ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2007. Серия 1. Том 14, № 2. 16–24

УДК 519.172

УНИЦИКЛИЧЕСКИЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННО НЕСУММИРУЕМЫЕ ГРАФЫ*)

А. В. Пяткин

Граф $G = (V, E)$ называется *целочисленно суммируемым*, если найдётся такое множество меток $S(G) \subset Z$, что $V = S(G)$ и различные вершины $u, v \in V$ смежны тогда и только тогда, когда $u + v \in V$. Связный граф $G = (V, E)$ называется *унициклическим*, если $|V| = |E|$. В настоящей статье строятся две бесконечные серии унициклических графов, не являющихся целочисленно суммируемыми.

Введение

Для данного подмножества S множества целых чисел Z через $G(S)$ обозначим граф, вершинами которого являются все числа из S, а две вершины u и v смежны тогда и только тогда, когда $u + v \in S$. Граф $G = (V, E)$ называется *целочисленно суммируемым*, если $G = G(S)$ для некоторого множества $S \subset Z$. Это множество называется множеством *меток* графа G. Удобно отождествлять вершины целочисленно суммируемого графа и соответствующие им метки (целые числа), т. е. считать, что $V = S$. Отметим, что для любого целочисленно суммируемого графа может существовать бесконечно много различных множеств меток. В частности, для любого целого $m \neq 0$ выполняется соотношение $G(S) = G(mS)$, где $mS = \{ms \mid s \in S\}$.

Целочисленно суммируемые графы были введены Ф. Харари [3]. В [4] выдвинута гипотеза о том, что каждое дерево является целочисленно суммируемым графом. В ряде работ [1, 4, 6, 8, 9] эта гипотеза была доказана для различных частных случаев. Наконец, в [2] было объявлено о её доказательстве в общем случае.

Деревья являются связными графами с минимальным числом рёбер. При добавлении к дереву одного ребра получается *унициклический* граф, в котором число вершин равно числу рёбер, т. е. $|V| = |E|$. Что можно

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00395) и INTAS (проект 04–77–7173).

сказать о целочисленной суммируемости унициклических графов? Не все унициклические графы являются целочисленно суммируемыми: известно, что цикл C_4 таковым не является. Однако несколько авторов независимо друг от друга доказали, что все остальные циклы являются целочисленно суммируемыми графами [4, 5, 7]. Существует ли бесконечная серия унициклических графов, не являющихся целочисленно суммируемыми? В настоящей статье дается положительный ответ на этот вопрос. В ней строятся две бесконечные серии таких графов.

1. Основной результат

Рассмотрим два класса унициклических графов, изображенных на рис. 1. Формально граф $T(n, m, l)$ получается соединением центров трёх звезд $K_{1,n}, K_{1,m}$ и $K_{1,l}$. Предполагается, что $n \geqslant m \geqslant l$. Граф F_k получается путём склеивания вершины треугольника с висячей вершиной звезды $K_{1,k+1}$. Сначала в этих классах найдём целочисленно суммируемые графы.

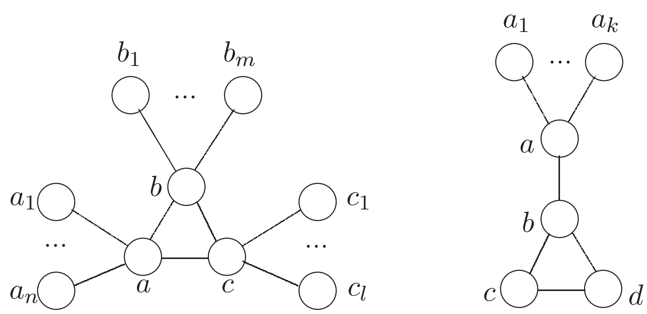

Рис. 1. Графы $T(n, m, l)$ и F_k

Утверждение 1. *Графы $T(n, 0, 0)$ и F_{2n} являются целочисленно суммируемыми при любом n.*

Доказательство. Очевидно, что $S_1 = \{-1, 0, 1, 3, 5, \ldots, 2n+1\}$ является множеством меток для $T(n, 0, 0)$. Поскольку $F_0 = T(1, 0, 0)$, достаточно показать, что F_{2n} является целочисленно суммируемым графом при любом $n > 0$. Пусть $X = \{x_i = -2n - 2i + 1 \mid i = 0, \ldots, 2n+1\}$. Положим $S_2 = \{-4n, 2\} \cup X$. Убедимся в том, что граф $G(S_2)$ совпадает с F_{2n}. Заметим, что все элементы множества X нечётны и отрицательны; следовательно, сумма любых двух из них будет чётной и отрицательной. Однако S_2 содержит единственное чётное отрицательное число, равное $-4n$. А поскольку при любых $i < j$ выполняется неравенство $x_i + x_j \leqslant -4n$, причём равенство достигается только при $i = 0$ и

$j = 1$, то множество X содержит единственное ребро x_0x_1. Нетрудно заметить, что вершина 2 смежна с каждой вершиной графа, кроме $1-2n$ и $-4n$. Последняя вершина, в свою очередь, смежна лишь с вершинами $x_0 = 1-2n$ и $x_1 = -1-2n$ (так как $x_0 + (-4n) = 1-6n = x_{2n}$ и $x_1 + (-4n) = -1-6n = x_{2n+1}$). Значит, $G(S_2) = F_{2n}$. Утверждение 1 доказано.

Через $N[v] = \{v\} \cup \{u \in V \mid uv \in E\}$ обозначим замкнутую окрестность вершины v. Мы будем часто использовать следующее очевидное

Утверждение 2. *Пусть граф $G(S)$ целочисленно суммируем и $a \in S$, $b \in S$ и $a+b \in S$. Тогда либо a смежна с b, либо $a = b$, т. е. $a \in N[b]$.*

Основной результат настоящей статьи заключается в том, что все графы $T(n,m,l)$ и F_k, кроме упомянутых в утверждении 1, не являются целочисленно суммируемыми графами. Этот факт доказывается в следующих двух теоремах.

Теорема 1. *Если $m > 0$, то граф $T(n,m,l)$ не является целочисленно суммируемым.*

Доказательство. Предположим, что граф $G = T(n,m,l)$ целочисленно суммируем с множеством меток S. Отметим, что $0 \notin S$, так как $n \geqslant m > 0$, а вершина с меткой 0 должна быть смежна со всеми вершинами графа. Через a, b, c обозначим вершины треугольника, а через $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ и $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_l\}$ — множество соседей степени 1 для каждой из этих вершин соответственно (см. рис. 1).

Сначала покажем, что для каждого $a_i \in A$ либо $a_i = a+b$, либо $a_i = a+c$. Действительно, сумма $a+a_i$ должна лежать в S. Если $a_i + a = b_j \in B$ или $a_i + a = c$, то $b + (a+a_i) \in S$, так как b смежна с c и со всеми b_j. По определению целочисленно суммируемого графа множество S также содержит $a+b$ и a_i. Из утверждения 2 следует, что $a_i \in N[a+b]$. Но a_i не может быть смежной с $a+b$, поскольку a является единственной вершиной, смежной с вершиной a_i, и $b \neq 0$. Значит, $a_i = a+b$. Аналогично показывается, что если $a_i + a = c_j \in C$ или $a_i + a = b$, то $a_i = a+c$. Так как $(a+b) - a = b \notin A, (a+c) - a = c \notin A$ и A конечно, то $a + a_i \notin A$ ни для какого a_i. Значит, $A \subset \{a+b, a+c\}$.

Аналогично, $B \subset \{a+b, b+c\}$ и $C \subset \{a+c, b+c\}$. В частности, $l+m+n \leqslant 3$. Поскольку $n \geqslant m > 0$, возможны три случая.

Случай 1. Если $G = T(2,1,0)$, то $A = \{a+b, a+c\}$ и $B = \{b+c\}$. Кроме того, $C = \varnothing$. Следовательно, $(a+c)+a \notin C$. Тогда из приведённого выше рассуждения вытекает, что $(a+c)+a = b$. Таким же образом получаем, что $b + (b + c) = a$. Но тогда $c = b - 2a = a - 2b$ и поэтому $a = b$, противоречие.

Случай 2. Если $G = T(1, 1, 0)$, то либо $A = \{a + c\}$, либо $B = \{b + c\}$ (в противном случае было бы $A = B = \{a + b\}$, что невозможно). Без ограничения общности можно считать, что $A = \{a + c\}$. Если $B = \{b + c\}$, то приходим к противоречию в точности также, как и в случае 1. Допустим, что $B = \{a + b\}$. Тогда $b = 2a + c$ и либо $2b + a = c$, либо $2b + a = a + c$. В первом варианте $c = -5a$ и $S = \{-5, -4, -3, -2, 1\}$, а во втором варианте $c = -4a$ и $S = \{-4, -3, -2, -1, 1\}$. Но нетрудно убедиться, что $G(S) \neq T(1, 1, 0)$ ни для одного из этих множеств S.

Случай 3. Если $G = T(1, 1, 1)$, то, используя симметрию, можно считать, что $A = \{a + b\}, B = \{b + c\}$ и $C = \{a + c\}$. Если $a + (a + b) \in B$, то $c = 2a$ и $c + (a + c) = 5a \in \{b, a + b\}$. В любом случае a, b и c имеют один знак, т. е. $G(S)$ будет содержать изолированную вершину (вершину с наибольшей меткой), противоречие. Если $c + (a + c) \in A$ или $b + (b + c) \in C$, то приходим к противоречию аналогичным образом. Поэтому $2a + b = c, 2b + c = a$ и $2c + a = b$. Но тогда $a = b = c = 0$, опять противоречие. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Граф F_{2n+1} не является целочисленно суммируемым ни при каком n.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и для некоторого $n \geqslant 0$ граф F_{2n+1} является целочисленно суммируемым. Множество его меток обозначим через S. Очевидно, что $0 \notin S$.

Сначала рассмотрим случай $n = 0$. Пусть метками вершин треугольника являются b, c, d. Тогда $\{b+c, b+d, c+d\} \subset S$. Так как в F_1 имеются лишь две вершины, не принадлежащие треугольнику, то можно считать, что $d = b+c$. Значит, в S есть метки $d+b = 2b+c$ и $d+c = 2c+b$. Поскольку $bc(b+c)(b-c) \neq 0$, имеем $\{2b+c, 2c+b\} \cap \{b, c, b+c\} = \varnothing$ и $2b+c \neq 2c+b$. Таким образом, $S = \{b, c, b + c, 2b + c, 2c + b\}$ и вершина $2b + c$ смежна с вершиной $2c + b$ (так как вершины, не принадлежащие треугольнику, смежны в F_1). Тогда $3b+3c \in S$. Но $3b+3c \notin \{2b+c, 2c+b, b+c\}$, потому что в S нет 0. Наконец, если $3b+3c \in \{b, c\}$, то $S = \{-4, -3, -1, 1, 2\}$. Но легко проверить, что в этом случае $G(S) \neq F_1$.

Теперь рассмотрим случай $n \geqslant 1$. Пусть $k = 2n + 1 \geqslant 3$. Обозначим вершины (метки) так, как это сделано на рис. 1, т. е. b, c, d являются вершинами треугольника, вершина a смежна с b, а $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ — множество вершин степени 1, смежных с a. Можно считать, что $a > 0$ и $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Обозначим через M максимальный элемент в S. Ясно, что если сумма двух вершин больше M, то эти вершины не могут быть смежными.

Свойство 1. $b < 0$. Действительно, в противном случае подграф, порождённый вершинами с положительными метками, имел бы по крайней мере две вершины и был бы связным, что невозможно, так как вершина M является в нём изолированной.

Свойство 2. Если $a + a_i \in \{c, d\}$ для некоторого i, то $a_i = a + b$.

Действительно, допустим, что $a+a_i = c$. Тогда $a_i, a+b, (a+a_i)+b \in S$ и из утверждения 2 следует, что $a + b \in N[a_i] = \{a_i, a\}$. Поскольку $b \neq 0$, имеем $a + b = a_i$. Случай $a + a_i = d$ рассматривается аналогично.

Свойство 3. $c + d \in A$.

Докажем свойство 3. Ясно, что $c + d \notin \{c, d\}$. Если $c + d = a$, то $c, d, b + c, b + d, b + (c + d) \in S$. По утверждению 2 имеем $d + b \in N[c] = \{c, d, b\}$ и $c + b \in N[d] = \{c, d, b\}$. Значит, $c = d + b$ и $d = c + b$. Но тогда $b = 0$, противоречие.

Предположим, что $c + d = b$. Тогда S должно содержать $2c + d$ и $2d + c$. Возможны два случая.

1) Только одна из этих вершин (скажем, $2d + c$) лежит в A. Тогда $2c + d = a$ и поэтому $d, a + b = 3c + 2d, a + (2d + c) = 3c + 3d \in S$. Из утверждения 2 следует, что $3c + 2d \in N[d] = \{c, d, c + d\}$. Но $3c + 2d \neq c$, так как $c + d \neq 0$ и $3c + 2d \neq c + d$, ибо $2c + d \neq 0$. Поэтому $3c + 2d = d$, т. е. $d = -3c$. Тогда $b = -2c$ и $a = -c$, что противоречит свойству 1.

2) Вершины $2d+c$ и $2c+d$ лежат в A. Тогда $c, a+(c+d), a+(2c+d) \in S$ и по утверждению 2 имеем $a + c + d \in N[c] = \{c, d, c + d\}$. Очевидно, что $a+c+d \neq c+d$. Две другие возможности рассматриваются аналогичным образом, так что можно предположить, что $a + c + d = d$, т. е. $a = -c$. Тогда $2d \in S$ (поскольку $2d = a + (2d + c)$ и $2d + c \in A$). Следовательно, $c, 2d + c, 2d \in S$ и $2d \in N[c] = \{c, d, c + d\}$ по утверждению 2. Так как $c \neq d$ и $d \neq 0$, имеем $c = 2d$. Но тогда $d+(2d+c) = 5d = 2c+d$ и поэтому вершина d смежна с вершиной $2d+c$. Это противоречит предположению о том, что $2d + c \in A$.

Таким образом, $c + d \in A$. Свойство 3 доказано.

Свойство 4. $a + a_k = b$.

Докажем свойство 4. Очевидно, что $a + a_k \notin A \cup \{a\}$. Предположим, что $a + a_k = c$ (случай $a + a_k = d$ рассматривается аналогично). Тогда из свойства 2 вытекает, что $a_k = a + b$ (а значит, $c = b + 2a$) и $a + a_i \notin \{c, d\}$ для всех $i \neq k$. Заметим, что $a_{k-1} + a \notin A \cup \{a, c, d\}$, ибо $a_{k-1} + a > a_{k-1}$, $a_{k-1} \neq 0$ и $a_{k-1} \neq b$. Остаётся единственная возможность, что $a_{k-1} + a = b$, т. е. $a_{k-1} = b - a$. Поскольку $a_{k-2} + a > a_{k-2}$ и $a_{k-2} + a \notin \{a, b, c, d, a + b\}$, получается, что $a_{k-2} + a = a_{k-1}$, т. е. $a_{k-2} = b - 2a$.

Аналогично получаем, что $a_{k-t} = b - ta$ при всех $t = 1, 2, \ldots, k-1$.

По свойству 3 имеем $c+d = b+2a+d \in A$. Если $b+2a+d = b+a > 0$, что противоречит свойству 1. Допустим, что $d+b+2a = b-ta$ при некотором $t \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. Вершина $d = -(2+t)a$ должна быть несмежна с вершиной $a_k = a+b$. Значит, $d+a+b = b-(t+1)a \notin S$, т. е. $t = k-1$ и $d = -a-ka$. Поскольку в S нет 0, то $d+b = b-a-ka \notin A \cup \{b, d, 2a+b\}$. Таким образом, $d+b = a$, т. е. $b = (k+2)a > 0$, что противоречит свойству 1. Свойство 4 доказано.

Итак, $a + a_k = b$. Значит, $a+b = a_k+2a \notin A$, и из свойства 2 следует, что $a+a_i \notin \{a, b, c, d\}$ при любом $i < k$. Таким образом, $a + a_i \in A$. Но в этом случае $A = \{a_k - ta \mid t = 0, 1, \ldots, k-1\}$.

Имеем $a + b = a_k + 2a \in \{c, d\}$. Без ограничения общности можно считать, что $a_k+2a = c$. Тогда $a, d+b = d+(a+a_k), d+c = d+(2a+a_k) \in S$ и по утверждению 2 имеем $d+a+a_k \in N[a] = A \cup \{a, a+a_k\}$. Очевидно, что $d+a+a_k \neq a+a_k$. Если $d+a+a_k = a$, то $d = -a_k$ и $c+d = 2a \in A$ по свойству 3. Значит, $a_k \geqslant 2a > 0$ и, следовательно, $b > 0$, противоречие. Таким образом $d + a + a_k = a_k - ta$ для некоторого $t \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ (т. е. $d = -(t+1)a$). Так как $d+a_k = a_k-(t+1)a \notin S$, получаем $t = k-1$ и $d = -ka$. Из смежности вершин b и c вытекает, что $b+c = 3a+2a_k \in S$. Ясно, что $b + c \neq b$ и $b + c \neq c$. Если $3a + 2a_k = a$, то $b = a + a_k = 0$, противоречие. Допустим, что $3a + 2a_k = a_k - sa$ для некоторого $s \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Тогда $a_k = -a(s+3)$. Если $s \leqslant k-3$, то $d = -ka = a_{k-j}$, где $j = k-s-3$; если $s = k-2$, то $d = b$; если $s = k-1$, то $d = c$. В любом случае получаем противоречие. Наконец, рассмотрим случай $3a + 2a_k = d = -ka$. Имеем $a_k = -a(k+3)/2$. Разделив все метки на $a/2$, получим $S = \{-3k-1, -3k+1, \ldots, -k+1\} \cup \{2, -2k\}$. Но так как k нечётно, то $d = -2k \in \{-3k-1, -3k+1, \ldots, -k+1\}$, противоречие. Теорема 2 доказана.

2. Замечания и открытые проблемы

Обсудим некоторые открытые проблемы, связанные с изучаемой в статье задачей.

Проблема 1. Существуют ли другие целочисленно несуммируемые унициклические графы, кроме C_4 и графов, описанных в теоремах 1 и 2?

Если такие графы существуют, то у них должно быть не менее 9 вершин (с помощью компьютера автор нашёл все целочисленно суммируемые унициклические графы не более чем с 8 вершинами).

Еще одним параметром, тесно связанным с целочисленно суммируемыми графами, является *число целочисленной суммируемости* $\zeta(G)$.

Это минимальное число изолированных вершин, которые нужно добавить к G, чтобы получился целочисленно суммируемый граф. Если G является целочисленно суммируемым графом, то $\zeta(G) = 0$. Для многих классов графов число целочисленной суммируемости известно (более детальную информацию можно найти в [2]).

Проблема 2. Чему равно число целочисленной суммируемости уницикличеcких графов?

Известно, что $\zeta(C_4) = 3$. Автор выдвигает гипотезу, что число целочисленной суммируемости остальных уницикличеcких графов не превосходит 1. К сожалению, даже для графов, перечисленных в теоремах 1 и 2, найти это число нелегко. Те графы, чьи числа целочисленной суммируемости автору удалось найти, перечислены в следующем утверждении.

Утверждение 3. *Число целочисленной суммируемости следующих уницикличеcких графов равно* 1 :

1) F_{2n+1} *при всех* $n \geqslant 0$;

2) $T(n, m, l)$ *при всех* $n \geqslant m \geqslant l \geqslant 1$;

3) $T(n, 1, 0)$ *при всех* $n \geqslant 1$;

4) $T(n, m, 0)$, *если* $n + 1$ *и* $m + 1$ *взаимно просты*;

5) $T(n, m, 0)$, *если* n *и* $m + 1$ *взаимно просты или* m *и* $n + 1$ *взаимно просты*.

Доказательство. Ниже представлены множества меток для каждого из перечисленных выше классов.

1) Непосредственной проверкой нетрудно установить, что $S(F_1 \cup K_1) = \{-5, -4, -1, 2, 3, 4\}$. При $t \geqslant 1$ положим $S = \{-2\} \cup A$, где $A = \{4t, 4t + 1, \ldots, 8t + 3\} \setminus \{4t + 3, 4t + 5, \ldots, 8t - 1\}$. Тогда вершины $4t, 4t + 1$ и $4t + 2$ образуют треугольник и других рёбер в A нет, так как сумма любых двух других его элементов больше $8t + 3$. Вершина -2 смежна со всеми вершинами из A, кроме $4t, 4t + 1$ и $8t + 1$ (последняя вершина будет изолированной). Таким образом, $S = S(F_{2t+1} \cup K_1)$.

2) Положим $k = 2n + 1 \geqslant 3$. Покажем, что $S(T(n, m, l) \cup K_1) = \{1, k, k^2, k^2 + k + 1\} \cup \{k + 1, k + 1 - k^2, \ldots, k + 1 - (l - 1)k^2\} \cup \{k^2 + 1, k^2 + 1 - k, \ldots, k^2 + 1 - (m - 1)k\} \cup \{k^2 + k, k^2 + k - 1, \ldots, k^2 + k - (n - 1)\}$. Указанное множество меток обозначим через S. Поскольку $n \geqslant m \geqslant l \geqslant 1$, числа $k + 1, k^2 + 1$ и $k^2 + k$ присутствуют в S. Следовательно, все рёбра графа $T(n, m, l) \cup K_1$ содержатся в $G(S)$ (при этом вершина $k^2 + k + 1$ будет изолированной). Убедимся, что в $G(S)$ нет «лишних» рёбер. Действительно, каждая вершина графа $G(S)$ имеет вид $a_1k^2 + a_2k + a_3$, где $-k/2 < a_i \leqslant 1$ для всех $i = 1, 2, 3$. Однако если

$uv \notin E(T(n,m,l) \cup K_1)$, то сумма $u+v$ имеет вид $b_1k^2 + b_2k + b_3$, где $-k < b_i \leqslant 2$, причём по крайней мере при одном i выполняется равенство $b_i = 2$. Но тогда $b_1k^2 + b_2k + b_3 \notin S$, т. е. вершины u и v несмежны и в $G(S)$.

3) Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что $S(T(n,1,0) \cup K_1) = \{-8,-5,-3,2\} \cup \{-6,-1,\ldots,5n-6\}$.

4) Если $n+1$ и $m+1$ взаимно просты, то положим $S = \{m+1, n+1, (m+1)+(n+1), (n+1)(m+1)+(n+1)+(m+1)\} \cup \{2(n+1)+m+1, 3(n+1)+m+1, \ldots, (m+1)(n+1)+m+1\} \cup \{2(m+1)+n+1, 3(m+1)+n+1, \ldots, (n+1)(m+1)+n+1\}$. Исследуем граф $G(S)$. Обозначим через V_1 множество меток, сравнимых с $n+1$ по модулю $m+1$, а через V_2 множество меток, сравнимых с $m+1$ по модулю $n+1$. Заметим, что все метки содержатся либо в V_1, либо в V_2, и только метки $m+n+2$ и $(n+1)(m+1)+m+n+2$ попадают в оба эти множества. Из взаимной простоты чисел $n+1$ и $m+1$ следует, что $2(n+1)+m+1$ является единственным числом в S, сравнимым с $2(n+1)$ по модулю $m+1$, а $2(m+1)+n+1$ — единственным числом, сравнимым с $2(m+1)$ по модулю $n+1$. Пусть u и v — произвольные вершины графа. Рассмотрим три случая.

а) Если $u, v \in V_1$, то $u = n+1+k(m+1)$ и $v = n+1+j(m+1)$ для некоторых k и j. Тогда $u+v = 2(n+1)+(k+j)(m+1)$. Следовательно, $k+j=1$. Получаем ребро ac (в обозначениях рис. 1).

б) Если $u, v \in V_2$, то аналогично предыдущему получаем ребро bc.

в) Если $u \in V_1$ и $v \in V_2$, т. е. $u = n+1+k(m+1)$ и $v = j(n+1)+m+1$ для некоторых k и j, то $u+v = (j+1)(m+1)+(k+1)(m+1)$. Следовательно, u и v смежны либо при $j=0$ (получаем рёбра, инцидентные вершине a), либо при $k=0$ (получаем рёбра, инцидентные вершине b). Следовательно, $S = S(T(n,m,0) \cup K_1)$.

5) Если n и $m+1$ взаимно просты, то $S = \{m+1, n, n+m+1, n+2(m+1), n+(n+2)(m+1)\} \cup \{2n+2(m+1), 3n+2(m+1), \ldots, (m+1)n+2(m+1)\} \cup \{n+3(m+1), n+4(m+1), \ldots, n+(n+1)(m+1)\}$. В случае, когда $n+1$ и m взаимно просты, множество меток получается из S заменой m и n друг на друга. Доказательство того, что $S(T(n,m,0) \cup K_1) = S$, проводится аналогично предыдущему случаю и здесь не приводится. Утверждение 3 доказано.

Заметим, что минимальным графом вида $T(n,m,0)$, не подпадающим ни под одно из условий утверждения 2, является граф $T(9,5,0)$.

Автор благодарит рецензента за ценные замечания, позволившие сократить доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chen Z.** Integral sum graphs from identification // Discrete Math. 1998. V. 181, N 1–3. P. 77–90.
2. **Gallian J. A.** A dynamic survey of graph labeling // http://www.combinatorics.org/Surveys/ds6.pdf
3. **Harary F.** Sum graphs over all integers // Discrete Math. 1994. V. 124, N 1–3. P. 99–105.
4. **Liaw S. C. , Kuo D., Chang G.** Integral sum numbers of graphs // Ars Combinatoria. 2000. V. 54. P. 259–268.
5. **Melnikov L. S., Pyatkin A. V.** Regular integral sum graphs // Discrete Math. 2002. V. 252, N 1–3. P. 237–245.
6. **Nicholas T., Somasundaram S.** More results on integral sum graphs // Proc. of National conference on graph theory and its applications (Chennai, 2001).
7. **Sharary A.** Integral sum graphs from complete graphs, cycles and wheels // Arab Gulf J. Sci. Res. 1996. V. 14, N 1. P. 1–14.
8. **Wu J., Mao J., Li D.** New types of integral sum graphs // Discrete Math. 2003. V. 260, N 1–3. P. 163–176.
9. **Xu B.** On integral sum graphs // Discrete Math. 1999. V. 194, N 1–3. P. 285–294.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.
E-mail: artem@math.nsc.ru

Статья поступила
28 августа 2006 г.