

УДК 519.17

ВЕКТОРЫ РАЗНООБРАЗИЯ ШАРОВ ДЛЯ ГРАФОВ И ОЦЕНКИ ИХ КОМПОНЕНТ^{*)}

Т. И. Федоряева

Изучаются векторы разнообразия шаров (i -я компонента вектора равна числу различных шаров радиуса i) для обыкновенных связных графов и свойства их компонент. Получены точные верхние и нижние оценки числа различных шаров заданного радиуса для n -вершинных графов (деревьев) и n -вершинных деревьев (графов при $n \geq 2d$) диаметра d . Показана достижимость таких оценок в одном графе независимо от рассматриваемого радиуса шаров. Доказано необходимое и достаточное условие существования n -вершинного графа диаметра d с локальным (полным) разнообразием шаров.

Введение

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $B_i(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq i\}$ — шар радиуса i с центром в точке x . Как правило, для метрического пространства шары заданного радиуса с центрами в различных точках x, y различны. В случае же дискретных метрических пространств (X, ρ) можно наблюдать эффект, когда шар имеет несколько центров, т. е. $B_i(x) = B_i(y)$ при $x, y \in X$ и $x \neq y$. Таким образом, в (X, ρ) шары с различными центрами могут совпадать, и для конечного пространства можно говорить о числе всех различных шаров фиксированного радиуса, а также исследовать разнообразие и пересекаемость шаров, содержащихся в пространстве X . Такой подход был предложен в [1] с целью изучения строения графов как дискретных метрических пространств. В настоящей статье формулируется и исследуется задача нахождения оценок числа различных шаров заданного радиуса для метрических пространств обыкновенных связных графов с обычным расстоянием между вершинами, т. е. длиной кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины.

Пусть $i \geq 0$ и $\tau_i(G)$ — число различных шаров радиуса i в метрическом пространстве обыкновенного связного графа G с метрикой пути.

^{*)}Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00364).

Нетрудно видеть, что $\tau_0(G) = |V(G)| \geq \dots \geq \tau_i(G) \geq \tau_{i+1}(G) \geq \dots \geq 1 = \tau_d(G) = \tau_{d+1}(G) = \dots$, где $V(G)$ — множество вершин графа G и $d = d(G)$ — диаметр графа G .

Определение 1. Вектор $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \dots, \tau_i(G), \dots, \tau_d(G))$ называется *вектором разнообразия шаров* графа G .

Впервые векторы такого вида рассмотрены в [1], а в [2–6] продолжено их изучение.

Обозначим через Γ_n (T_n) и $\Gamma_{n,d}$ ($T_{n,d}$) соответственно класс всех n -вершинных обыкновенных связных графов (деревьев) и n -вершинных обыкновенных связных графов (деревьев) диаметра d . Всюду далее, где будут рассматриваться графы (деревья) из класса $\Gamma_{n,d}$ ($T_{n,d}$), считаем, что $\Gamma_{n,d} \neq \emptyset$ ($T_{n,d} \neq \emptyset$).

Замечание 1. $\Gamma_{n,d} \neq \emptyset$ ($T_{n,d} \neq \emptyset$) тогда и только тогда, когда $n = d + 1 = 1$ или $n \geq d + 1 \geq 2$ ($1 \leq n = d + 1 \leq 2$ или $n \geq d + 1 \geq 3$).

Пусть Ω — один из перечисленных выше классов графов Γ_n , T_n , $\Gamma_{n,d}$, $T_{n,d}$. Положим $\tau(\Omega) = \{\tau(G) \mid G \in \Omega\}$, $\bar{\tau}_i(\Omega) = \max_{G \in \Omega} \tau_i(G)$, $\underline{\tau}_i(\Omega) = \min_{G \in \Omega} \tau_i(G)$. Естественно возникает задача нахождения величин $\bar{\tau}_i(\Omega)$ и $\underline{\tau}_i(\Omega)$ — наибольшего и наименьшего числа шаров заданного радиуса i в графах из класса Ω .

Нахождению величин $\bar{\tau}_i(\Omega)$, $\underline{\tau}_i(\Omega)$ для указанных выше классов Ω посвящена данная статья. В § 1, содержащем предварительные результаты, исследуются свойства шаров произвольного графа и соотношения между компонентами его вектора разнообразия шаров. Как следствие из этих результатов получен критерий существования n -вершинного графа диаметра d и радиуса r . Заметим, что в [8] получено необходимое и достаточное условие существования графа диаметра d и радиуса r , а также подсчитано наименьшее число вершин в таких графах.

В § 2 рассматривается класс деревьев $T_{n,d}$. Ранее автором было получено полное описание векторов разнообразия шаров в метрических пространствах деревьев (теорема 1) [5]. На основе этих результатов в § 2 устанавливаются точные значения наибольшего и наименьшего числа различных шаров заданного радиуса i в n -вершинном дереве диаметра d , т. е. $\bar{\tau}_i(T_{n,d})$ и $\underline{\tau}_i(T_{n,d})$. Верхние оценки $\bar{\tau}_i(T_{n,d})$ (нижние оценки $\underline{\tau}_i(T_{n,d})$) независимо от i достигаются в одном дереве $\bar{D}_{n,d} \in T_{n,d}$ ($\underline{D}_{n,d} \in T_{n,d}$), построенном в настоящей статье, т. е. $\bar{\tau}_i(T_{n,d}) = \tau_i(\bar{D}_{n,d})$ ($\underline{\tau}_i(T_{n,d}) = \tau_i(\underline{D}_{n,d})$) для любого i (теорема 2). Кроме того, подсчитано число неизоморфных деревьев из $T_{n,d}$, вектор разнообразия шаров

которых совпадает с $\tau(\overline{D}_{n,d})$ ($\tau(\underline{D}_{n,d})$), и указан их общий вид.

В § 3 рассматриваются классы n -вершинных графов и деревьев, т. е. Γ_n и T_n соответственно. В теореме 3 и следствии 3 устанавливаются точные значения $\underline{\tau}_i(\Gamma_n)$, $\overline{\tau}_i(\Gamma_n)$, $\underline{\tau}_i(T_n)$, $\overline{\tau}_i(T_n)$, причём нижние (верхние) оценки также как и в предыдущей теореме реализуются в одном графе независимо от i , и такой граф (с точностью до изоморфизма) единственный.

В § 4 рассматривается класс $\Gamma_{n,d}$ n -вершинных графов диаметра d . В теореме 5 и следствии 6 приводятся точные значения $\underline{\tau}_i(\Gamma_{n,d})$, достижимые в одном графе для любого i . Очевидно, что $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) \leq n$. Поэтому при нахождении величины $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d})$ особый интерес представляет случай, когда $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = n$. Это равенство означает, что в $\Gamma_{n,d}$ существует граф с локальным или даже полным разнообразием шаров.

Определение 2 [1]. Граф G обладает *локальным t -разнообразием шаров*, если $|V(G)| = \tau_0(G) = \tau_1(G) = \dots = \tau_t(G)$, $0 \leq t < d(G)$. Граф G с локальным t -разнообразием при $t = d(G) - 1$ называется графом *полного разнообразия шаров*.

Известно [1], что почти все графы являются графами с полным разнообразием шаров. При этом в [5] показано, что класс деревьев с полным разнообразием шаров является «бедным», так как состоит лишь из звезды $K_{1,n}$, и получена характеристика деревьев с локальным разнообразием шаров [3]. В § 4 настоящей статьи для любого $t \leq \lfloor d/2 \rfloor$ построено дерево из $T_{n,d}$, $n \geq 2$, с локальным t -разнообразием шаров. Кроме того, например, из полученных в следствии 2 значений $\overline{\tau}_i(T_{n,d})$ вытекает, что деревья из класса $T_{n,d}$ не обладают локальным t -разнообразием шаров при $t > \lfloor d/2 \rfloor$. Однако, как будет показано в следствии 4, в общем случае для графов из класса $\Gamma_{n,d}$ это не так.

Заметим, что если граф G обладает локальным t -разнообразием шаров при $t > 0$, то для компонент вектора разнообразия шаров $\tau(G) = (\tau_0, \dots, \tau_d)$ выполняется соотношение $\tau_{i-1} = \tau_i > \tau_{i+1}$ для некоторого i . Поэтому сначала в теореме 4 устанавливается необходимое и достаточное условие для i, n и d , при котором такая ситуация возможна для некоторого графа из класса $\Gamma_{n,d}$. Как следствие из этой теоремы найдено необходимое и достаточное условие существования n -вершинного графа диаметра d с локальным t -разнообразием шаров (следствие 4). В частности, для полного разнообразия шаров такое условие приведено в следствии 5. Далее из следствия 4 мы получаем все соотношения между i, n и d (указанные в следствии 6), при которых $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = n$. Для $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d})$ в явном виде определяется верхняя оценка $\tau_i^*(n, d) \geq \overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d})$. Доказы-

вается, что она совпадает с $\bar{\tau}_i(\Gamma_{n,d})$ при $i \in [0, m)$ для некоторого $m \leq d$, зависящего от n и d (в частности, $m = d$ при $n \geq 2d$), а при $i \in [m, d)$ выполняется неравенство $\tau_i^*(n, d) < n$ и функция $\tau_i^*(n, d)$ строго убывает по i . Таким образом, $\tau_i^*(n, d)$ суть точные значения $\bar{\tau}_i(\Gamma_{n,d})$ на интервале $[0, m)$, причём эти значения достижимы в одном графе независимо от $i \in [0, m)$.

В § 2-4 найдены точные верхние (нижние) оценки $\bar{\tau}_i(\Omega)$ ($\underline{\tau}_i(\Omega)$), достижимые в одном графе, независимо от i , для следующих классов графов Ω : $T_{n,d}$ (теорема 2), T_n и Γ_n (теорема 3), а также $\Gamma_{n,d}$ при $n \geq 2d$ (теорема 5).

Понятно, что величины $\bar{\tau}_i(\Omega)$ и $\underline{\tau}_i(\Omega)$, найденные в явном виде через параметры i , n и d , дают следующие необходимые условия реализуемости произвольного целочисленного вектора (τ_0, \dots, τ_d) вектором разноразмерности шаров подходящего графа из класса Ω : $\underline{\tau}_i(\Omega) \leq \tau_i \leq \bar{\tau}_i(\Omega)$, $i \geq 0$. В частности, эти условия позволяют построить серии нетривиальных примеров целочисленных векторов, нереализующихся вектором разноразмерности шаров для графа из класса Ω . Отметим, что задача описания векторов разноразмерности шаров для деревьев была решена в [5], а в общем случае для графов остается открытой.

Кроме того, достижимость верхних (нижних) оценок $\bar{\tau}_i(\Omega)$ ($\underline{\tau}_i(\Omega)$) в одном графе, независимо от i , позволяет получить точные оценки для различных величин, зависящих не от одной, а от нескольких компонент вектора разноразмерности шаров, например, для их арифметического среднего.

В § 5 обсуждается один из возможных прикладных аспектов поставленной задачи нахождения величин $\bar{\tau}_i(\Omega)$, $\underline{\tau}_i(\Omega)$. Здесь приводится интерпретация данной задачи для систем управления с максимальной степенью контроля.

Результаты статьи анонсированы в [6].

В статье рассматриваются конечные обыкновенные связные графы и используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [7]. Пусть $n(G)$ — число вершин графа G , $\rho_G(x, y)$ — расстояние между вершинами x и y графа G , $e_G(x)$ — эксцентриситет вершины x , $r(G)$ — радиус графа G .

Множество всех вершин графа G , лежащих на всех кратчайших цепях, соединяющих вершины x и y , называется *интервалом* $[x, y]_G$. Естественным образом определяются полуоткрытый интервал $[x, y)_G$ и открытый интервал $(x, y)_G$. Для простой цепи P графа G , содержащей вершины x и y , через $P[x, y]$ будем обозначать интервал $[x, y]_P$. Наиболь-

шую длину кратчайшей цепи в графе G с концом x , содержащей вершину y , будем называть *относительным эксцентриситетом* вершины x относительно y и обозначать через $e_G(x, y)$. В приведённых выше обозначениях будем опускать индекс G , если понятно, о каком графе G идет речь, и для краткости вместо $x \in V(G)$ будем писать $x \in G$. Как обычно, P_n обозначает n -вершинную простую цепь, K_n — полный n -вершинный граф, $K_{1,n}$ — $(n+1)$ -вершинную звезду, \preceq — лексикографический порядок на множестве пар целых чисел, определяемый стандартным образом:

$$(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2), \text{ если } x_1 < y_1 \text{ или } x_1 = y_1, x_2 \leq y_2.$$

Для целочисленных векторов $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ и $(\beta_0, \dots, \beta_k)$ будем писать $(\alpha_0, \dots, \alpha_m) \leq (\beta_0, \dots, \beta_k)$, если $m \leq k$ и $\alpha_i \leq \beta_i$ при всех $i \leq m$. Подграф G графа H называется *изометричным*, если для любых вершин $x, y \in V(G)$ выполняется равенство $\rho_G(x, y) = \rho_H(x, y)$. Кратчайшую цепь P с концами u_1, u_n такую, что

$$u_2, \dots, u_{n-1} \in V(P), \quad \sum_{i=1}^{n-1} \rho_G(u_i, u_{i+1}) = \rho_G(u_1, u_n)$$

(причём не обязательно $u_i \neq u_{i+1}$), будем обозначать через (u_1, u_2, \dots, u_n) .

§ 1. Предварительные результаты

Всюду в статье для рассматриваемого графа через P будем обозначать его диаметральною цепь, через a и b — концы цепи P , через a_i и b_i — вершины цепи P такие, что $\rho(a, a_i) = \rho(b, b_i) = i$, $0 \leq i \leq d(P)$.

Лемма 1. Пусть x, y — различные вершины графа G и $i, j \leq d(G)$. Тогда

(i) Если $B_i(x) = B_i(y)$, то выполняются следующие условия: $e(x, z) \leq i$ для любого $z \in [y, y_x]$, $e(y, z) \leq i$ для любого $z \in [x, x_y]$, где $x_y, y_x \in [x, y]$ и $\rho(y, y_x) = \rho(x, x_y) = \lceil \rho(x, y)/2 \rceil - 1$;

(ii) Если $e(x, y) \geq i + 1$, то $B_i(x) \neq B_i(y)$;

(iii) Если $B_{i+1}(x) \neq B_{i+1}(y)$, то $B_i(x) \neq B_i(y)$;

(iv) Если $\tau_i(G) \geq \tau_j(G)$ и $B_j(x) \neq B_j(y)$, то $B_i(x) \neq B_i(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство утверждения (i) почти совпадает с доказательством леммы 1 из [5]. Утверждение (ii) следует из утверждения (i).

Докажем утверждение (iii). Пусть $z \in B_{i+1}(x) \setminus B_{i+1}(y)$. Тогда $\rho(x, z) \leq i + 1$ и можно определить такую вершину z' , что

$$z' = \begin{cases} z, & \text{если } \rho(x, z) \leq i, \\ z', & \text{если } \rho(x, z) = i + 1, \rho(z, z') = 1, z' \in [x, z]. \end{cases}$$

Тогда $z' \in B_i(x) \setminus B_i(y)$.

Докажем утверждение (iv). Если $j \geq i$, то это утверждение следует из утверждения (iii). Пусть $j < i$, $z_1 = x$, $z_2 = y$ и $B_j(z_1), B_j(z_2), \dots, B_j(z_{\tau_j})$ — все различные шары радиуса j графа G . Тогда для любой вершины $v \in G$ существует такое k , что $B_j(v) = B_j(z_k)$. Следовательно, $B_i(v) = B_i(z_k)$ по утверждению (iii). Значит, все различные шары радиуса i графа G содержатся среди шаров $B_i(z_1), \dots, B_i(z_{\tau_j})$. Так как $\tau_i(G) \geq \tau_j$, то все шары $B_i(z_1), \dots, B_i(z_{\tau_j})$ различны. Следовательно, $B_i(z_1) \neq B_i(z_2)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $P = (a, x, y, b)$ — диаметральная цепь графа G и $P' = (x, y, z)$ — кратчайшая цепь такая, что $P \cap P'[y, z] = \{y\}$ и $\rho(x, z) > \rho(x, b)$. Тогда $n(G) \geq d(G) + \rho(x, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C — кратчайшая цепь с концами a, z . Так как $\rho(x, z) > \rho(x, b)$, то $\rho(a, x) + \rho(x, z) > d(G)$. Поэтому $C \cap P[x, b] = \emptyset$ и $C \cap P'[x, y] = \emptyset$. Обозначим через x' последнюю вершину из $C[a, z] \cap P$ и через z' первую вершину из $C[x', z] \cap P'$ при переходе от a к z по цепи C . Тогда $x' \in P[a, x)$, $z' \in P'(y, z]$ и $C(x', z') \cap (P \cup P') = \emptyset$. Следовательно,

$$n(G) \geq n(P) + n(P'(y, z]) + n(C(x', z')). \quad (1)$$

Из неравенства треугольника следует, что

$$\begin{aligned} \rho(x, x') + \rho(x', z') &\geq \rho(x, z') = \rho(x, y) + \rho(y, z'), \\ \rho(y, z') + \rho(x', z') &\geq \rho(x', y) = \rho(x, y) + \rho(x, x'). \end{aligned}$$

Суммируя почленно эти неравенства, получаем, что $\rho(x', z') \geq \rho(x, y)$. Отсюда и из (1) следует, что $n(G) \geq d(G) + \rho(x, z)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть P — диаметральная цепь с концами a, b графа G , $\lceil d(G)/2 \rceil \leq i < d(G)$ и $n(G) \leq d(G) + i$. Тогда $\tau_{i+1}(G) \leq \tau_i(G) - 2$ и $B_i(x) = G$ для любой вершины $x \in P[a_i, b_i]$, где $a_i, b_i \in P$ и $\rho(a, a_i) = \rho(b, b_i) = i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in P[a_i, b_i]$. Предположим, что в графе G имеется вершина y такая, что $\rho(x, y) \geq i + 1$. Так как $i \geq \lceil d(G)/2 \rceil$, то $P \subseteq B_i(x)$. Значит, $y \notin P$ и $\rho(x, a) \leq i$, $\rho(x, b) \leq i$. Отсюда в силу леммы 2 следует, что $n(G) \geq d(G) + \rho(x, y) \geq d(G) + i + 1$. Пришли к противоречию. Следовательно, $B_i(x) = G$. Так как $a_{i+1}, a_i, b_{i+1} \in P[a_{i+1}, b_{i+1}]$, то имеем

$$B_{i+1}(a_{i+1}) = B_{i+1}(a_i) = B_{i+1}(b_{i+1}). \quad (2)$$

Поскольку $e(a_{i+1}, a_i) \geq i + 1$, $e(a_{i+1}, b_{i+1}) \geq i + 1$ и $e(b_{i+1}, a_i) \geq i + 1$, по второму утверждению леммы 1 получаем, что $B_i(a_{i+1}), B_i(a_i), B_i(b_{i+1})$

— различные шары. Отсюда в силу третьего утверждения леммы 1 и соотношения (2) получаем $\tau_{i+1}(G) \leq \tau_i(G) - 2$. Лемма 3 доказана.

В следующем следствии приведён критерий существования n -вершинного графа диаметра d и радиуса r .

Следствие 1. *В классе $\Gamma_{n,d}$ содержится граф радиуса $r > 0$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

- 1) $0 < 2r - 1 \leq d \leq 2r$, $n \geq d + 1$; 2) $0 < r \leq d \leq 2r - 2$, $n \geq d + r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — n -вершинный граф диаметра d и радиуса $r > 0$. Тогда $n \geq d + 1$ и $r \leq d \leq 2r$ в силу неравенства треугольника. Будем считать, что $r \leq d \leq 2r - 2$, иначе выполняется условие 1. Тогда $\lceil d/2 \rceil \leq r - 1 < d$. Предположим, что $n < d + r$. По лемме 3 получаем $B_{r-1}(a_{r-1}) = G$. Тогда $r \leq e_G(a_{r-1}) \leq r - 1$, противоречие. Таким образом, выполняется условие 2.

Обратное утверждение следует из замечаний 1, 5 и свойства (i) леммы 7 из § 4. Действительно, граф $H_{n,d,t}$, определяемый в § 4, принадлежит классу $\Gamma_{n,d}$ и $r(H_{n,d,t}) = r$, где $t = 0$, $r = \lceil d/2 \rceil$ в случае выполнения условия 1 и $t = r - 1$, $0 < \lceil d/2 \rceil \leq t < d$ в случае выполнения условия 2. Следствие 1 доказано.

Отметим, что этот критерий можно также получить из результатов работы [8], в которой найдено наименьшее число вершин для графов диаметра d и радиуса r . При этом нетрудно показать, что из этой оценки, вообще говоря, не вытекает нижняя оценка числа вершин из леммы 2.

§ 2. Класс деревьев $T_{n,d}$

В [5] получено полное описание векторов разнообразия шаров в метрических пространствах деревьев. Перейдем к формулировке этого результата. Определим классы векторов \mathcal{A}_n и $\mathcal{A}_{n,d}$ следующим образом. Положим $\mathcal{A}_n = \bigcup_{d \geq 0} \mathcal{A}_{n,d}$,

$$\mathcal{A}_{n,d} = \left\{ \Delta_d + \sum_{j=1}^m \beta_d(q_j, s_j) \mid m \geq 0, n = d + 1 + \sum_{j=1}^m s_j \text{ и для} \right.$$

$$\bar{q} = (q_0, \dots, q_m), \bar{s} = (s_0, \dots, s_m) \text{ выполняются условия (3)–(5)} \left. \right\},$$

$$q_0 = s_0 = \lfloor d/2 \rfloor, 1 \leq s_j \leq q_j \text{ при } 1 \leq j \leq m, \quad (3)$$

$$(q_0, s_0) \succ (q_1, s_1) \succ \dots \succ (q_m, s_m), \quad (4)$$

$$\mathcal{X}_{\bar{q}, \bar{s}}(i, q_{i+1}) > 0 \text{ при } 1 \leq i < m. \quad (5)$$

Здесь \succ — лексикографический порядок, $\mathcal{A}_{\bar{q}, \bar{s}}$ — рекурсивная функция, явно определённая по векторам \bar{q}, \bar{s} в [5], $\Delta_d = (\Delta_0^d, \Delta_1^d, \dots, \Delta_d^d)$, $\beta_d(q, s) = (\beta_{0qs}, \beta_{1qs}, \dots, \beta_{dqs})$, где

$$\Delta_i^d = \begin{cases} d+1, & \text{если } 0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor, \\ 2(d-i)+1, & \text{если } \lfloor d/2 \rfloor < i < d, \\ 1, & \text{если } i \geq d; \end{cases} \quad (6)$$

$$\beta_{iqs} = \begin{cases} s, & \text{если } 0 \leq i \leq q, \\ s - (i - q), & \text{если } q < i < q + s, \\ 0, & \text{если } i \geq q + s. \end{cases} \quad (7)$$

Лемма 4 [5]. $\tau(P_n) = \Delta_{n-1}$.

Теорема 1 [5]. $\tau(T_n) = \mathcal{A}_n$, $\tau(T_{n,d}) = \mathcal{A}_{n,d}$.

Таким образом, класс векторов \mathcal{A}_n ($\mathcal{A}_{n,d}$) состоит из тех и только тех векторов, каждый из которых является вектором разнообразия шаров подходящего n -вершинного дерева (n -вершинного дерева диаметра d).

В дальнейшем нам потребуются свойства векторов вида $\beta_d(q, s)$, указанные в приведённой ниже лемме. Далее всюду, где рассматриваются такие векторы, считаем, что $d \geq 0$, $q \geq 0$ и $s \geq 0$.

Лемма 5 (свойства векторов $\beta_d(q, s)$).

- (i) $\beta_d(q, 0) = (0, \dots, 0)$ и $\beta_d(q, s) \geq (0, \dots, 0)$;
- (ii) $\beta_d(q, s) \leq \beta_d(q', s')$ при $q \leq q'$ и $s \leq s'$;
- (iii) Если $q \leq d$ и $q' \leq d$, то $\beta_d(q, s) = \beta_d(q', s') \Leftrightarrow q = q', s = s'$;
- (iv) $\beta_d(q, s) + \beta_d(q, s') \leq \beta_d(q, s + s')$;
- (v) $\beta_d(q, s') = \beta_d(q, s) + \beta_d(q + s, s' - s)$ при $s \leq s'$;
- (vi) Если $\sum_{j=1}^m s_j = kq + r$, $k \geq 0$, $0 \leq r < q$ и $1 \leq s_j \leq q$ при $1 \leq j \leq m$,

то $\sum_{j=1}^m \beta_d(q, s_j) \leq k\beta_d(q, q) + \beta_d(q, r)$;

- (vii) $\sum_{j=1}^m \beta_d(q, s_j) \geq (\sum_{j=1}^m s_j)\beta_d(q, 1)$;

(viii) Если $d - q \geq s_1 \geq \dots \geq s_m \geq 1$ и $d - q \geq s'_1 \geq \dots \geq s'_{m'} \geq 1$, то

$$\sum_{j=1}^m \beta_d(q, s_j) = \sum_{j=1}^{m'} \beta_d(q, s'_j) \Leftrightarrow m = m' \text{ и } s_j = s'_j \text{ для любого } j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства (i)–(v) непосредственно следуют из (7).

Доказательство свойства (vi) проведём индукцией по m .

Базис индукции: $1 \leq m \leq 2$. Если $m = 1$, то либо $k = 1$, $r = 0$, $q = s_1$, либо $k = 0$, $r = s_1$. Поэтому требуемое неравенство вытекает из свойства (i).

Пусть $m = 2$. Если $s_1 + s_2 < q$ ($s_1 = s_2 = q$), то требуемое неравенство вытекает из свойства (iv) (свойства (i)). Поэтому считаем, что $s_1 + s_2 = q + r$. Тогда $s_2 \geq r$, $q \geq s_1$, $q + s_1 \geq q + r$, $q - s_1 \geq s_2 - r$. Используя свойства (ii) и (v), получаем $\beta_d(q, s_1) + \beta_d(q, s_2) = \beta_d(q, q) - \beta_d(q + s_1, q - s_1) + \beta_d(q, r) + \beta_d(q + r, s_2 - r) \leq \beta_d(q, q) + \beta_d(q, r)$.

Шаг индукции: $m \geq 3$. По индукционному предположению имеем

$$\sum_{j=1}^{m-1} \beta_d(q, s_j) \leq k' \beta_d(q, q) + \beta_d(q, r'),$$

$$\beta_d(q, r') + \beta_d(q, s_m) \leq k'' \beta_d(q, q) + \beta_d(q, r''),$$

где $\sum_{j=1}^{m-1} s_j = k'q + r'$, $k' \geq 0$, $0 \leq r' < q$, $r' + s_m = k''q + r''$, $k'' \geq 0$, $0 \leq r'' < q$. Тогда $\sum_{j=1}^m \beta_d(q, s_j) \leq (k' + k'')\beta_d(q, q) + \beta_d(q, r'')$, причём $\sum_{j=1}^m s_j = (k' + k'')q + r''$. Ввиду единственности k и r получаем $k = k' + k''$ и $r = r''$.

Свойство (vii) следует из очевидного неравенства $\beta_d(q, s) \geq s\beta_d(q, 1)$, вытекающего из (7).

Убедимся в справедливости свойства (viii). Пусть $\sum_{j=1}^m \beta_d(q, s_j) = (\beta_0, \dots, \beta_d)$, $\sum_{j=1}^{m'} \beta_d(q, s'_j) = (\beta'_0, \dots, \beta'_d)$ и $s = \sum_{j=1}^m s_j$. Предположим, что $\beta_i = \beta'_i$ для любого i . Так как $0 \leq q < d$, то $s = \beta_0 = \beta'_0 = \sum_{j=1}^{m'} s'_j$ и $s - m = \beta_{q+1} = \beta'_{q+1} = \sum_{j=1}^{m'} s'_j - m'$. Следовательно, $m = m'$. Далее доказательство проведём индукцией по m .

Базис индукции $m = 1$ следует из свойства (iii).

Шаг индукции: $m \geq 2$. Предположим, что $s_m < s'_m$. Обозначим через k число s_j , равных s_m . Так как $q + s_m < q + s'_m \leq d$, то β_{q+s_m+1} , β'_{q+s_m+1} определены и нетрудно показать, что $s - ks_m - (m-k)(s_m+1) = \beta_{q+s_m+1} = \beta'_{q+s_m+1} = s - m(s_m+1)$. Следовательно, $k = 0$, противоречие. Таким образом, $s_m = s'_m$. Далее имеем $\sum_{j=1}^{m-1} \beta_d(q, s_j) = \sum_{j=1}^{m-1} \beta_d(q, s'_j)$ и по индукционному предположению получаем $s_j = s'_j$ при любом $j < m$. Лемма 5 доказана.

Перейдём к задаче нахождения точных оценок числа различных шаров заданного радиуса для деревьев из класса $T_{n,d}$. Пусть $T_{n,d} \neq \emptyset$. Определим деревья $\underline{D}_{n,d}$ и $\overline{D}_{n,d}$ следующим образом. Рассмотрим простую цепь P длины d с концами a, b . Если $n > d + 1$, то к цепи P добавим новые вершины $v_1, \dots, v_{n-(d+1)}$ и каждую из них соединим ребром с вершиной a_1 . В случае $n = d + 1$ к P ничего не добавляем. Полученное дерево обозначим через $\underline{D}_{n,d}$ (см. рис. 1).

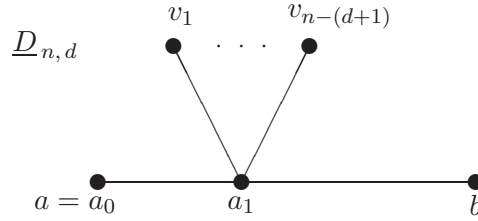


Рис. 1

Пусть $t = \lfloor d/2 \rfloor$. Определим k и r следующим образом: $n = d + 1 + kt + r$; $k = r = 0$ при $d \leq 1$; $k \geq 0$ и $0 \leq r < t$ при $d \geq 2$.

Если $k > 0$, то к цепи P добавим простые цепи P_1, \dots, P_k длины t такие, что $V(P_i) \cap V(P) = V(P_i) \cap V(P_j) = \{a_t\}$, $i \neq j$. В случае $k = 0$ к P ничего не добавляем. Если $r > 0$, то к полученному дереву D добавим простую цепь P_0 длины r такую, что $V(P_0) \cap V(D) = \{a_t\}$. При $r = 0$ к D ничего не добавляем. Полученное дерево обозначим через $\overline{D}_{n,d}$ (см. рис. 2). Очевидно, что $\underline{D}_{n,d}, \overline{D}_{n,d} \in T_{n,d}$.

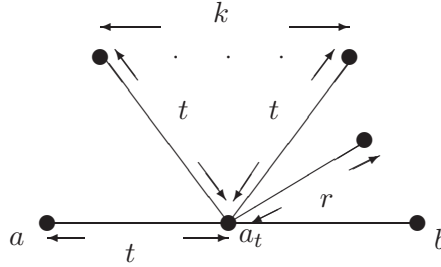


Рис. 2

Теорема 2. Вектор разнообразия шаров произвольного дерева $D \in T_{n,d}$ удовлетворяет соотношениям: $\tau(\underline{D}_{n,d}) \leq \tau(D) \leq \tau(\overline{D}_{n,d})$. Число неизоморфных деревьев из $T_{n,d}$, вектор разнообразия шаров которых совпадает с $\tau(\underline{D}_{n,d})$ ($\tau(\overline{D}_{n,d})$), равно $\xi(n, d)$ ($\xi(n, d)$). Общий вид таких деревьев изображён на рис. 3а (рис. 3б).

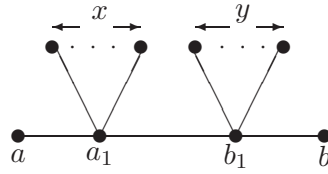
$$\text{Здесь } \bar{\xi}(n, d) = \begin{cases} \lfloor k/2 \rfloor + 1, & \text{если } d \text{ нечётно, } r = 0 \text{ и } k > 0, \\ k + 1, & \text{если } d \text{ нечётно, } r > 0 \text{ и } k > 0, \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\underline{\xi}(n, d) = \begin{cases} \lfloor (n - (d + 1))/2 \rfloor + 1, & \text{если } d \geq 3, \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} k &= r = 0 \text{ при } d \leq 1; \\ n &= d + 1 + k \lfloor d/2 \rfloor + r; \\ k &\geq 0 \text{ и } 0 \leq r < \lfloor d/2 \rfloor \text{ при } d \geq 2. \end{aligned} \quad (8)$$

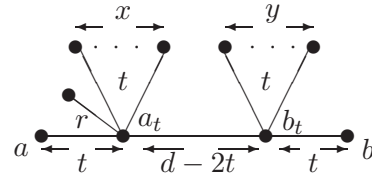
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$x + y = n - (d + 1), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$



a)

$$x + y = k, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad t = \lfloor d/2 \rfloor$$



b)

Рис. 3

По теореме 1 и алгоритму вычисления вектора разнообразия шаров произвольного дерева (см. лемму 5 из [5]) получаем

$$\tau(\underline{D}_{n,d}) = \Delta_d + (n - d - 1)\beta_d(1, 1), \quad (9)$$

$$\tau(\overline{D}_{n,d}) = \Delta_d + k\beta_d(t, t) + \beta_d(t, r), \quad (10)$$

$$\tau(D) = \Delta_d + \sum_{j=1}^m \beta_d(q_j, s_j), \quad \sum_{j=1}^m s_j = n - (d + 1) \quad (11)$$

при некоторых $m \geq 0$, $\bar{q} = (q_0, \dots, q_m)$ и $\bar{s} = (s_0, \dots, s_m)$, удовлетворяющих условиям (3)–(5). При этом существует последовательность деревьев D_0, \dots, D_m такая, что D_0 — простая цепь длины d , $D_m = D$, $\text{rank } D_j = (q_j, s_j)$, D_{j+1} получается из D_j добавлением такого нового s_{j+1} -окончания, что в D_{j+1} образуется галочка ранга (q_{j+1}, s_{j+1}) с некоторым основанием $c_{j+1} \in D_j$ (см. [5]).

При $0 \leq d \leq 2$ или $n = d + 1$ класс $T_{n,d}$ содержит единственное (с точностью до изоморфизма) дерево. Поэтому полагаем, что $n \geq d + 2 \geq 5$.

Тогда $m > 0$ и $t > 0$. Из (3), (4), (8)–(11) и свойств (ii), (vi), (vii) леммы 5 получаем

$$\tau(\underline{D}_{n,d}) = \Delta_d + \left(\sum_{j=1}^m s_j\right)\beta_d(1,1) \leq \tau(D) \leq \Delta_d + \sum_{j=1}^m \beta_d(t, s_j) \leq \tau(\overline{D}_{n,d}).$$

Предположим, что $\tau(D) = \tau(\overline{D}_{n,d})$, и опишем все такие деревья $D \in T_{n,d}$ с точностью до изоморфизма. Покажем, что $q_j = t$ при любом j . Действительно, пусть от противного $q_j < t$ для некоторого j . Тогда из (7) получаем $\beta_{q_j+1, q_j, s_j} = s_j - 1 < s_j = \beta_{q_j+1, t, s_j}$. Теперь, используя (4), (11) и свойство (ii) леммы 5, нетрудно показать, что $\tau_{q_j+1}(D)$ меньше $(q_j + 1)$ -й компоненты вектора $\Delta_d + \sum_{j=1}^m \beta_d(t, s_j)$. С другой стороны,

$$\tau(D) = \tau(\overline{D}_{n,d}) = \Delta_d + k\beta_d(t, t) + \beta_d(t, r) \geq \Delta_d + \sum_{j=1}^m \beta_d(t, s_j)$$

в силу (3), (4), (8), (10), (11) и свойства (vi) леммы 5. Пришли к противоречию. Значит, $q_j = t$ при любом j . Тогда

$$\sum_{j=1}^m \beta_d(t, s_j) = k\beta_d(t, t) + \beta_d(t, r).$$

По свойству (viii) леммы 5 либо $r = 0$, $m = k$ и $s_j = t$ для любого j , либо $r > 0$, $m = k + 1$, $s_m = r$ и $s_j = t$ при $j \neq m$. Так как при $j > 0$ в дереве D_j имеется галочка ранга $(q_j, s_j) = (t, s_j)$ с основанием c_j , то $c_j \in \{a_t, b_t\}$. Теперь понятно, что дерево D имеет вид, изображенный на рис. 3б. Очевидно, что число таких неизоморфных деревьев равно $\bar{\xi}(n, d)$. Кроме того, вектор разнообразия шаров каждого из этих деревьев совпадает с $\tau(\overline{D}_{n,d})$ в силу (10) и алгоритма вычисления вектора $\tau(G)$ для произвольного дерева G (см. [5]).

Предположим, что $\tau(D) = \tau(\underline{D}_{n,d})$ и опишем все такие деревья $D \in T_{n,d}$ с точностью до изоморфизма. Тогда в силу (9) и (11) имеем

$$\sum_{j=1}^m \beta_d(q_j, s_j) = (n - d - 1)\beta_d(1, 1).$$

Используя (3) и (7), получаем $q_j = 1$ при любом j . Тогда $s_j = q_j = 1$ для любого j в силу (3) и $m = n - d - 1$. Поэтому, как и выше, $c_j \in \{a_1, b_1\}$ при $j > 0$. Значит, дерево D имеет вид, изображённый на рис. 3а. Ясно, что

число таких неизоморфных деревьев равно $\xi(n, d)$. Как и выше, вектор разнообразия шаров каждого такого дерева совпадает с $\tau(\underline{D}_{n,d})$. Теорема 2 доказана.

Следствие 2.

$$\tau_i(T_{n,d}) = \begin{cases} n, & \text{если } i = 0, \\ n, & \text{если } i = 1 \text{ и } d \geq 2, \\ d + 1, & \text{если } 1 < i \leq \lfloor d/2 \rfloor, \\ 2(d - i) + 1, & \text{если } \lfloor d/2 \rfloor < i < d, \\ 1, & \text{если } i \geq d; \end{cases}$$

$$\bar{\tau}_i(T_{n,d}) = \begin{cases} n, & \text{если } 0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor, \\ n - (k + 3)(i - \lfloor d/2 \rfloor) + \sigma, & \text{если } \lfloor d/2 \rfloor < i \leq \lfloor d/2 \rfloor + r, \\ n - r - (k + 2)(i - \lfloor d/2 \rfloor) + \sigma, & \text{если } \lfloor d/2 \rfloor + r < i < d, \\ 1, & \text{если } i \geq d, \end{cases}$$

где k и r определены в (8),

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{если } d \text{ чётно,} \\ 1, & \text{если } d \text{ нечётно.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\underline{D}_{n,d}, \bar{D}_{n,d} \in T_{n,d}$ и $\tau_i(T_{n,d}) = \bar{\tau}_i(T_{n,d}) = 1$ при $i \geq d$, то $\tau_i(T_{n,d}) = \tau_i(\underline{D}_{n,d})$, $\bar{\tau}_i(T_{n,d}) = \tau_i(\bar{D}_{n,d})$ по теореме 2 и можно считать, что $0 \leq i < d$. Из (9) следует, что $\tau_i(T_{n,d}) = \Delta_i^d + (n - d - 1)\beta_{i,1,1}$. Используя (6) и (7), получаем требуемое значение $\tau_i(T_{n,d})$.

Теперь вычислим $\bar{\tau}_i(T_{n,d})$. В силу (10) имеем $\bar{\tau}_i(T_{n,d}) = \Delta_i^d + k\beta_{i,t,t} + \beta_{i,t,r}$, где $t = \lfloor d/2 \rfloor$. Далее применим (6)–(8) и рассмотрим три возможных случая:

Случай 1. $0 \leq i \leq t$. Тогда $\bar{\tau}_i(T_{n,d}) = d + 1 + kt + r = n$.

Случай 2. $t < i \leq t + r$. Тогда $\bar{\tau}_i(T_{n,d}) = 2(d - i) + 1 + k(t - (i - t)) + r - (i - t) = n - i(k + 3) + d + t(k + 1) = n - (k + 3)(i - t) + \sigma$.

Случай 3. $t + r < i < d$. Тогда $\bar{\tau}_i(T_{n,d}) = 2(d - i) + 1 + k(t - (i - t)) = n - r - (k + 2)i + d + kt = n - r - (k + 2)(i - t) + \sigma$. Следствие 2 доказано.

§ 3. Классы T_n и Γ_n

Теорема 3. Вектор разнообразия шаров произвольного графа G из Γ_n удовлетворяет соотношениям: $\tau(K_n) \leq \tau(G) \leq \tau(P_n)$. Существует единственный (с точностью до изоморфизма) граф \bar{G} (граф \underline{G}) из Γ_n такой, что $\tau(G) \leq \tau(\bar{G})$ ($\tau(\underline{G}) \leq \tau(G)$) для любого графа $G \in \Gamma_n$.

Для деревьев из класса T_n верхнюю оценку компонент вектора разнообразия шаров также даёт теорема 3 (поскольку $P_n \in T_n$), а нижняя

оценка выглядит иначе и приводится в следующем замечании.

Замечание 2. $\tau(K_{1,n-1}) \leq \tau(D)$ для любого дерева $D \in T_n$ при $n \geq 2$. Существует единственное (с точностью до изоморфизма) дерево $\underline{D} \in T_n$ такое, что $\tau(\underline{D}) \leq \tau(D)$, для любого дерева $D \in T_n$.

Действительно, пусть $D \in T_n$. Тогда $D \cong K_1$ при $n = 1$, а при $n = 2$ имеем $D \cong K_{1,n-1}$. Поэтому считаем, что $n \geq 3$. Следовательно, $d(K_{1,n-1}) = 2 \leq d(D)$. Используя следствие 2, получаем $\tau_i(D) \geq \tau_i(T_{n,d}) = n \geq \tau_i(K_{1,n-1})$, где $d = d(D)$ и $0 \leq i \leq 1$. Таким образом, $\tau(K_{1,n-1}) \leq \tau(D)$.

Предположим, что $\underline{D} \in T_n$, $n \geq 3$ и $\tau(\underline{D}) \leq \tau(D)$ для любого дерева $D \in T_n$. Тогда $\tau(\underline{D}) \leq \tau(K_{1,n-1})$. Значит, $d(\underline{D}) = 2$. Поэтому $\underline{D} \cong K_{1,n-1}$ и единственность доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3. Пусть $G \in \Gamma_n$ и $d = d(G)$. Очевидно, что $G \cong K_1$ при $n = 1$ и $\tau(K_n) = (n, 1)$ при $n \geq 2$. Поэтому $\tau(K_n) \leq \tau(G)$.

Покажем, что $\tau(G) \leq \tau(P_n)$. Далее потребуется следующая

Лемма 6. Вектор разнообразия шаров произвольного графа $G \in \Gamma_{n,d}$ удовлетворяет неравенству: $\tau(G) \leq \tau^*(n, d)$, где $\tau^*(n, d) = (\tau_0^*(n, d), \dots, \tau_d^*(n, d))$, а

$$\tau_i^*(n, d) = \begin{cases} n & \text{при } 0 \leq i < m \\ n - (2i - d) & \text{при } m \leq i < d \\ 1 & \text{при } i \geq d, \end{cases}$$

$$m = \min\{\max\{\lfloor d/2 \rfloor + 1, n - d\}, d\}.$$

Замечание 3. Если $m \leq i \leq d$ и $d > 0$, то $\tau_i^*(n, d) < n$, причём $\tau_i^*(n, d)$ как функция по i строго убывает на интервале $[m, d]$.

Действительно, если $m \leq i < d$, то $i \geq m \geq \lfloor d/2 \rfloor + 1$ и $\tau_i^*(n, d) = n - 2i + d \leq n - 1$, а если $i = d > 0$, то $\tau_i^*(n, d) = 1 < n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 6. Пусть $0 \leq i < d$. Можно считать, что $m \leq i < d$, иначе $\tau_i(G) \leq n = \tau_i^*(n, d)$. Тогда

$$i \geq \lfloor d/2 \rfloor, \quad n \leq d + i. \quad (12)$$

Индукцией по i покажем, что $\tau_i(G) \leq \tau_i^*(n, d)$.

Базис индукции: $i = m$. Тогда в силу (12) и леммы 3 $B_i(x) = G$ для любой вершины $x \in P[a_i, b_i]$. Следовательно, $\tau_i(G) \leq n - n(P[a_i, b_i]) = n - (2i - d) = \tau_i^*(n, d)$.

Шаг индукции: $m < i + 1 < d$. В силу (12), леммы 3 и индукционного предположения получаем $\tau_{i+1}(G) \leq \tau_i(G) - 2 \leq \tau_i^*(n, d) - 2 = \tau_{i+1}^*(n, d)$. Лемма 6 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 3. В силу леммы 6 осталось показать, что $\tau^*(n, d) \leq \tau(P_n)$. Действительно, $d(P_n) = n - 1 \geq d$. Докажем, что $\tau_i^*(n, d) \leq \tau_i(P_n)$ при $i \leq d$. Можно считать, что $\lfloor (n-1)/2 \rfloor < i \leq d$, иначе $\tau_i^*(n, d) \leq n = \Delta_i^{n-1} = \tau_i(P_n)$ по лемме 4 и (6). Тогда $i > \lfloor (n-1)/2 \rfloor \geq \lfloor d/2 \rfloor$, $2d \geq n$ и $i > \lfloor (n-1)/2 \rfloor \geq \lfloor (2(n-d)-1)/2 \rfloor = n-d-1$, т. е. $i \geq m$. Используя определение величины $\tau_i^*(n, d)$, (6) и лемму 4, получаем $\tau_i^*(n, d) \leq n - (2i - d) \leq 2(n - i) - 1 = \Delta_i^{n-1} = \tau_i(P_n)$. Таким образом, $\tau(G) \leq \tau(P_n)$.

Предположим, что $\overline{G} \in \Gamma_n$ и $\tau(G) \leq \tau(\overline{G})$ ($\underline{G} \in \Gamma_n$ и $\tau(\underline{G}) \leq \tau(G)$) для любого графа $G \in \Gamma_n$. В этом случае $d(\overline{G}) = d(P_n) = n - 1$ и $d(\underline{G}) = d(K_n)$. Поэтому $\overline{G} \cong P_n$ и $\underline{G} \cong K_n$. Теорема 3 доказана.

Следствие 3.

$$\overline{\tau}_i(\Gamma_n) = \overline{\tau}_i(T_n) = \begin{cases} n, & \text{если } 0 \leq i \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor, \\ 2(n-i) - 1, & \text{если } \lfloor (n-1)/2 \rfloor < i < n, \\ 1, & \text{если } i \geq n; \end{cases}$$

$$\underline{\tau}_i(\Gamma_n) = \begin{cases} n, & \text{если } i = 0, \\ 1, & \text{если } i \geq 1; \end{cases} \quad \underline{\tau}_i(T_n) = \begin{cases} n, & \text{если } i = 0, \\ n, & \text{если } i = 1 \text{ и } n \geq 3, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3, замечанию 2 и лемме 4 имеем $\overline{\tau}_i(\Gamma_n) = \overline{\tau}_i(T_n) = \tau_i(P_n) = \Delta_i^{n-1}$, $\underline{\tau}_i(\Gamma_n) = \tau_i(K_n)$, $\underline{\tau}_i(T_1) = \tau_i(P_1) = \Delta_i^0$ и $\underline{\tau}_i(T_n) = \tau_i(K_{1, n-1})$ при $n \geq 2$. Следствие 3 доказано.

§ 4. Класс графов $\Gamma_{n, d}$

Пусть $\Gamma_{n, d} \neq \emptyset$. Для произвольного t , удовлетворяющего одному из приведённых ниже трёх случаев, определим граф $H_{n, d, t}$ следующим образом. Пусть P — простая цепь с концами a, b длины d , и при $t > 0$ рассмотрим k и r такие, что $n = d + 1 + kt + r$, $k \geq 0$, $0 \leq r < t$.

Случай 1. $t = 0$. Если $n > d + 1$, то к цепи P добавим новые вершины $v_1, \dots, v_{n-(d+1)}$ и все вершины $v_1, \dots, v_{n-(d+1)}, a, a_1$ соединим рёбрами между собой. В случае $n = d + 1$ к P ничего не добавляем. Полученный граф обозначим через $H_{n, d, 0}$ (см. рис. 4).

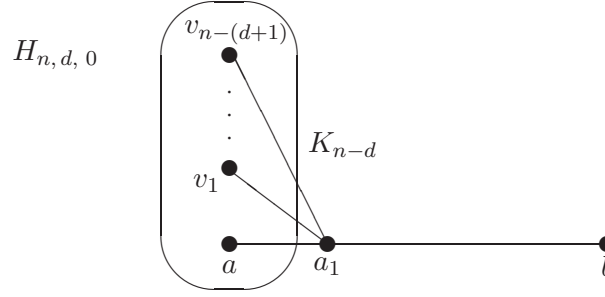


Рис. 4

Случай 2. $0 < t \leq \lfloor d/2 \rfloor$. Обозначим через $H_{n,d,t}$ дерево из $\Gamma_{n,d}$, определённое в § 2 по k, r и t (см. рис. 2).

Случай 3. $0 < t < d, n \geq d+1+t$. Добавим к P простые цепи P_1, \dots, P_k длины $t+1$ такие, что $V(P_i) \cap V(P_j) = V(P_i) \cap V(P) = \{a, a_{t+1}\}, i \neq j$. Если $r > 0$, то к полученному графу H добавим простую цепь P_0 длины $r+1$ такую, что $V(P_0) \cap V(H) = \{a, a_r\}$. В случае $r = 0$ к H ничего не добавляем. Полученный граф обозначим через $H_{n,d,t}$ (см. рис. 5).

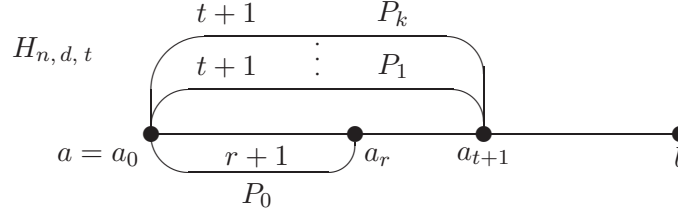


Рис. 5

Замечание 4. В случае $0 < t \leq \lfloor d/2 \rfloor$ и $n \geq d+1+t$ имеем два возможных определения графа $H_{n,d,t}$.

Замечание 5. 1) $r(H_{n,d,0}) = \lfloor d/2 \rfloor$; 2) Если $H_{n,d,t}$ определён в случае 3, $0 < t < d$ и $t \geq \lfloor d/2 \rfloor - 1$, то $r(H_{n,d,t}) = t+1$.

Для обоснования замечания 5 достаточно заметить, что $r(H_{n,d,0}) = e(a_{\lfloor d/2 \rfloor})$ и $r(H_{n,d,t}) = e(a_{t+1})$.

Лемма 7 (свойства графов $H_{n,d,t}$). Если граф $H_{n,d,t}$ определён, то

- (i) $H_{n,d,t} \in \Gamma_{n,d}$;
- (ii) $\tau(H_{n,d,0}) = (n, \Delta_1^d, \dots, \Delta_d^d)$;
- (iii) $\tau_0(H_{n,d,t}) = \dots = \tau_t(H_{n,d,t}) > \tau_{t+1}(H_{n,d,t})$ при $n \geq d+2$ или $n = d+1, t = \lfloor d/2 \rfloor, d > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство (i) следует из определения графа $H_{n,d,t}$. Так как $\tau(P) = \Delta_d$ по лемме 4 и $B_i(v_j) = B_i(a)$ при $i \geq 1$, нетрудно убедиться в справедливости свойства (ii).

Докажем справедливость свойства (iii). Если $n = d + 1$, $t = \lfloor d/2 \rfloor$, $d > 0$ или $n \geq d + 2$, $t = 0$, то свойство (iii) следует из свойств (i), (ii), соотношения (6) и леммы 4. Пусть $n \geq d + 2$ и $t > 0$.

Пусть $H_{n,d,t}$ — дерево, определённое в случае 2. Тогда либо $r = 0$ и $k > 0$, либо $r > 0$. Поэтому $\text{rank} H_{n,d,t}$ равен (t, t) или (t, r) соответственно (см. [5]). В силу следствия 1 из [5] справедливо свойство (iii).

Пусть граф $H_{n,d,t}$ определён в случае 3 и x_1, x_2 — произвольные различные его вершины. Покажем, что $B_t(x_1) \neq B_t(x_2)$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Одна из вершин x_1, x_2 принадлежит цепи $P(a_0, a_r)$, а другая — цепи $P_0(a_0, a_r)$. Так как цепи $P[a_0, a_r]$, $P_0[a_0, a_r]$ имеют длину r и $r + 1$ соответственно, то $\rho(x_i, a_s) > \rho(x_j, a_s)$ при некоторых $i \neq j$ и $s \in \{0, r\}$. Так как $k > 0$, $t > r$ и $P[a_0, a_{t+1}] \cup P_1[a_0, a_{t+1}]$, $P_0[a_0, a_r] \cup P[a_r, a_{t+1}] \cup P_1[a_0, a_{t+1}]$ — простые циклы диаметра $t + 1$, то в графе $H_{n,d,t}$ существует кратчайшая цепь (x_i, a_s, y) длины $t + 1$ такая, что $y \in P_1[a_0, a_{t+1}]$. Следовательно, $y \in B_t(x_j) \setminus B_t(x_i)$.

Случай 2. Не выполняется случай 1. Тогда нетрудно показать, что $e(x_i, x_j) \geq t + 1$ при некоторых $i \neq j$. В силу утверждения (ii) леммы 1 имеем $B_t(x_i) \neq B_t(x_j)$.

Таким образом, $\tau_t(H_{n,d,t}) = n$. Кроме того, нетрудно видеть, что $B_{t+1}(a_1) = B_{t+1}(a'_1)$, где $a'_1 \in P_1$ и $\rho(a, a'_1) = 1$, т. е.

$$\tau_t(H_{n,d,t}) > \tau_{t+1}(H_{n,d,t}).$$

Лемма 7 доказана.

Теорема 4. В классе $\Gamma_{n,d}$ существует граф G такой, что $\tau_{i-1}(G) = \tau_i(G) > \tau_{i+1}(G)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: 1) $0 < i < \lfloor d/2 \rfloor$, $n \geq d + 2$; 2) $0 < i = \lfloor d/2 \rfloor$, $n \geq d + 1$; 3) $\lfloor d/2 \rfloor < i < d$, $n \geq d + 1 + i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \Gamma_{n,d}$ и $\tau_{i-1}(G) = \tau_i(G) > \tau_{i+1}(G)$. Тогда $0 < i < d$ и $n \geq d + 1$ в силу замечания 1. Если $i < \lfloor d/2 \rfloor$, то $n \geq d + 2$ в силу леммы 4 и (6), т. е. выполняется первое условие. Если $i = \lfloor d/2 \rfloor$, то выполняется второе условие.

Пусть $\lfloor d/2 \rfloor < i < d$. Так как $e_G(a_i, b_i) \geq e_P(a_i, b_i) = i$, то $B_{i-1}(a_i) \neq B_{i-1}(b_i)$ по утверждению (ii) леммы 1. Поскольку $\tau_{i-1}(G) = \tau_i(G)$, по утверждению (iv) леммы 1 имеем $B_i(a_i) \neq B_i(b_i)$. Если $n \leq d + i$, то по лемме 3 получаем, что $B_i(a_i) = B_i(b_i)$. Следовательно, $n \geq d + 1 + i$, т. е. выполняется третье условие.

Обратное утверждение следует из замечания 1 и леммы 7. Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4, леммы 7 и замечания 1 вытекает

Следствие 4. Класс $\Gamma_{n,d}$ содержит граф с локальным t -разнообразием шаров тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: 1) $0 \leq t \leq \lfloor d/2 \rfloor$, $n \geq d+1 \geq 2$; 2) $\lfloor d/2 \rfloor < t < d$, $n \geq d+1+t$.

Непосредственно из следствия 4 и определения 2 получаем

Следствие 5. В классе $\Gamma_{n,d}$ имеется граф с полным разнообразием шаров тогда и только тогда, когда $n \geq 2d > 0$ или $n = d+1 = 3$.

Напомним, что в лемме 6 из § 3 определён вектор $\tau^*(n, d)$ и в замечании 3 указаны свойства его компонент.

Теорема 5. Вектор разнообразия шаров произвольного графа G из $\Gamma_{n,d}$ удовлетворяет соотношениям: $\tau(H_{n,d,0}) \leq \tau(G) \leq \tau^*(n, d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \Gamma_{n,d}$ и P — диаметральная цепь графа G . В силу леммы 4 и изометричности подграфа P графа G имеем $\tau(G) \geq \tau(P) = \Delta_d$, причём $\tau_0(G) = n$. В силу свойства (ii) из леммы 7 получаем $\tau(H_{n,d,0}) \leq \tau(G)$. По лемме 6 имеем $\tau(G) \leq \tau^*(n, d)$. Теорема 5 доказана.

Следствие 6.

$$\tau_i(\Gamma_{n,d}) = \begin{cases} n, & \text{если } i = 0, \\ d+1, & \text{если } 1 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor, \\ 2(d-i)+1, & \text{если } \lfloor d/2 \rfloor < i < d, \\ 1, & \text{если } i \geq d; \end{cases}$$

$$\bar{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) \leq \tau_i^*(n, d) \leq n,$$

причём

$$(\bar{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = n) \Leftrightarrow (\tau_i^*(n, d) = n) \Leftrightarrow (0 \leq i < \min\{\max\{\lfloor d/2 \rfloor + 1, n-d\}, d\} \text{ или } d = 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 5 и свойству (i) из леммы 7 имеем $\tau_i(\Gamma_{n,d}) = \tau_i(H_{n,d,0})$. Используя свойство (ii) из леммы 7 и (6), получаем требуемое значение $\tau_i(\Gamma_{n,d})$.

По теореме 5 имеем $\bar{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) \leq \tau_i^*(n, d)$. Из определения $\tau_i^*(n, d)$ и замечания 3 следует неравенство $\tau_i^*(n, d) \leq n$ и вторая требуемая эквивалентность.

Осталось показать, что если $\tau_i^*(n, d) = n$, то $\bar{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = n$. Действительно, пусть $\tau_i^*(n, d) = n$. Можно считать, что $0 \leq i < d$, иначе $\bar{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = \tau_i^*(n, d)$. Тогда из доказанной эквивалентности имеем $0 \leq i <$

$m = \min\{\max\{\lfloor d/2 \rfloor + 1, n - d\}, d\}$. Покажем, что при $t = i$ выполняется одно из двух условий следствия 4. Если $0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor$, то выполняется первое условие. Пусть $\lfloor d/2 \rfloor < i < d$. Тогда $m \geq \lfloor d/2 \rfloor + 2$. Поэтому $\max\{\lfloor d/2 \rfloor + 1, n - d\} = n - d$. Следовательно, $i < m \leq n - d$, т. е. выполняется второе условие следствия 4. Таким образом, по следствию 4 в классе $\Gamma_{n,d}$ содержится граф с локальным i -разнообразием шаров. Значит, $\bar{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = n$. Следствие 6 доказано.

§ 5. Интерпретация задачи нахождения $\bar{\tau}_i(\Omega)$ и $\underline{\tau}_i(\Omega)$

В данном параграфе мы приведём интерпретацию задачи нахождения наибольшего и наименьшего числа шаров заданного радиуса для графов из рассматриваемого класса Ω . Эта задача возникает в системах управления с максимальной степенью контроля. Прежде чем перейти к их рассмотрению, отметим следующие очевидные свойства покрытий.

Утверждение 1. Пусть \mathcal{M} — непустая совокупность покрытий произвольного конечного множества X множествами заданного вида. Тогда

(а) В каждом покрытии $M \in \mathcal{M}$ содержится некоторое минимальное подпокрытие $M' \in \mathcal{M}$ и \mathcal{M} содержится в некотором максимальном покрытии $M'' \in \mathcal{M}$.

(б) Если $M, M' \in \mathcal{M}$ и $M \subset M'$, то $\Psi(M) < \Psi(M')$. Здесь функция $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{Q}^+$ определяется следующим образом:

$$\Psi(M) = \frac{1}{n(X)} \sum_{x \in X} \psi_M(x),$$

где $\psi_M : X \rightarrow \mathbf{N}$, $\psi_M(x)$ — число элементов покрытия M , содержащих $x \in X$.

(с) Если $M \in \mathcal{M}$ и $\Psi(M)$ — наименьшее (наибольшее) значение функции Ψ , то M — минимальное (максимальное) покрытие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение (б). Будем считать, что $M' = M \cup \{S\}$, где $\emptyset \neq S \subseteq X$ и $S \notin M$ (далее общий случай $M' = M \cup \{S_1, \dots, S_k\}$ доказывается индукцией по k). Тогда

$$\begin{aligned} \Psi(M') &= \frac{1}{n(X)} \left(\sum_{x \in X \setminus S} \psi_{M'}(x) + \sum_{x \in S} \psi_{M'}(x) \right) \\ &= \frac{1}{n(X)} \left(\sum_{x \in X} \psi_M(x) + n(S) \right) > \Psi(M). \end{aligned}$$

В силу конечности множества X справедливо утверждение (а), а утверждение (с) непосредственно вытекает из утверждения (b). Утверждение 1 доказано.

Ниже при рассмотрении систем управления нам потребуется утверждение 1 для совокупности \mathcal{M} всех покрытий множества вершин заданного графа шарами фиксированного радиуса.

Пусть задана некоторая система элементов, между которыми установлены определённые связи (т. е. задан некоторый граф G). Среди её элементов имеются *центры управления* с заданной дальностью действия, т. е. элементы из G , имеющие возможность контроля в радиусе, равном дальности действия. Совокупность таких центров управления образует *систему управления*. Естественно рассматривать систему управления, контролирующую всю исходную систему G и не имеющую центров управления, полностью дублирующих друг друга, например, из соображений экономии (т. е. система управления соответствует некоторому покрытию графа G различными шарами заданного радиуса). При этом актуальны *системы управления с максимальной степенью контроля*. Формализацией этой степени может служить функция $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{Q}^+$, определённая в утверждении 1. Здесь $\psi_M(x)$ — число центров, контролирующих $x \in G$, — интерпретируется как степень контроля фиксированного элемента x , а $\Psi(M)$ как степень контроля всей системы в целом (усреднённая степень контроля элемента). В силу замкнутости относительно объединений совокупность \mathcal{M} содержит наибольшее покрытие, и по утверждению 1 степень контроля будет наибольшей для системы управления, соответствующей этому наибольшему покрытию, а наименьшей будет для некоторой системы управления, соответствующей минимальному покрытию. Более того, при выведении из строя какого-либо центра управления системы, являющейся минимальным покрытием, остаются неуправляемые элементы системы G , но для систем управления с максимальной степенью контроля этого не происходит.

Интересно оценить потенциальное число центров контроля в системе управления с максимальной степенью контроля для n -элементной системы G (возможно при этом дополнительно ещё известен диаметр в естественном смысле всей системы G). Например, чтобы оценить необходимые ресурсы для создания (разрушения) такой системы управления. Очевидно, что число центров в системе управления с максимальной степенью контроля равно числу различных шаров заданного радиуса в исходном графе G , и мы пришли к поставленной задаче нахождения величин $\bar{\tau}_i(\Omega)$, $\underline{\tau}_i(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 1. С. 5–12.
2. **Евдокимов А. А.** Об одном подходе к классификации графов как метрических пространств // Тезисы докладов XI Межд. конф. по пробл. теорет. кибернетики (Ульяновск, 10–14 июня 1996 г.). М.: Изд-во Рос. гос. гуманитар. ун-та, 1996. С. 57–59.
3. **Евдокимов А. А.** Кодирование структурированной информации и вложения дискретных пространств // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 48–58.
4. **Рычков К. Л.** О достаточных условиях существования графа с заданным разнообразием шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 1. С. 99–108.
5. **Федоряева Т. И.** Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, № 3. С. 74–84.
6. **Федоряева Т. И.** Векторы разнообразия шаров и свойства их компонент // Труды VII Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем" (Москва, 4–6 марта 2006 г.). М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 374–378.
7. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973.
8. **Ostrand P. A.** Graphs with specified radius and diameter // Discrete Math. 1973. V. 4. P. 71–75.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.
E-mail: sfdd@academ.org

Статья поступила

30 июня 2006 г.

Переработанный вариант —

28 марта 2007 г.