного сумматора, построенного в классическом базисе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лупанов О. Б.** Об одном методе синтеза схем // Известия вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1, № 1. С. 120–140.
2. **Лупанов О. Б.** О влиянии глубины формул на их сложность // Кибернетика. 1970. № 2. С. 46–49.
3. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
4. **Томашпольский А. М.** Частное сообщение (конец 1960-х гг.).
5. **Храпченко В. М.** Об асимптотической оценке времени сложения параллельного сумматора // Проблемы кибернетики. Вып. 19. М.: Наука, 1967. С. 107–122.
6. **Храпченко В. М.** Различие и сходство между задержкой и глубиной // Проблемы кибернетики. Вып. 35. М.: Наука, 1979. С. 141–168.
7. **Храпченко В. М.** О соотношении между сложностью и глубиной формул в базисе, содержащем медиану // Методы дискретного анализа в изучении булевых функций и графов: Сб. научн. тр. Вып. 37. Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР, 1981. С. 77–84.

8. **Commentz-Walter B.** Size-depth tradeoff in monotone Boolean formulae // Acta Informatica. 1979. V. 12, N 3. P. 227–243.

9. **Commentz-Walter B., Sattler J.** Size-depth tradeoff in non-monotone Boolean formulae // Acta Informatica. 1980. V. 14, N 3. P. 257–269.

Адрес автора:

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша, Миусская пл., 4,
125047 Москва,
Россия.

Статья поступила
25 сентября 2006 г.