ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2007. Серия 1. Том 14, № 2. 3–15

УДК 519.718

ОБ ОЦЕНКАХ ИНЦИДЕНТОРНОГО ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ВЗВЕШЕННОГО НЕОРИЕНТИРОВАННОГО МУЛЬТИГРАФА*)

В. Г. Визинг, А. В. Пяткин

Правильная раскраска инциденторов неориентированного взвешенного мультиграфа называется допустимой, если модуль разности между цветами инциденторов каждого ребра не меньше веса этого ребра. Наименьшее число цветов, необходимое для допустимой раскраски инциденторов, называется инциденторным хроматическим числом мультиграфа. Исследуется задача отыскания этого числа. Доказана NP-трудность этой задачи для Δ цветов. Найдены верхние и нижние оценки для инциденторного хроматического числа.

1. Постановка задачи

Под взвешенным мультиграфом $G = (V, E)$ понимается конечный мультиграф без петель с множеством вершин V и множеством рёбер E, каждому ребру e которого поставлено в соответствие некоторое целое неотрицательное число $w(e)$, называемое *весом* ребра e. В работе будут рассматриваться как ориентированные, так и неориентированные мультиграфы. Через $d(v)$ обозначается степень вершины v, а через $\Delta(G)$ — максимальная из степеней вершин в мультиграфе G.

Если $e = uv$ — ребро мультиграфа, то пары (u, e) и (v, e), состоящие из вершины и инцидентного ей ребра, называются *инциденторами* этого ребра. Если G ориентирован, то (u, e) называется *начальным*, а (v, e) — *конечным* инцидентором дуги uv. Будем говорить, что инцидентор (u, e) *примыкает* к вершине u, а инцидентор (v, e) — к вершине v. Различные инциденторы, примыкающие к одной и той же вершине, называются *смежными*. Два различных инцидентора одного и того же ребра называются *сопряжёнными*.

---

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (проект 04–77–7173) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00395).

Цветами будем называть натуральные числа; множество цветов обозначается через C. Если $a, b \in C$ и $a \leqslant b$, то под интервалом $[a, b]$ понимается множество всех таких цветов c, что $a \leqslant c \leqslant b$.

Раскраской некоторого множества инцидентов называется его отображение в C. Раскраска инцидентов называется *правильной*, если смежные инциденторы окрашены различно. Пусть задана некоторая раскраска инциденторов мультиграфа G. Если G ориентирован и разность между цветами конечного и начального инциденторов дуги e равна $q(e)$, то будем говорить, что эта дуга раскрашена со *скачком* $q(e)$. В случае неориентированного мультиграфа под скачком понимается модуль разности цветов инциденторов ребра e. Скачок называется *допустимым*, если выполняется неравенство $q(e) \geqslant w(e)$. Правильная раскраска инциденторов называется *допустимой*, если каждое ребро раскрашено с допустимым скачком. *Инциденторным хроматическим числом* $\chi_I(G)$ мультиграфа G называется такое наименьшее натуральное k, что существует допустимая раскраска всех инциденторов мультиграфа в k цветов, т. е. цветами из интервала $[1, k]$. Очевидно, что $\chi_I(G) \geqslant \Delta(G)$.

Задача поиска инциденторного хроматического числа ориентированного взвешенного мультиграфа рассмотрена в работах [2, 3]. В [3] доказано, что задача является NP-трудной, и приведён приближённый полиномиальный алгоритм отыскания инциденторного хроматического числа. Результаты работы [2] будут более подробно изложены в разделе 5.

В настоящей статье исследуется задача отыскания инциденторного хроматического числа неориентированного взвешенного мультиграфа. Следует отметить, что если веса всех рёбер одинаковы и равны числу p, то эта задача решена точно в [4]. В этом случае

$$\chi_I(p, G) = \max\{\Delta, \lceil \Delta/2 \rceil + p\}. \tag{1}$$

В рассматриваемой нами общей постановке задача построения минимальной раскраски инциденторов неориентированного мультиграфа является NP-трудной. Это доказывается в разделе 2. В последующих разделах устанавливаются верхние и нижние оценки для инциденторного хроматического числа.

2. Доказательство NP-полноты

В этом разделе доказывается NP-полнота следующей задачи о раскраске инциденторов неориентированного взвешенного мультиграфа.

Основная задача. *Дан взвешенный неориентированный мультиграф $G = (V, E)$ степени Δ и число $\chi \geqslant \Delta$. Существует ли допустимая раскраска инциденторов мультиграфа G в χ цветов?*

Принадлежность этой задачи к классу NP очевидна. Нам потребуется следующая известная NP-полная задача 3-Выполнимость [3].

Задача 3-ВЫП. *Дано m дизъюнкций $C_1, C_2, \dots, C_m$, каждая из которых содержит по 3 литерала (под литералом понимается переменная или её отрицание). Можно ли назначить этим переменным такие значения истинности, чтобы каждая дизъюнкция содержала по крайней мере один истинный литерал?*

Теорема 1. *Основная задача* NP-*полна.*

Доказательство. Построим свед́ение задачи 3-ВЫП к основной задаче. Рассмотрим некоторый набор дизъюнкций, содержащих по три литерала. Положим $\Delta = 2t + 1$, где t — максимальное число вхождений литерала в дизъюнкции (максимум берется по всем литералам).

Каждой переменной X поставим в соответствие подграф G_X, изображённый на рис. 1. Его вершинами являются $a_X, b_X, x, \bar{x}, x_1, x_2, \dots, x_{k(X)}$, $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{l(X)}$. Здесь через $k(X)$ и $l(X)$ обозначено число вхождений в дизъюнкции литералов X и $\bar{X}$ соответственно. Подграф G_X содержит $\Delta - 2$ ребра $a_X b_X$ веса $t + 1$, рёбра $x b_X, \bar{x} b_X$ веса t, а также по два ребра $x x_i$ веса $\Delta - i - 1, i = 1, 2, \dots, k(X)$, и по два ребра $\bar{x}\bar{x}_j$ веса $\Delta - j - 1, j = 1, 2, \dots, l(X)$.

Вершины $x_1, x_2, \dots, x_{k(X)}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{l(X)}$ назовём *представителями* литералов X и $\bar{X}$ соответственно. В мультиграфе G они имеют степень 4. Вершины a_X, b_X, x и $\bar{x}$ имеют в G ту же степень, что и в G_X.

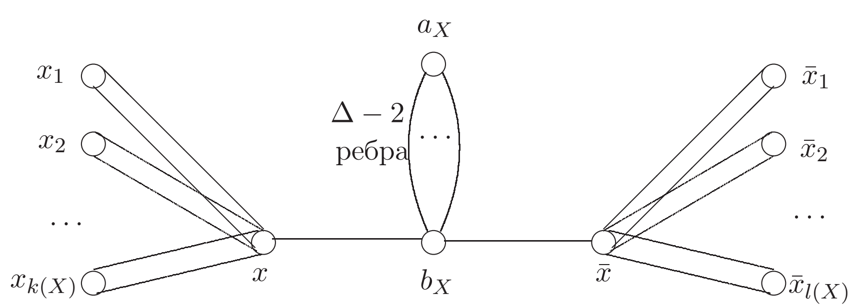

Рис. 1. Подграф G_X

Для каждой дизъюнкции C сначала выберем по одному представителю входящих в неё литералов. Представители литералов выбираются произвольно, но так, чтобы каждый представитель был выбран ровно для одной дизъюнкции. Опишем подграф, соответствующий дизъюнк-

ции C. Пусть для определённости $C = X \bigvee Y \bigvee Z$, а в качестве представителей литералов X, Y и Z выбраны вершины x_i, y_j и z_k соответственно. Помимо них вершинами подграфа G_C являются w, w', w_x, w_y, w_z. Подграф содержит рёбра $w_x x_i, w_y y_j$ и $w_z z_k$ веса $\Delta - 1$, рёбра wx_i, wy_j и wz_k веса t, а также $\Delta - 3$ ребра ww' веса $t + 1$ (см. рис. 2). Вершины w, w', w_x, w_y и w_z имеют в G ту же степень, что и в G_C.

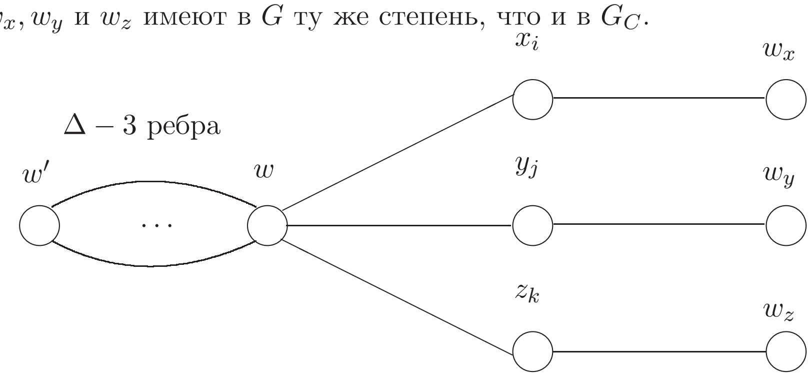

Рис. 2. Подграф G_C для дизъюнкции $C = X \vee Y \vee Z$

В результате получим мультиграф G нечётной степени $\Delta = 2t + 1$. Установим некоторые его свойства. Цвета 1 и Δ будем называть *крайними*.

Свойство 1. При любой допустимой раскраске инциденторов подграфа G_X в Δ цветов либо для каждой вершины x_i хотя бы один из примыкающих к ней инциденторов окрашен в крайний цвет, либо для каждой вершины $\bar{x}_j$ хотя бы один из примыкающих к ней инциденторов окрашен в крайний цвет.

Действительно, так как вершина b_X имеет степень Δ, то один из примыкающих к ней инциденторов должен быть окрашен цветом $t + 1$. Это не может быть инцидентор одного из рёбер $a_X b_X$, так как эти рёбра имеют вес $t + 1$, а $\Delta = 2t + 1$. Следовательно, либо инцидентор (b_X, xb_X), либо инцидентор $(b_X, \bar{x}b_X)$ окрашен цветом $t + 1$. Без ограничения общности можно считать, что имеет место первый вариант. Тогда инцидентор (x, xb_X) окрашен в крайний цвет. Рассмотрим произвольное $i \in \{1, 2, \ldots, k(X)\}$. Покажем, что хотя бы один из примыкающих к вершине x_i инциденторов окрашен в крайний цвет. Заметим, что инциденторы рёбер веса $p \geqslant \Delta - i$ могут быть окрашены только цветами из множества $A_i = [1, i] \cup [\Delta - i + 1, \Delta]$. Это множество содержит $2i$ цветов. Из них $2i - 2$ использованы при вершине x для раскраски инциденторов

рёбер xx_j при $j < i$, и ещё один — для раскраски инцидентора (x, xb_X) (оба крайних цвета лежат в A_i при любом i). Следовательно, хотя бы один из двух примыкающих к x инциденторов рёбер xx_i окрашен цветом не из множества A_i. Это может быть либо цвет $i+1$, либо цвет $\Delta - i$. В первом случае сопряжённый инцидентор должен быть окрашен в цвет Δ, а во втором — в цвет 1, т. е. цвет должен быть крайним.

Свойство 2. а) Существует такая допустимая раскраска инциденторов подграфа G_X в Δ цветов, что для всех $i = 1, 2, \ldots, k(X)$ и $j = 1, 2, \ldots, l(X)$ оба примыкающие к x_i инцидентора и хотя бы один из примыкающих к $\bar{x}_j$ инциденторов окрашены в некрайний цвет;

б) Существует допустимая раскраска инциденторов подграфа G_X в Δ цветов, при которой для всех $i = 1, 2, \ldots, k(X)$ и $j = 1, 2, \ldots, l(X)$ оба примыкающих к $\bar{x}_j$ инцидентора и хотя бы один из примыкающих к x_i инциденторов окрашены в некрайний цвет.

Ввиду симметрии достаточно доказать только свойство 2а. Построим раскраску инциденторов, удовлетворяющую указанному свойству. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k(X)$ инциденторы (x, xx_i) красятся цветами i и $\Delta - i + 1$, а сопряжённые с ними — цветами $\Delta - 1$ и 2 соответственно. Инциденторы (x, xb_X) и $(b_X, b_X\bar{x})$ можно раскрасить цветом $t + 1$, а сопряжённые с ними — цветом 1. Примыкающие к b_X инциденторы рёбер a_Xb_X красятся цветами из множества $[2, t] \cup [t+2, \Delta]$. Для окраски сопряжённых инциденторов используем следующее правило. Если инцидентор (b_X, a_Xb_X) окрашен цветом $i \leqslant t$, то сопряжённый с ним инцидентор (a_X, a_Xb_X) красится в цвет $i + t + 1$; в противном случае он красится в цвет $i - t - 1$. Примыкающие к вершине $\bar{x}$ инциденторы рёбер $\bar{x}\bar{x}_j$ красятся цветами $j + 1$ и $\Delta - j + 1$, а сопряжённые с ними — цветами Δ и 2 соответственно.

Свойство 3. При любой допустимой раскраске инциденторов подграфа G_C в Δ цветов хотя бы при одной из вершин x_i, y_j, z_k использованы оба крайних цвета.

Действительно, по аналогии со свойством 1, хотя бы один из трёх инциденторов $(w, wx_i), (w, wy_j), (w, wz_k)$ должен быть окрашен в цвет $t+1$. Можно считать, что это выполняется для первого из них. Тогда инцидентор (x_i, x_iw) должен быть окрашен в крайний цвет. Однако инцидентор (x_i, w_xx_i) также должен быть окрашен в крайний цвет, поскольку дуга w_xx_i имеет вес $\Delta - 1$. Таким образом, оба крайних цвета использованы при вершине x_i.

Свойство 4. Пусть $a, b, c \in [1, \Delta]$ — три цвета, хотя бы один из которых является крайним. Тогда существует допустимая раскраска инци-

денторов подграфа G_C в Δ цветов, при которой инциденторы (x_i, wx_i), $(y_j, wy_j), (z_k, wz_k)$ окрашены в цвета a, b и c соответственно.

Действительно, пусть крайним является цвет a. Тогда инцидентор (w, wx_i) красится в цвет $t+1$, а инциденторы (w, wy_j) и (w, wz_k) — в различные цвета, не равные $t+1$ и отличающиеся от b и c не менее чем на t. Нетрудно видеть, что такие цвета всегда найдутся. Инциденторы рёбер ww' красятся по аналогии с раскраской инциденторов рёбер $a_X b_X$ в доказательстве свойства 2. Раскраска рёбер $w_x x_i, w_y y_j$ и $w_z z_k$ труда не представляет.

Покажем теперь, что раскраска мультиграфа G в $\chi = \Delta$ цветов существует тогда и только тогда, когда переменным задачи 3-ВЫП можно назначить такие значения истинности, чтобы каждая дизъюнкция содержала по крайней мере один истинный литерал.

Действительно, если раскраска существует, то переменной X назначим значение «истина», если для каждого $j = 1, 2, \ldots, l(X)$ хоть один из инциденторов $(\bar{x}_j, \bar{x}\bar{x}_j)$ окрашен в крайний цвет, и «ложь» в противном случае. Если переменная ложна, то по свойству 1 для каждого $i = 1, 2, \ldots, k(X)$ хотя бы один из инциденторов (x_i, xx_i) окрашен в крайний цвет. По свойству 3 для каждой дизъюнкции C хотя бы при одном из представителей входящих в неё литералов оба крайних цвета используются при раскраске подграфа G_C. Тогда этот литерал должен быть истинным, т. е. каждая дизъюнкция содержит истинный литерал.

Если существует назначение истинности, при котором все дизъюнкции выполняются, то для каждой истинной переменной X подграф G_X раскрасим так, чтобы выполнялись условия свойства 2*а*, а для каждой ложной — так, чтобы выполнялись условия свойства 2*б*. Так как каждая дизъюнкция C содержит истинный литерал, то оба примыкающие к представителю этого литерала инцидентора рёбер подграфа G_C можно раскрасить в крайний цвет. Для раскраски инциденторов, примыкающих к представителям других литералов дизъюнкции C, достаточно использовать один крайний цвет (для окраски инцидентора ребра веса $\Delta - 1$). По свойству 4 такая раскраска может быть продолжена на весь подграф G_C. Теорема 1 доказана.

3. Нижняя и первая верхняя оценки инциденторного хроматического числа

Пусть $G = (V, E)$ — взвешенный неориентированный мультиграф степени Δ, и пусть множество весов всех дуг есть $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$, где $w_1 > w_2 > \ldots > w_k$. Для $i = 1, 2, \ldots, k$ через E_i обозначим подмножество дуг, веса которых не меньше w_i. Очевидно, что $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_k = E$.

Далее, обозначим через $G_i = (V, E_i)$ мультиграф, индуцированный рёбрами веса не менее w_i. Пусть $l(G) = \max\{w_i + \lceil \Delta(G_i)/2 \rceil \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$ и $r(G) = \max\{w_i + \Delta(G_i) \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$.

Теорема 2. *Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный взвешенный мультиграф. Тогда $l(G) \leqslant \chi_I(G) \leqslant r(G)$.*

Доказательство. Нижняя оценка следует из (1). Действительно, для каждого i выполняется неравенство $\chi_I(G) \geqslant \chi_I(G_i) \geqslant w_i + \lceil \Delta(G_i)/2 \rceil$. Отсюда следует, что $\chi_I(G) \geqslant l(G)$.

Для доказательства верхней оценки инциденторы рёбер будем окрашивать цветами из интевала $[1, r(G)]$ в порядке невозрастания весов рёбер. Пусть $e = uv$ — очередное ребро с ещё неокрашенными инциденторами, и пусть w_i — вес этого ребра. Так как $\Delta(G_i) + w_i \leqslant r(G)$, а при каждой вершине u и v занято не более $\Delta(G_i) - 1$ цветов, то в каждой из этих вершин отсутствуют не менее $w_i + 1$ цветов. Пусть a — наименьший из отсутствующих цветов. Предположим для определенности, что цвет a отсутствует в вершине u. Примыкающий к u инцидентор ребра e окрасим цветом a. Так как при v отсутствуют хотя бы w_i цветов, больших a, то среди них найдётся такой цвет b, что выполняется неравенство $b - a \geqslant w_i$. Тогда в цвет b можно окрасить примыкающий к v инцидентор ребра e. Теорема 2 доказана.

Заметим, что верхняя оценка отличается от нижней не более чем на $\lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$. Действительно, пусть максимум в $l(G)$ достигается на номере i, а в $r(G)$ — на номере j. Имеем $l(G) = w_i + \lceil \Delta(G_i)/2 \rceil \geqslant w_j + \lceil \Delta(G_j)/2 \rceil = w_j + \Delta(G_j) - \lfloor \Delta(G_j)/2 \rfloor \geqslant r(G) - \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$.

Заметим также, что верхняя оценка является достижимой (хотя бы потому, что для многих мультиграфов она совпадает с нижней оценкой). Существуют и мультиграфы, в которых $l(G) \neq r(G)$ и $\chi_I(G) = r(G)$. Например, таким является двухвершинный мультиграф G степени $\Delta = 2t + 1$, имеющий одно ребро веса 1 и по два ребра веса $2i$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Нетрудно проверить, что $l(G) = 2t + 1$, а $\chi_I(G) = r(G) = 2t + 2$.

В разделе 5 будет доказана верхняя оценка, отличающаяся от нижней не более чем на $\lceil \Delta(G)/4 \rceil$. Но сначала нам придётся несколько отойти от основной линии изложения.

4. Нормальное разбиение мультиграфа и квазисбалансированная ориентация

В этом разделе доказываются некоторые свойства мультиграфов, которые нужны для получения второй верхней оценки.

Лемма 1. *Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный мультиграф, содержащий $2s$ вершин нечётной степени. Тогда рёбра гиперграфа G можно разбить на простые циклы и s простых цепей с концами в вершинах нечётной степени.*

Доказательство. Множество простых циклов строится так. Выберем какой-либо простой цикл в G, отнесём его к искомому разбиению (если G не имеет циклов, то множество простых циклов разбиения пусто). Удалим из G рёбра выбранного цикла. Затем в оставшемся мультиграфе выберем простой цикл (он будет следующим циклом разбиения), удалим его рёбра и т. д. Так продолжаем до тех пор, пока не получится лес $T = (V, E')$. Лес T имеет те же вершины чётной степени и те же вершины нечётной степени, что и мультиграф G. Если $E' = \varnothing$, то $s = 0$, и мы получили разбиение G только на простые циклы. Предположим теперь, что $E' \neq \varnothing$, т. е. $s > 0$. Возьмём компоненту связности леса T, отличную от изолированной вершины. Она имеет по крайней мере две висячие вершины. Отнесем к разбиению простую цепь, соединяющую две висячие вершины. Удалив рёбра этой цепи, получим лес, в котором число вершин нечётной степени меньше на 2. Так продолжаем до тех пор, пока не останется лес без рёбер. Лемма 1 доказана.

Полученное разбиение мультиграфа на простые циклы и цепи назовём *нормальным разбиением*. Очевидно, что при нормальном разбиении различные цепи имеют различные концы.

Пусть G — ориентированный мультиграф. Будем называть его *квазисбалансированным*, если полустепени захода и исхода любой вершины отличаются не более чем на 1. Если у любой вершины полустепень захода совпадает с полустепенью исхода, то мультиграф называется *сбалансированным*.

Лемма 2. *Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный мультиграф. Пусть $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_k = E$ и $G_i = (V, E_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда существует такая ориентация рёбер в мультиграфе G, при которой все мультиграфы G_i оказываются квазисбалансированными.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Все вершины мультиграфа G имеют чётную степень. Рассмотрим мультиграфы $H_1 = G_1, H_j = (V, E_j \setminus E_{j-1})$, где $j = 2, 3, \ldots, k$. Построим нормальное разбиение каждого из мультиграфов H_j. Получим разбиение (вообще говоря, не являющееся нормальным) мультиграфа G на простые циклы и простые цепи. Сориентируем звенья циклов так, чтобы циклы превратились в контуры. После удаления из G получившихся в результате ориентации дуг останется мультиграф G', все вершины кото-

рого имеют чётную степень. Если G' не имеет рёбер, то все мультиграфы G_i являются сбалансированными и утверждение доказано. Пусть G' содержит рёбра. Мультиграф G' разбит на простые цепи. Каждую вершину мультиграфа G', являющуюся концом хотя бы одной цепи этого разбиения, назовем *угловой*. Угловая вершина всегда является концом чётного числа цепей разбиения. Действительно, угловая вершина является концом цепи нормального разбиения мультиграфа H_i тогда и только тогда, когда её степень в мультиграфе H_i нечётна, а так как степень каждой вершины G чётна, то число таких мультиграфов H_i должно быть чётно. Будем говорить, что i — это номер мультиграфа H_i. Каждой угловой вершине мультиграфа G' поставим в соответствие конечную возрастающую последовательность, состоящую из номеров тех мультиграфов H_i, в которых эта вершина имеет нечётную степень. Пусть последовательность, сопоставленная некоторой вершине, имеет вид $j_1, j_2, \ldots, j_{2r}$. Разобьём члены последовательности на пары $(j_1, j_2), (j_3, j_4), \ldots, (j_{2r-1}, j_{2r})$. Номера, составляющие пару, назовем *соседними* при данной вершине.

Приступим к ориентации мультиграфа G'. Рассмотрим произвольную угловую вершину v_1 и какой-либо сопоставленный ей номер t. В мультиграфе H_t существует простая цепь, одним из концов которой является вершина v_1. Будем говорить, что эта цепь соответствует номеру t при вершине v_1. Будем двигаться по этой цепи от v_1 к другому её концу v_2, ориентируя рёбра по направлению движения. Оказавшись в вершине v_2, перейдём на цепь, соответствующую соседнему с t номеру при вершине v_2, и идём по этой цепи до её другого конца, ориентируя рёбра по направлению движения и т. д. Общее правило состоит в том, что, придя в какую-либо угловую вершину, мы переходим на непройденную ранее цепь с соседним при этой вершине номером и идём по ней, ориентируя рёбра по направлению движения. Этот процесс прекратится, очевидно, тогда, когда мы вернёмся в вершину v_1 по цепи, соответствующей соседнему с t при v_1 номеру. После остановки процесса удалим из G' рёбра, получившие ориентацию, а из последовательностей номеров, сопоставлявшихся угловым вершинам мультиграфа G', — номера, соответствующие сориентированным цепям (некоторые из угловых вершин мультиграфа G' могут перестать быть таковыми в G''). Получится мультиграф G'' с меньшим числом рёбер. Если G'' вообще не имеет рёбер, то ориентация мультиграфа G заканчивается. В противном случае выбираем какую-либо угловую вершину мультиграфа G'' и проводим описанную выше процедуру. Так продолжаем до тех пор, когда все рёбра мультиграфа G не окажутся сориентированными.

Покажем, что получившаяся ориентация удовлетворяет требованиям леммы. Обозначим через G'_i ориентированный мультиграф, получающийся из G_i в результате описанной ориентации. Очевидно, что мультиграф G'_k будет сбалансированным. Рассмотрим мультиграф G_i при произвольном $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Нужно доказать, что G'_i является квазисбалансированным. Пусть v — произвольная вершина этого мультиграфа. Если v не является концом ни одной цепи нормального разбиения мультиграфов H_j при $j = 1, 2, \dots, i$, то в G_i полустепень захода этой вершины равна полустепени её исхода. Предположим, что v является концом хотя бы одной цепи нормального разбиения мультиграфов $H_1, H_2, \dots, H_i$. Обозначим через r наибольший номер такого мультиграфа, а через r' соседний с ним при вершине v номер. Вершине v поставлено в соответствие чётное число номеров, меньших $\min\{r, r'\}$, и рёбра цепей, соответствующие этим номерам, сориентированы так, что число заходящих в v дуг равно числу исходящих из неё дуг. Рёбра цепей, соответствующих номерам r и r', сориентированы так, что ребро одной цепи заходит в v, а ребро другой — исходит из v. Поэтому при $r' < r$ в мультиграфе G'_i полустепень захода вершины v равна полустепени её исхода. Если же $r' > r$, то в силу выбора номера r это означает, что $r' > i$. Значит, рёбра цепи, соответствующей номеру r', не принадлежат мультиграфу G_i. Следовательно, полустепени захода и исхода вершины v отличаются ровно на 1. Так как v — произвольная вершина мультиграфа G_i, то мультиграф G'_i является квазисбалансированным.

Случай 2. В мультиграфе G имеются вершины нечётной степени. Число таких вершин чётно. Обозначим это число через $2a$. Добавим к G паросочетание M, состоящее из a рёбер, превращающее G в мультиграф, все вершины которого имеют чётную степень. Обозначив получившийся мультиграф через G' и положив $E_k = E_k \cup M$, мы окажемся в условиях случая 1. Построим ориентацию мультиграфа так, как описано выше. При этом мультиграф G' окажется сбалансированным. Удалим рёбра множества M. Получим ориентацию исходного мультиграфа G, удовлетворяющую условиям леммы. Лемма 2 доказана.

5. Вторая верхняя оценка

Нам потребуются некоторые понятия и утверждения из [1, 3]. Двудольный ориентированный мультиграф будем записывать в виде $(X, Y; E)$, где E — множество дуг, X и Y — множества вершин соответственно первой и второй долей. Двудольный ориентированный мультиграф называется *односторонним*, если начало каждой дуги лежит в первой доле, а конец — во второй.

Пусть $H = (X, Y; E)$ — двудольный взвешенный односторонний мультиграф. Введём понятия потенциала вершины и потенциала мультиграфа. Пусть v — произвольная вершина мультиграфа и $d(v) > 0$. Перенумеруем в порядке невозрастания весов дуги, инцидентные вершине v; пусть их веса равны $w_1 \geqslant w_2 \geqslant \ldots \geqslant w_r$, где $r = d(v)$. Потенциал $m(v)$ вершины v определяется как $m(v) = \max\{j + w_j \mid j = 1, 2, \ldots, r\}$. Величину $m(H) = \max\{m(v) \mid v \in V\}$ назовем *потенциалом* мультиграфа H. Так как веса всех дуг неотрицательны, то $m(H) \geqslant \Delta(H)$.

Утверждение 1 [2]. *Пусть $H = (X, Y; E)$ — односторонний двудольный мультиграф степени Δ. Тогда $m(H) \leqslant \chi_I(H) \leqslant m(H) + \lceil \Delta/2 \rceil$.*

Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный взвешенный мультиграф. Односторонний двудольный мультиграф $B(G) = (V', V''; E')$ называется *двудольной интерпретацией* мультиграфа $G = (V, E)$, если выполняются следующие условия:

а) $|V'| = |V''| = |V|$, причем между множествами V и V', а также между множествами V и V'' установлено взаимно однозначное соответствие, т. е. каждая вершина $v \in V$ имеет образы $v' \in V'$ и $v'' \in V''$;

б) каждой дуге $e = uv \in E$ взаимно однозначным образом соответствует дуга $e' = u'v''$, имеющая тот же вес.

Утверждение 2 [3]. *Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный взвешенный мультиграф, а $B(G)$ — его двудольная интерпретация. Тогда $\chi_I(G) \leqslant \max\{\Delta(G), \chi_I(B(G))\}$.*

Теперь приступим к рассмотрению второй верхней оценки инциденторного хроматического числа неориентированного взвешенного мультиграфа.

Теорема 3. *Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный взвешенный мультиграф. Тогда $\chi_I(G) \leqslant \max\{\Delta(G), l(G) + \lceil \Delta(G)/4 \rceil\}$.*

Доказательство. Как и в разделе 3, для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ через G_i обозначим мультиграф, индуцированный рёбрами веса не менее w_i. Построим такую ориентацию мультиграфа G, при которой все мультиграфы G_i превратятся в квазисбалансированные ориентированные мультиграфы G'_i. Это можно сделать по лемме 2. Положим $G' = G'_k$. Рассмотрим двудольную интерпретацию $B(G')$ мультиграфа G'. Тогда $\Delta(B(G')) = \lceil \Delta(G)/2 \rceil$. Покажем, что $m(B(G')) \leqslant l(G)$. Пусть v — произвольная вершина мультиграфа $B(G')$, а e — инцидентная v дуга веса $w_i \in W$. Тогда если j — номер дуги e при нумерации дуг, инцидентных v, по невозрастанию их весов, то $j \leqslant \lceil \Delta(G_i))/2 \rceil$. Поэтому $j + w_i \leqslant \lceil \Delta(G_i)/2 \rceil + w_i \leqslant l(G)$. Так как это неравенство имеет место для любой

дуги, инцидентной v, то $m(v) \leqslant l(G)$. А поскольку последнее неравенство справедливо для любой вершины мультиграфа $B(G')$, то $m(B(G')) \leqslant l(G)$. По утверждению 1 имеем $\chi_I(B(G')) \leqslant m(B(G')) + \lceil \Delta(B(G'))/2 \rceil \leqslant l(G) + \lceil \lceil \Delta(G)/2 \rceil /2 \rceil = l(G) + \lceil \Delta(G)/4 \rceil$. Поэтому в силу утверждения 2 имеем $\chi_I(G') \leqslant \max\{\Delta(G), l(G) + \lceil \Delta(G)/4 \rceil\}$. Теперь утверждение теоремы следует из очевидного неравенства $\chi_I(G) \leqslant \chi_I(G')$. Теорема 3 доказана.

Из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие 1. *Пусть G — неориентированный взвешенный мультиграф. Тогда* $\max\{\Delta(G), l(G)\} \leqslant \chi_I(G) \leqslant \max\{\Delta(G), l(G) + \lceil \Delta(G)/4 \rceil\}$.

Таким образом, вторая верхняя оценка отличается от нижней не более чем на $\lceil \Delta(G)/4 \rceil$. Заметим, однако, что существуют мультиграфы, для которых первая верхняя оценка оказывается лучше второй. Например, рассмотрим однородный мультиграф G степени Δ, имеющий 2-фактор. Положим веса рёбер 2-фактора равными $\Delta - 1$, а веса всех остальных рёбер равными 1. Имеем $r(G) = \Delta + 1$ и $l(G) = \Delta$, т. е. $l(G) + \lceil \Delta(G)/4 \rceil = \lceil 5\Delta(G)/4 \rceil > r(G)$ при $\Delta \geqslant 5$.

Рассмотрим вопрос о достижимости верхней оценки. Покажем, что для любого $\Delta = 4t$, где $t \geqslant 1$, существует такой мультиграф G степени Δ, что $\chi_I(G) = l(G) + t$. В качестве такого G можно взять мультиграф степени $4t$ с двумя вершинами x и y, в котором при каждом $j = 1, 2, \ldots, 2t$ есть два ребра веса $4t - j$. Имеем $l(G) = \Delta = 4t$. Покажем, что $\chi_I(G) \geqslant 5t$. В силу теоремы 3 это будет означать, что $\chi_I(G) = 5t = l(G) + \lceil \Delta/4 \rceil$. Предположим, что $\chi_I(G) \leqslant 5t - 1$. Построим допустимую раскраску всех инциденторов цветами из $[1, 5t-1]$. Сориентируем мультиграф G так, чтобы раскраска инциденторов оказалась допустимой для получившегося ориентированного мультиграфа G'. Пусть в мультиграфе G' к вершине x примыкают a начальных инциденторов мультиграфа G', а к вершине y примыкают b начальных инциденторов. Очевидно, что $a + b = 4t$. Сумма цветов, использованных для раскраску начальных инциденторов, не меньше $((1+a)a + (1+b)b)/2 = ((a+b) + (a^2+b^2))/2 \geqslant (4t + 8t^2)/2 = 2t + 4t^2$. Следовательно, сумма цветов конечных инциденторов не меньше чем $2t + 4t^2 + 2(2t + (2t+1) + \ldots + (4t-1)) = 2t + 4t^2 + (6t-1)2t = 16t^2$. Но с другой стороны, сумма цветов конечных инциденторов не больше суммы цветов, принадлежащих интервалам $[5t - a, 5t - 1]$ и $[5t - b, 5t - 1]$, т. е. не более величины $((5t - a + 5t - 1)a + (5t - b + 5t - 1)b)/2 = ((10t-1)(a+b) - (a^2+b^2))/2 \leqslant (40t^2 - 4t - 8t^2)/2 = 16t^2 - 2t < 16t^2$. Полученное противоречие доказывает, что $\chi_I(G) > 5t - 1$. Аналогично показывается, что вторая верхняя оценка достижима при любом $\Delta = 4t + 3$,

где $t \geqslant 0$. Вопрос о достижимости второй верхней оценки в остальных случаях открыт.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа в задачах раскраски инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 27–41.

2. **Визинг В. Г.** Об оценках инциденторного хроматического числа взвешенного ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 1. С. 18–25.

3. **Визинг В. Г., Пяткин А. В.** О раскраске инциденторов в ориентированном взвешенном мультиграфе // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 1. С. 33–44.

4. **Визинг В. Г., Тофт Б.** Раскраска инциденторов и вершин неориентированного мукльтиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8 , № 3. С. 3–14.

5. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи М.: Мир, 1982.

Адреса авторов:

В. Г. Визинг

ул. Варненская, 18/2, кв. 26,
65070 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@paco.net

А. В. Пяткин

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.
E-mail: artem@math.nsc.ru

Статья поступила
8 ноября 2006 г.