ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2007. Серия 1. Том 14, № 2. 68–94

УДК 519.1

КОМБИНАТОРНАЯ НАДЁЖНОСТЬ СЕТЕВЫХ ГИПЕРГРАФОВ

А. А. Черняк, С. В. Суздаль

В статье теория доминирования распространена на гиперграфы. Доказано, что 1) задача вычисления доминирования в классе (s,t)-гиперграфов ограниченной степени полиномиально разрешима; 2) доминирование циклических (s,t)-гиперграфов равно нулю, в то время как задача вычисления доминирования в классе нестандартных r-циклических (s,t)-гиперграфов является #P-полной при любом фиксированном натуральном r. Выявлена гиперграфовая природа всех ранее полученных результатов о доминировании d-тривиальных графов, непосредственно вытекающих из перечисленных выше.

Конструктивно доказано существование псевдополиномиального (временна́я сложность которого полиномиальна относительно числа подгиперграфов) алгоритма решения проблемы вычисления комбинаторной надёжности (Rel-проблемы) в классе ациклических (s,t)-гиперграфов ограниченной степени. Для произвольного (s,t)-гиперграфа получена аддитивная формула символьного вычисления надёжности, длина которой равна числу ациклических подгиперграфов, а сложность вычисления каждого слагаемого определяется только сложностью вычисления доминирования локальных гиперграфов.

Доказана #P-полнота задачи вычисления полинома комбинаторной надёжности в классе ациклических тривиальных (s,t)-гиперграфов степени 2, в которых число минимальных путей ограничено сверху линейной функцией от размерности этих (s,t)-гиперграфов. Это означает, в частности, что если P$\neq$NP, то не существует квазиполиномиального алгоритма (временна́я сложность которого полиномиальна относительно числа минимальных подгиперграфов) решения Rel-проблемы в классе ациклических тривиальных (s,t)-гиперграфов степени 2.

Введение

Во многих структурно сложных системах, в узлах которых допускается произвольная логика функционирования, сигнал, соответствующий

1 или 0, формируется на выходе вершины в зависимости от набора сигналов, поступающих на входы этого узла от других узлов; при этом логика формирования выходного сигнала определяется монотонной булевой функцией, заданной в виде дизъюнктивной нормальной формы [2, 3]. Для моделирования таких систем необходимо использовать более сложный математический объект, чем граф, так как с помощью графа можно отображать лишь простейший мажоритарный принцип «проходит хотя бы один из нескольких», т. е. логику элементарной дизъюнкции. Адекватной моделью подобных систем может служить сетевой гиперграф, частный случай которого описан в [16, 17].

В качестве начального примера рассмотрим орграф $H = (VH, DH)$ с множествами вершин VH и дуг DH, изображённый на рис. 1.

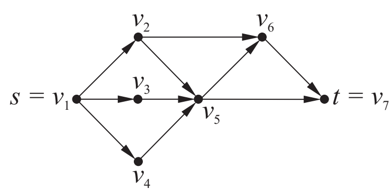

Рис. 1. Орграф H

Множество дуг, входящих в вершину v_i, будем обозначать через $D_H(v_i)$. Предположим, что по каждой дуге может проходить единичный или нулевой сигнал. Условимся также, что на выходе каждой вершины по определенному правилу (описанному ниже) формируется выходной сигнал 0 или 1, который затем распространяется по всем дугам, выходящим из этой вершины.

Положим следующее. На выходе вершины s формируется единичный сигнал. На выходе вершины v_5 формируется единичный сигнал, если и только если он проходит хотя бы по одному из следующих наборов дуг из $D_H(v_5)$: $[(v_2, v_5), (v_3, v_5)]$, $[(v_2, v_5), (v_4, v_5)]$, $[(v_3, v_5), (v_4, v_5)]$. Эти наборы назовём *гипердугами, входящими в* v_5. Если множество этих гипердуг обозначить через $R_H(v_5)$, то $\big(D_H(v_5), R_H(v_5)\big)$ является гиперграфом.

Аналогично зададим гипердуги для других вершин: $R_H(v_j) = \big\{[(v_1, v_j)]\big\}$ при $j = 2, 3, 4$, $R_H(v_6) = \big\{[(v_2, v_6)], [(v_5, v_6)]\big\}$, $R_H(v_7) = \big\{[(v_5, v_7), (v_6, v_7)]\big\}$, причём на выходе вершины v_i будет сигнал 1, если и только если сигнал 1 проходит хотя бы по одной из входящих в v_i гипердуг, $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ (уточним, что единичный сигнал проходит по гипердуге только в том случае, если он проходит по всем дугам, содержащимся в этой гипердуге).

Дуга e может исключаться по тем или иным причинам (с вероятностью $1-pr(e)$) (при этом исключаются и все гипердуги, их содержащие). В этом случае важно, чтобы оставшиеся дуги обеспечивали возможность единичному сигналу, посланному из вершины s, достичь вершины t. Например, на рис. 2 изображены два орграфа H_1 и H_2, полученные из H удалением некоторых дуг и гипердуг.

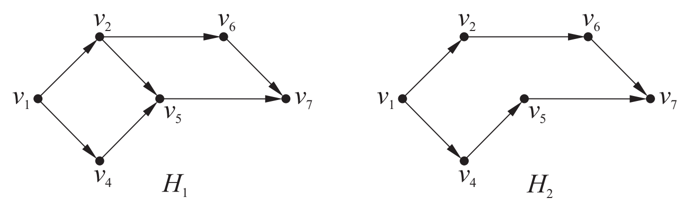

Рис. 2. Орграфы H_1 и H_2

В первом случае единичный сигнал достигает вершины t, во втором — нет: по дуге (v_5, v_7) единичный сигнал пройти не может, так как на выходе вершины v_5 всегда будет 0.

Пусть T — конечное множество, 2^T — булеан множества T, $\Omega \subseteq 2^T$, причём Ω состоит из невложимых друг в друга множеств. Пара (T, Ω) называется *простым гиперграфом* с множеством вершин T и множеством рёбер Ω. Простой гиперграф называется *когерентным*, если каждая его вершина содержится в некотором ребре.

Теперь перейдём к общим определениям, демонстрируя их на примере орграфа H, изображённого на рис. 1. Пусть $G = (W, E)$ — ориентированный граф (орграф) с множеством вершин W и множеством дуг $E, s \in W$ и $t \in W$. Граф G называется (s,t)-*орграфом*, если из каждой его вершины, исключая вершину t, выходит хотя бы одна дуга и в каждую его вершину, исключая вершину s, входит хотя бы одна дуга. Через $D_G(v)$ обозначается множество всех дуг орграфа G, входящих в вершину v. Очевидно, что $E = \bigcup\limits_{v \in W} D_G(v)$. Число $|D_G(v)|$ называется *степенью* вершины v в G; наибольшая из степеней вершин называется степенью орграфа G. Так, орграф H, изображённый на рис. 1, является (s,t)-орграфом, а его степень равна 3.

Предположим, что с каждой вершиной v связан когерентный простой гиперграф $(D_G(v), R_G(v))$, который будем называть *локальным гиперграфом* вершины v. Очевидно, что каждое ребро этого гиперграфа состоит из набора дуг, входящих в вершину v. Эти наборы будем называть *гипердугами, входящими в вершину* v. Если в вершину v входит только одна гипердуга, то v будет называться *c-вершиной*; если все гипердуги, входящие в вершину v, одноэлементные и их число больше 1, то v будет называться *d-вершиной.* Так, v_2, v_3, v_4, v_7 являются c-вершинами в H, а v_6 — d-вершиной в H.

Через VG, DG и RG будем обозначать соответственно множества вершин, дуг и гипердуг (s,t)-орграфа G. Тройка $G = (VG, DG, RG)$ называется *сетевым гиперграфом* или *(s,t)-гиперграфом* с множествами вершин VG, дуг DG и гипердуг RG. Таким образом, (s,t)-гиперграф представляет собой сетевую суперпозицию локальных гиперграфов, что позволяет с их помощью моделировать сложные системы, которые на структурном уровне являются графами, а на вершинном уровне — гиперграфами.

Подгиперграфом (s,t)-гиперграфа G называется (s,t)-гиперграф H, если вершины, дуги и гипердуги в H являются соответственно вершинами дугами и гипердугами в G. Подгиперграф (s,t)-гиперграфа, в котором в каждую вершину v, отличную от s, входит только одна гипердуга, называется *минимальным*, а его множество дуг — *минимальным путём* в G. Подмножество дуг в G, содержащее хотя бы один минимальный путь, называется *путём* в G. Так, (s,t)-гиперграф $H_1 = (VH_1, DH_1, RH_1)$ на рис. 2 является подгиперграфом (s,t)-гиперграфа H, к тому же минимальным, в то время, как H_2 таковым не является, поскольку $R_{H_2}(v_5) = \varnothing$ и $D_{H_2}(v_5) \neq \varnothing$. Следовательно, гиперграф $\big(D_{H_2}(v_5), R_{H_2}(v_5)\big)$ не является когерентным. Перечислим все минимальные пути в H:

$$
\begin{aligned}
&(v_6,v_7),(v_5,v_7),(v_5,v_6),(v_2,v_5),(v_3,v_5),(v_1,v_2),(v_1,v_3);\\
&(v_6,v_7),(v_5,v_7),(v_5,v_6),(v_2,v_5),(v_4,v_5),(v_1,v_2),(v_1,v_4);\\
&(v_6,v_7),(v_5,v_7),(v_5,v_6),(v_3,v_5),(v_4,v_5),(v_1,v_3),(v_1,v_4);\\
&(v_6,v_7),(v_2,v_6),(v_1,v_2),(v_5,v_7),(v_3,v_5),(v_4,v_5),(v_1,v_3),(v_1,v_4);\\
&(v_6,v_7),(v_2,v_6),(v_1,v_2),(v_5,v_7),(v_2,v_5),(v_4,v_5),(v_1,v_4);\\
&(v_6,v_7),(v_2,v_6),(v_1,v_2),(v_5,v_7),(v_2,v_5),(v_3,v_5),(v_1,v_3).
\end{aligned}
$$

Предположим, что на множестве дуг DG определена функция $pr\colon DG \to \mathbb{R}^+$ такая, что $0 \leqslant pr(e) \leqslant 1$ для любой дуги $e \in DG$. Пусть $M \subseteq DG$. *Вероятностным весом* $pw(M)$ множества M называется число

$$pw(M) = \prod_{e\in M} pr(e) \cdot \prod_{e\in DG\setminus M} (1 - pr(e)).$$

Если число $1 - pr(e)$ трактовать как вероятность отказа дуги e, то $pw(M)$ есть вероятность события, состоящего в том, что множество неотказавших дуг в (s,t)-гиперграфе G совпадает с M.

Комбинаторной надёжностью $\mathrm{Rel}(G, pr(DG))$ (s,t)-гиперграфа G называется сумма вероятностных весов всех путей в G. Если все значения функции pr равны p (в этих случаях будем писать p вместо $pr(DG)$), то

$$\mathrm{Rel}(G,p) = \sum_{i=0}^{m} h_i p^i (1-p)^{m-i}, \quad m = |DG|, \tag{1}$$

где h_i — число i-элементных путей в G. Символьное выражение в правой части равенства (1) называется *полиномом комбинаторной надёжности* (сокращенно, *полиномом* КН) (s,t)-гиперграфа G.

Величину $\mathrm{Rel}(G, pr(DG))$ можно трактовать как вероятность события, состоящего в том, что множество неотказавших дуг в (s,t)-гиперграфе G является путём. В реальной системе наличие исправного пути означает способность единичного сигнала, посланного из вершины s и «проходящего» по гипердугам, достичь вершины t (единичный сигнал «проходит» по гипердуге только в том случае, если он поступает к началам всех дуг, содержащихся в этой гипердуге).

Сетевые гиперграфы обобщают все известные графовые модели, применяемые для анализа надёжности сетевых структур. В дальнейшем все эти модели будут объединены под общим названием «*d-тривиальные графы*». Рассмотрим три из них.

1. 2-терминальный орграф [30, 18] — это (s,t)-орграф G с истоком s и стоком t, комбинаторная надёжность которого равна вероятности наличия исправного орпути из s в t (напомним, что последовательность дуг (v_1, v_2), (v_2, v_3), …, (v_{n-2}, v_{n-1}), (v_{n-1}, v_n) называется *орпутём* из вершины v_1 в вершину v_n; этот орпуть называется *простым*, если все вершины $v_1, \ldots, v_n$ различны; если $v_1 = v_n$, то орпуть называется *орциклом*). Минимальными путями здесь являются простые орпути из s в t. Другими словами, G является (s,t)-гиперграфом, в котором все гипердуги одноэлементные.

2. Исток-K-терминальный орграф H [27, 29, 26, 11], комбинаторная надёжность которого равна вероятности наличия исправных орпутей из вершины s в каждую выходную вершину из множества $K = \{t_1, t_2, \ldots, t_r\}$. Очевидно, минимальными путями здесь являются K-деревья, т. е. минимальные по включению деревья степени 1 с корнем s, содержащие вершины из K. Добавим к H новую вершину t и r новых дуг (t_i, t), $1 \leqslant i \leqslant r$, положив, что в вершину t входит единственная гипердуга $[(t_1,t), (t_2,t), \ldots, (t_r,t)]$, а все гипердуги, входящие в остальные вершины, одноэлементные, т. е. совпадают с дугами орграфа H. Очевидно, что полученный (s,t)-гиперграф G эквивалентен исходной графовой

модели H.

3. K-полюсные неориентированные графы [11, 28]. В таких графах G задано множество полюсов $K \subseteq VG$, а минимальными путями являются K-полюсные неориентированные деревья (K-*деревья*) — подграфы, содержащие все полюса из K и являющиеся деревьями, в которых каждая висячая вершина является полюсом. K-полюсный неориентированный граф превращается в исток-K-терминальный орграф, если каждое ребро e заменить двумя антисимметричными дугами (u, v) и (v, u), где u, v — концевые вершины ребра e, истоком объявить произвольную вершину s из K, а множеством выходных вершин — множество $K \setminus \{s\}$. Полагается, что $pr\big((u, v)\big) = pr\big((v, u)\big) = pr(e)$. При этом отказы антисимметричных дуг могут рассматриваться как независимые события, ибо это не приводит к изменению комбинаторной надёжности графа [10].

Отметим, что d-тривиальные графы являются специальными случаями граничного подкласса (s, t)-гиперграфов — тривиальных (s, t)-гиперграфов, в которых каждая вершина является либо d-вершиной, либо c-вершиной.

Введение сетевых гиперграфов было вызвано также теорией доминирования, которая дала новый импульс развитию комбинаторных методов анализа надёжности сетевых структур. Так, 70-е годы были отмечены всплеском работ, в которых рассматривались различные алгоритмические версии расчёта надёжности d-тривиальных графов, основанные на двух комбинаторных принципах: включения-исключения и факторизации (аналога метода ветвей и границ). При этом сопоставление эффективности алгоритмов проводилось эмпирически. Комбинаторное осмысление этих методов и выявление среди них оптимальных стратегий было дано позднее в [30, 18, 27, 29, 26, 28, 10, 20, 19, 32, 21] на базе теории доминирования, использующей свойства функции доминирования d-тривиальных графов в алгоритмах анализа комбинаторной надёжности. Целочисленная функция δ, заданная на булеане 2^T, называется *функцией доминирования* простого гиперграфа (T, Ω), если для любого множества $A \subseteq T$

$$\sum_{B \subseteq A} \delta(B) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ содержит ребро из } \Omega; \\ 0, & \text{если } A \text{ не содержит рёбер из } \Omega. \end{cases}$$

Величина $\delta(T)$ называется *доминированием* гиперграфа $\mathcal{Z} = (T, \Omega)$ и обозначается через $d(\mathcal{Z})$. Теперь обозначим через $\mathcal{P}(G)$ множество всех минимальных путей в (s, t)-гиперграфе G. Тогда $\big(DG, \mathcal{P}(G)\big)$ — простой гиперграф, а его доминирование называется *доминированием*

(s,t)-*гиперграфа* G и обозначается через $d(G)$. Доминирование локального гиперграфа вершины v в G обозначается через $d(v,G)$.

В данной статье теория доминирования распространена на гиперграфы, что позволило достичь максимально возможной конденсации символьных выражений комбинаторной надёжности сетевых гиперграфов на базе выявленных свойств их функции доминирования. Чтобы перечислить основные результаты, нам понадобятся ещё несколько определений.

Если орграф (VG, DG) не содержит орциклов, то (s,t)-гиперграф G называется *ациклическим*. Если же (VG, DG) содержит орциклы, но минимальные подгиперграфы ациклические, то G называется *циклическим*. Если хотя бы один минимальный подгиперграф является циклическим, то G называется *нестандартным*; при этом нестандартный (s,t)-гиперграф называется r-циклическим, если ровно r его минимальных подгиперграфов циклические.

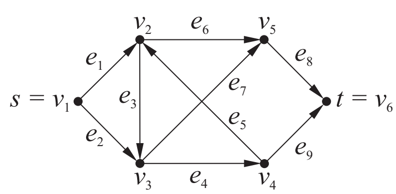

Рис. 3. (s,t)-гиперграф $\mathcal{Z}$

На рис. 3 изображён тривиальный (s,t)-гиперграф $\mathcal{Z}$: все его вершины, кроме v_4 и t, являются d-вершинами, а вершины v_4 и t являются c-вершинами. Очевидно, $\mathcal{Z}$ — циклический (s,t)-гиперграф. Если же вершину v_2 превратить в c-вершину, то $\mathcal{Z}$ превратится в нестандартный 2-циклический (s,t)-гиперграф, поскольку в нём будут уже содержаться ровно два циклических минимальных подгиперграфа, изображённые на рис. 4. Отметим, что (s,t)-гиперграф H, изображённый на рис. 1, является ациклическим.

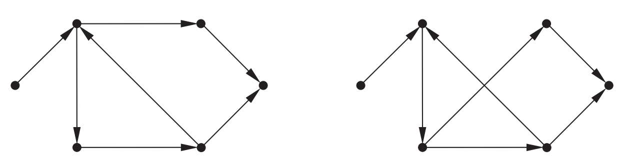

Рис. 4. Минимальные подгиперграфы $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$

В данной статье решена задача вычисления доминирования сетевых гиперграфов: доказано, что доминирование ациклического (s,t)-гиперграфа равно произведению доминирований всех его локальных гиперграфов и, следовательно, задача вычисления доминирования в классе (s,t)-гиперграфов ограниченной степени полиномиально разрешима; доказано, что доминирование циклических (s,t)-гиперграфов равно нулю, в то время как задача вычисления доминирования в классе нестандартных r-циклических (s,t)-гиперграфов является #P-полной при любом фиксированном натуральном r. Параллельно выявлена гиперграфовая природа всех ранее полученных результатов о доминировании d-тривиальных графов, непосредственно вытекающих из перечисленных выше.

Конструктивно доказано существование псевдополиномиального (временна́я сложность которого полиномиальна относительно числа подгиперграфов) алгоритма решения проблемы вычисления комбинаторной надёжности (сокращенно, Rel-проблемы) в классе ациклических (s,t)-гиперграфов ограниченной степени. Для произвольного (s,t)-гиперграфа получена аддитивная формула символьного вычисления надёжности, длина которой равна числу ациклических подгиперграфов, а сложность вычисления каждого слагаемого определяется только сложностью вычисления доминирования локальных гиперграфов. Доказана #P-полнота задачи вычисления полинома КН в классе ациклических тривиальных (s,t)-гиперграфов степени 2, в которых число минимальных путей ограничено сверху линейной функцией от размерности этих (s,t)-гиперграфов. Это означает, в частности, что в случае P$\neq$NP не существует квазиполиномиального алгоритма (временна́я сложность которого полиномиальна относительно числа минимальных подгиперграфов) решения Rel-проблемы в классе ациклических тривиальных (s,t)-гиперграфов степени 2.

Следует отметить, что для основных подклассов d-тривиальных графов, как показано в [12, 13, 24], существуют квазиполиномиальные алгоритмы решения Rel-проблемы. Более того, для ациклических исток-K-терминальных графов, когда в K содержатся все вершины, кроме s, эта проблема решается за линейное время [13]. Таким образом, полученные в статье результаты фактически разделяют подклассы (s,t)-гиперграфов, для которых соответственно существуют псевдополиномиальные и квазиполиномиальные алгоритмы решения Rel-проблемы.

1. Вспомогательные результаты

Инъективная функция $\varphi : VG \to \mathbb{N}^+$ называется *ранговой функцией* орграфа (VG, DG), если $\varphi(u) < \varphi(v)$ для любой дуги $(u,v) \in DG$; при этом $\varphi(w)$ называется *рангом вершины* w. Орграф (VG, DG) имеет некоторую ранговую функцию, если и только если он ациклический [6]. В дальнейшем будем считать, что любой ациклический орграф ранжирован, т. е. задан вместе со своей ранговой функцией.

Путь П — некоторая перечислительная задача с набором числовых параметров, характеризующих входную информацию задачи П. Те параметры, которые определяют длину входного слова, называются *основными*. Если входным словом задачи П является простой гиперграф (T, Ω), то основными являются параметры $|T|$ и $|\Omega|$. Действительно, из определения Ω следует, что число a_n простых гиперграфов с множеством вершин T ($n = |T|$) равно числу антицепей (семейство Шпернера) в T. Размер b_n наибольшей антицепи в T не менее $m = |\Omega|$. Кроме того, каждое подмножество этой антицепи также является антицепью. Поэтому $a_n \geqslant 2^{b_n} \geqslant 2^m$. Для того чтобы различать a_n простых гиперграфов, необходимо $\log_2 a_n$ бит информации для кодирования некоторых из них, т. е. для простого гиперграфа величина $O(m+n)$ является «разумной» длиной входного слова [4]. Следовательно, длиной входного слова перечислительной задачи, связанной с (s,t)-гиперграфом G, следует считать величину $O\big(\sum\limits_{v \in VG}\big(|D_G(v)| + |R_G(v)|\big)\big) = O\big(|DG| + \sum\limits_{v \in VG}|R_G(v)|\big)$.

Для доказательства основных утверждений этого раздела понадобится процедура $\mathrm{Proc}(X, \mathcal{L})$, применяемая к (s,t)-гиперграфу G (здесь $X \subseteq VG$) для построения так называемых «усечённых» минимальных путей в соответствии с некоторым правилом $\mathcal{L}$ выбора гипердуг. Считаем, что в случае ацикличности (s,t)-гиперграфа G произведена топологическая сортировка вершин из VG.

Шаг 0. Пометить все вершины множества X. Положить: $D_1 = \varnothing$, $V_1 = \{t\}$, $u_1 = t$ и перейти к следующему шагу.

Шаг i ($i \geqslant 1$).

1. Пометить вершину u_i. В соответствии с правилом $\mathcal{L}$ выбрать в $R_G(u_i)$ гипердугу $[(v_{i_1}, u_i), (v_{i_2}, u_i), \ldots, (v_{i_r}, u_i)]$. Положить

$$D_{i+1} = D_i \cup \big\{(v_{i_1}, u_i)\big\} \cup \ldots \cup \big\{(v_{i_r}, u_i)\big\}, \quad V_{i+1} = V_i \cup \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\}.$$

2. Если все вершины в V_{i+1} помечены, то процедура завершает свою работу построением некоторого множества дуг D_{i+1}. Если не все вершины в V_{i+1} помечены, то среди них выбрать вершину u_{i+1}, причём в случае ацикличности G вершина u_{i+1} должна иметь наибольший номер. Перейти к следующему шагу.

Предположим, что X состоит из единственной вершины s и M — некоторый минимальный подгиперграф (s,t)-гиперграфа G. Если при посещении вершины $v \in VM$ правило $\mathcal{L}$ будет предписывать выбор гипердуги из $R_M(v)$ (ввиду минимальности M в $R_M(v)$ содержится единственная гипердуга), то $\mathrm{Proc}(s, \mathcal{L})$ построит минимальный путь DM. Поэтому справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть G — (s,t)-гиперграф. Тогда любой его минимальный путь может быть построен некоторой процедурой $\mathrm{Proc}(s, \mathcal{L})$. Более того, если G ациклический, то процедура $\mathrm{Proc}(s, \mathcal{L})$ с любым правилом $\mathcal{L}$ выбора гипердуги строит минимальный путь в G.*

Очевидно, из когерентности локальных гиперграфов следует когерентность любого ациклического (s,t)-гиперграфа. В то же время известно [25], что задача распознавания когерентности является N#P-трудной даже в классе циклических тривиальных (s,t)-гиперграфов.

Формацией (s,t)-гиперграфа G называется подмножество его минимальных путей, объединение которых есть DG. При этом минимальные пути называются *компонентами формации*. Формация называется *чётной* (*нечётной*), если число её компонент чётно (нечётно).

Лемма 2 [20]. *Пусть (T, Ω) — произвольный простой гиперграф и A — произвольное множество из 2^T. Тогда $\delta(A) = \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} D_k$, где D_k равно числу наборов из k рёбер гиперграфа, объединение которых есть A, $m = |\Omega|$.*

Поскольку по определению доминирование $d(G)$ равно доминированию простого гиперграфа $\big(DG, \mathcal{P}(G)\big)$, то в силу леммы 2 $d(G)$ есть разность между числом нечётных и числом чётных формаций (s,t)-гиперграфа G. Кроме того, если G не когерентен, то $d(G) = 0$ ((s,t)-гиперграф называется *когерентным*, если когерентен соответствующий простой гиперграф $\big(DG, \mathcal{P}(G)\big)$).

Лемма 3 [31]. *Задача определения всех рациональных коэффициентов g_i полинома $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} g_i x^i$ полиномиально сводима к задаче определения значений этого полинома на некотором наборе из $n+1$ различных рациональных чисел.*

Напомним, что множество вершин гиперграфа (T, Ω), в котором содержится хотя бы одно его ребро, называется *зависимым*. Ввиду тождественности понятий простого гиперграфа и клаттера системы множеств [5], зависимые множества называют ещё *путями*. Будем пользоваться этой терминологией, чтобы избежать дополнительных определений формации и полинома КН для гиперграфа.

Пусть $\mathcal{Z} = (T, \Omega)$ — простой гиперграф, в котором на множестве вершин T определена функция pr: $T \to \mathbb{R}^+$ такая, что $0 \leqslant pr(v) \leqslant 1$ для любой вершины $v \in T$. *Вероятностным весом* множества $N \subseteq T$ называется число $\prod\limits_{v \in N} pr(v) \cdot \prod\limits_{v \in T \setminus N} (1 - pr\,(v))$. *Комбинаторной надёжностью* $\mathrm{Rel}(\mathcal{Z}, pr(T))$ гиперграфа $\mathcal{Z}$ называется сумма вероятностных весов всех путей в $\mathcal{Z}$.

Лемма 4. *Задача определения доминирования простых гиперграфов полиномиально сводима к задаче вычисления их полиномов* КН.

Доказательство. Пусть $\mathcal{Z} = (T, \Omega)$ — произвольный простой гиперграф. Тогда

$$\mathrm{Rel}(\mathcal{Z}, p) = \sum_{i=0}^{n} h_i p^i (1-p)^{n-i} = (1-p)^n \sum_{i=0}^{n} h_i \left(\frac{p}{1-p}\right)^i, \quad n = |T|,$$

где h_i — число i-элементных путей в $\mathcal{Z}$. Согласно теореме обращения, применённой к булеану 2^T [7], имеем $d(\mathcal{Z}) = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} h_i$. Поэтому задача вычисления $d(\mathcal{Z})$ полиномиально сводима к задаче определения коэффициентов h_i полинома КН гиперграфа $\mathcal{Z}$, которая, в свою очередь, в силу леммы 3 полиномиально сводима к задаче вычисления этого полинома. Лемма 4 доказана.

Пусть задан некоторый порядок $s_1, \ldots, s_n$ вершин из T, $A = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_r}\}$, $B = \{s_{j_1}, \ldots, s_{j_r}\}$, где $i_1 < \ldots < i_r$ и $j_1 < \ldots < j_r$. Скажем, что A является *левым сдвигом* множества B, если $i_1 \leqslant j_1$, $i_2 \leqslant j_2, \ldots, i_r \leqslant j_r$. Порядок вершин в простом гиперграфе называется *регулярным*, если множество его путей замкнуто относительно левых сдвигов. Простой гиперграф с фиксированным регулярным порядком своих вершин называется *регулярным*. Регулярные гиперграфы составляют один из немногих известных содержательных подклассов гиперграфов, для которых доказана полиномиальная разрешимость Rel-проблемы [9]. Поскольку коэффициенты полиномов КН регулярных гиперграфов эффективно вычислимы [9], из леммы 4 вытекает следующий результат.

Следствие 1. *Задача определения доминирования регулярных гиперграфов полиномиально разрешима.*

Обозначения, используемые в дальнейшем. Если $\mathcal{P}$ — некоторое множество конечных множеств, то через $od(\mathcal{P})$ и $ev(\mathcal{P})$ обозначаются соответственно число элементов из $\mathcal{P}$ нечётной мощности и число элементов из $\mathcal{P}$ чётной мощности; $m(\mathcal{P}) = od(\mathcal{P}) - ev(\mathcal{P})$. $\mathcal{P}(H)$ — множество минимальных путей (s,t)-гиперграфа H; $\Pi(H)$ — множество его формаций;

$\mathrm{Min}(\Omega)$ — множество всех минимальных по включению подмножеств в системе множеств Ω. Если R — некоторое множество дуг, то VR обозначает множество всех концевых вершин этих дуг.

2. Доминирование сетевых гиперграфов

Теорема 1. *Доминирование произвольного ациклического (s,t)-гиперграфа G равно произведению доминирований локальных гиперграфов всех его вершин.*

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по числу дуг в (s,t)-гиперграфах. Обозначим через S множество всех таких вершин v, что $D_G(v)$ состоит из единственной дуги (s,v). Если $VG = S \cup \{s,t\}$, то $d(G) = d(t,G)$ и теорема доказана, поскольку в этом случае доминирования локальных гиперграфов вершин, отличных от t, равны 1.

Предположим, что множество $VG \setminus \big(S \cup \{s,t\}\big)$ непусто. Выберем в этом множестве вершину v наименьшего ранга. Тогда $B(v) \subseteq S \cup \{s\}$, где $B(v)$ — множество начальных вершин дуг из $D_G(v)$. Обозначим через F такой (s,v)-гиперграф, что $VF = B(v) \cup \{s,v\}$, $DF = D_G(v) \cup \{D_G(w) \mid w \in B(v), w \neq s\}$, $RF = \bigcup\limits_{v \in VF} R_G(v)$. Удалим из G множество дуг $D_G(v)$, локальный гиперграф $\big(DG, R_G(v)\big)$, все те вершины из $B(v)$ (и их локальные гиперграфы), из которых выходит только одна дуга, и добавим дугу (s,v) и гипердугу $\{[(s,v)]\}$, т. е. образуем новый локальный гиперграф $\big((s,v), \{[(s,v)]\}\big)$. Полученный (s,t)-гиперграф обозначим через H. Очевидно, что $d(F) = d(v,F) = d(v,G)$ и $d(H) = \prod\limits_{x \neq v} d(x,H)$ ввиду индуктивного предположения и равенства $d(v,H) = 1$; $d(w,G) = 1$ для любой вершины w из $B(v)$. Следовательно, $d(H) = \prod\limits_{x \neq v} d(x,G)$. Поэтому остаётся доказать, что $d(G) = d(H) \cdot d(F)$.

Пусть $\mathcal{P}_v(H)$ $\big(\mathcal{P}_{\setminus v}(H)\big)$ — множество всех минимальных путей в H, в которых существует (не существует) дуга, инцидентная вершине v. Очевидно, что $\mathcal{P}_{\setminus v}(H) \subseteq \mathcal{P}(G)$. Определим отображения

$$g : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}_{\setminus v}(H) \cup \big(\mathcal{P}_v(H) \times \mathcal{P}(F)\big),$$
$$e : \mathcal{P}_{\setminus v}(H) \cup \big(\mathcal{P}_v(H) \times \mathcal{P}(F)\big) \to 2^{\mathcal{P}(H) \cup \mathcal{P}(F)}$$

следующим образом. Если $P \in \mathcal{P}_{\setminus v}(H)$, то $g(P) = P$, $e(P) = \{P\}$. Если $P \in \mathcal{P}(G)$ и некоторая дуга из P инцидентна вершине v, то $g(P) = (R,Q)$, $e(R,Q) = \{R,Q\}$, где $Q = P \cap DF$, $R = (P \setminus DF) \cup \{(s,v)\}$. Очевидно, что отображения g и e инъективны. Сюръективность отображения g следует из того факта, что $\big(R \setminus \{(s,v)\}\big) \cup Q$ — минимальный путь в G для любой пары (R,Q) из $\mathcal{P}_v(H) \times \mathcal{P}(F)$.

Определим теперь отображение $f : \Pi(G) \to \Pi(H) \times \Pi(F); \Phi \to (\Phi_1, \Phi_2)$ следующим образом: Φ_1 — множество всех таких минимальных путей R из $\mathcal{P}(H)$, что либо $R \in g(\Phi)$, либо $(R,Q) \in g(\Phi)$ для некоторого $Q \in \mathcal{P}(F)$; Φ_2 — множество всех таких минимальных путей Q из $\mathcal{P}(F)$, что $(R,Q) \in g(\Phi)$ для некоторого $R \in \mathcal{P}(H)$. Корректность определения и сюръективность отображения f следуют из определения отображения g.

Докажем, что $m\big(f^{-1}(\Phi_1,\Phi_2)\big) = (-1)^{|\Phi_1|+|\Phi_2|}$. Пусть

$$\Phi_1 = \{B_1, \ldots, B_t, B_{t+1}, \ldots, B_m\}, \Phi_2 = \{B_{m+1}, \ldots, B_k\},$$

где v не инцидентна ни одной дуге из B_i, если и только если $1 \leqslant i \leqslant t$. Зададим простой гиперграф $(T, \mathcal{B})$ с множеством вершин $T = \{B_1, \ldots, B_k\}$ и множеством минимальных путей $\mathcal{B} = \big\{\{B_l\}, \{B_i, B_j\} \mid l = 1, \ldots, t;$ $i = t+1, \ldots m;\ j = m+1, \ldots, k\big\}$ (допускается, что одноэлементные пути могут отсутствовать). По доказанному выше отображение $e \circ g$ индуцирует взаимно однозначное соответствие $\Phi \leftrightarrow e\big(g(\Phi)\big)$ между формациями из $f^{-1}(\Phi_1,\Phi_2)$ и формациями гиперграфа $(T,\mathcal{B})$, сохраняющее их чётность. Поэтому $m\big(f^{-1}(\Phi_1,\Phi_2)\big) = d(T,\mathcal{B})$. Индукцией по k докажем, что $d(T,\mathcal{B}) = (-1)^k$. При $k = m+1$ это очевидно. Пусть $k > m+1$, $\mathcal{B}_{\setminus k}$ — множество всех путей из $\mathcal{B}$, не содержащих B_k, и $\mathcal{B}_{-k} = \mathrm{Min}(\mathcal{B}_{\setminus k} \cup \mathcal{T})$, где $\mathcal{T}$ состоит из всех множеств, получаемых исключением B_k из всех путей в $\mathcal{B}$, содержащих B_k. Согласно факторизационной теореме о знаковом доминировании [14] имеем

$$d(T,\mathcal{B}) = d(T \setminus B_k, \mathcal{B}_{-k}) - d(T \setminus B_k, \mathcal{B}_{\setminus k}).$$

Но гиперграф $(T \setminus B_k, \mathcal{B}_{-k})$ не когерентный. Поэтому $d(T \setminus B_k, \mathcal{B}_{-k}) = 0$, а $d(T \setminus B_k, \mathcal{B}_{\setminus k}) = (-1)^{k-1}$ по индуктивному предположению. Следовательно, $d(T,\mathcal{B}) = (-1)^k = (-1)^{|\Phi_1|+|\Phi_2|}$. Ввиду сюръективности f имеем

$$d(G) = \sum_{(\Phi_1,\Phi_2) \in \Pi(H) \times \Pi(F)} m\big(f^{-1}(\Phi_1,\Phi_2)\big)$$
$$= \sum_{\Phi_1 \in \Pi(H)} (-1)^{|\Phi_1|} \cdot \sum_{\Phi_2 \in \Pi(F)} (-1)^{|\Phi_2|} = \big(-d(H)\big) \cdot \big(-d(F)\big) = d(H) \cdot d(F).$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 2. *Пусть G — ациклический тривиальный (s,t)-гиперграф, n — число его d-вершин, сумма степеней которых равна q. Тогда*

$d(G) = (-1)^{q-n}$.

Доказательство. Если v является d-вершиной, то $d(v, G) = (-1)^{r-1}$, где $r = |D_G(v)|$. Остальное следует из теоремы 1.

Следствие 3 [18, 26, 27, 29, 30]. *Пусть G — ациклический исток-K-терминальный орграф или 2-терминальный орграф с q дугами и n вершинами. Тогда $d(G) = (-1)^{q-n+1}$.*

Доказательство. В G любая c-вершина, отличная от s, имеет степень 1. Поэтому $d(w, G) = (-1)^{r-i}$ для произвольной вершины $w \neq s$ в G, где $r = |D_G(w)|$. Остальное следует из теоремы 1, так как сумма степеней всех вершин в G равна q и $d(s, G) = 1$.

Гиперграф называется *k-униформным*, если каждое его ребро состоит из k вершин. Подмножество вершин в гиперграфе, не являющееся путём, называется *независимым*.

Лемма 5. *Задача определения доминирования в классе простых k-униформных гиперграфов (обозначаемая* $\mathrm{DHP}(k)$*) является* $\#$P*-полной при любом фиксированном $k \geqslant 2$.*

Доказательство. Обозначим через $I(\mathcal{Z})$ множество независимых множеств в гиперграфе $\mathcal{Z}$. Известна следующая $\#$P-полная задача [23]:

Вход: простой 2-униформный гиперграф $H = (V, E)$

Выход: величина $|I(H)|$.

Докажем полиномиальную сводимость этой задачи к задаче $DHP(2)$.

Пусть $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $b_i(H)$ — число i-элементных независимых множеств в H, $G_r = (T_r, \mathcal{P}_r)$ — простой 2-униформный гиперграф, в котором $T_r = \{v_{ij} \mid i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots r\}$ и $\{v_{ij}, v_{st}\} \in \mathcal{P}_r$, если и только если $i = s$ или $\{v_i, v_s\} \in E$. Определим отображение $f : I(G_r) \to I(H)$ следующим образом: $v_i \in f(U)$, если и только если $U \cap \{v_{ij} \mid j = 1, \ldots, r\} \neq \varnothing$. Корректность задания отображения f следует из определения гиперграфа G_r. Так как $\left|U \cap \{v_{ij} \mid j = 1, \ldots, r\}\right| \leqslant 1$ для каждого $U \in I(G_r)$, то $|U| = \left|f(U)\right|$, $\left|f^{-1}(W)\right| = r^{|W|}$ для каждого $W \in I(H)$. Поэтому число $b_i(G_r)$ i-элементных независимых множеств в G_r равно $b_i(H) \cdot r^i$. Далее, если h_i — число i-элементных путей в G_r, то (см. доказательство леммы 4)

$$d(G_r) = \sum_{i=0}^{nr} (-1)^{nr-i} h_i = \sum_{i=0}^{nr} (-1)^{nr-i} \left(\binom{nr}{i} - b_i(G_r) \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{nr} (-1)^{nr-i} \binom{nr}{i} + \sum_{i=0}^{nr} (-1)^{nr-i+1} b_i(G_r) = 0 + \sum_{i=0}^{nr} (-1)^{nr-i+1} b_i(G_r).$$

Следовательно,

$$(-1)^{nr-1}d(G_r)=\sum_{i=0}^{nr}(-1)^i b_i(G_r)=\sum_{i=0}^{n}(-r)^i b_i(H)=g(-r),$$

где $g(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} b_i(H)x^i$. Отсюда в силу леммы 4 задача вычисления $b_i(H)$, $0\leqslant i\leqslant n$, полиномиально сводится к задаче вычисления доминирования гиперграфов G_r, $r=1,\dots,n+1$. Но $\bigl|I(H)\bigr|=\sum\limits_{i=0}^{n} b_i(H)$. Поэтому искомая сводимость доказана.

Пусть $G=(T,\mathcal{P})$ — простой k-униформный гиперграф, $T=\{s_1,\dots,s_n\}$, $\mathcal{P}=\{P_1,\dots,P_m\}$. Положим: $G'=(T',\mathcal{P}')$, $T'=t\cup\{s_{n+1}\}$, $\mathcal{P}'=\bigl\{P_1\cup\{s_{n+1}\},\dots,P_m\cup\{s_{n+1}\}\bigr\}$. Полиномиальная сводимость DHP(k) к задаче DHP$(k+1)$ следует из очевидного равенства $d(G')=d(G)$. Лемма 5 доказана.

Следствие 4. *Задача определения доминирования является* #P-*полной в классе ациклических* (s,t)-*гиперграфов с числом минимальных путей, ограниченным сверху полиномом от квадрата размерности этих гиперграфов.*

Доказательство. Пусть (T,Ω) — произвольный простой гиперграф, в котором $|\Omega|=O(|T|^2)$, где $T=\{v_1,\dots,v_n\}$. Определим ациклический (s,t)-гиперграф G следующим образом:

$$VG=\{s,t\}\cup T,\ DG=\bigcup_{i=1}^{n}\bigl\{(s,v_i),(v_i,s)\bigr\},\ R_G(v_i)=\bigl\{(s,v_i)\bigr\},\ i=1,\dots,n,$$

и для каждого $W=\{v_{i_1},\dots,v_{i_k}\}$ из Ω множество $\bigl\{(v_{i_1},t),\dots,(v_{i_k},t)\bigr\}$ является гипердугой, входящей в вершину t (в вершину t входят только такие гипердуги). В силу теоремы 1 имеем $d(G)=d(t,G)$. Остальное следует из леммы 5.

Множество минимальных путей (s,t)-гиперграфа G назовём *покрытием* некоторого его подгиперграфа H, если каждая дуга из H принадлежит хотя бы одному минимальному пути из этого множества. (В дальнейшем везде считается, что покрытия состоят только из минимальных путей графа G.)

Лемма 6. *Пусть G — когерентный циклический (s,t)-гиперграф. Тогда существует пара (L,F) такая, что L — простой орцикл в G, F — минимальный путь в G, не принадлежащий ни одному минимальному (по включению) покрытию цикла L.*

Доказательство. Дугу $e=(w,v)$ в G назовём *неприводимой*, если она содержится в каждой гипердуге, входящей в вершину v; в противном случае e будет называться *приводимой* дугой. Вначале предположим, что существуют простой орцикл L и минимальный путь F такие, что в F нет приводимых дуг графа G, принадлежащих L. Предположим также, что $\mathcal{P}$ — минимальное покрытие орцикла L, содержащее F. Тогда в $L \cap F$ существует дуга $e_1 = (u_1, u_2)$, не принадлежащая ни одному минимальному пути из $\mathcal{P} \setminus F$.

Положим $L = e_1, \ldots, e_n$, где $e_i = (u_i, u_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n$, и $u_1 = u_{n+1}$. Пусть k — наименьшее такое i, что $e_i \notin F$ (такое k существует ввиду ацикличности минимальных подгиперграфов). Тогда e_k принадлежит некоторому минимальному пути A из $\mathcal{P}$, а дуги $e_1, \ldots, e_{k-1}$ неприводимы. Из определений неприводимости и минимальности пути следует, что $e_i \in A$ при $u_{i+1} \in VA$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Поэтому $e_1 \in A$. Противоречие. Итак, остается доказать существование пары (L, F) такой, что в минимальном пути F нет приводимых дуг простого орцикла L.

Пусть теперь C — произвольный простой орцикл в G. Ввиду когерентности орцикла G существует простой орпуть $R = q_1, q_2, \ldots, q_n$ из вершины s в вершину t, имеющий общие дуги с C. В множестве $VR \cap VC$ возьмём две вершины v_r и v_l, ближайшие к вершинам s и t соответственно, если следовать вдоль орпути R . Обозначим через C_1 последовательность дуг орцикла C, составляющих орпуть из v_r в v_l. Пусть q_{r-1} — дуга из R, входящая в вершину v_r, q_l — дуга из R, выходящая из вершины v_l. Очевидно, что $P = q_1, \ldots, r_{r-1}, C_1, q_l, \ldots, q_n$ — простой орпуть из s в t, причём $VP \cap VC = VC_1$. Отсюда следует истинность импликации

$$\big(u \in VC \cap VP, u \neq v_r, (v, u) \text{ — дуга орцикла } C\big) \Rightarrow \big((v, u) \in P \cap C\big). \quad (2)$$

Обозначим через A множество дуг, построенное процедурой $\mathrm{Proc}(s, \mathcal{L}_1)$ в соответствии со следующим правилом выбора $\mathcal{L}_1$:

если $u \in VP$, то в $R_G(u)$ выбирается гипердуга, содержащая дугу из P;

если $u \in VC \setminus VP$, то в $R_G(u)$ выбирается гипердуга, содержащая дугу из C;

в остальных случаях выбор гипердуги произволен.

По определению правила $\mathcal{L}_1$, $P \subseteq A$ и, следовательно, $\{s, t\} \subseteq VA$. Отсюда по определению процедуры $\mathrm{Proc}(s, \mathcal{L})$ множество дуг A является минимальным путём в G.

Обозначим через B множество дуг, построенное процедурой $\mathrm{Proc}(s, \mathcal{L}_2)$ в соответствии со следующим правилом выбора $\mathcal{L}_2$ (здесь $Q = q_1, \ldots, q_{r-1}$):

если $|R_G(u)| > 1$, $u \in VA$ и $u \notin VQ$, то в $R_G(u)$ выбирается гипердуга, содержащая дугу из $D_G(u) \setminus A$;

если (v,u) — приводимая дуга орцикла C, то в $R_G(u)$ выбирается гипердуга, не содержащая (v,u);

если $u \in VQ$, то в $R_G(u)$ выбирается гипердуга, состоящая только из дуг минимального пути A.

Первые два условия правила $\mathcal{L}_2$ непротиворечивы. Действительно, если (v,u) — приводимая дуга орцикла C, $u \in VA$ и $u \notin VQ$, то в случае $u \in VP$ из (2) следует, что $(v,u) \in A$, а в случае $u \in VC \setminus VP$ то же самое следует из правила выбора $\mathcal{L}_1$. Следовательно, в любом случае в $R_G(u)$ можно указать гипердугу, одновременно не содержащую дугу (v,u), но содержащую дугу из $D_G(u) \setminus A$.

Если B является минимальным путём, то пара (C,B) искомая, ибо B не содержит приводимых дуг орцикла C. В противном случае B не содержит орпутей из s в t и, следовательно, $VB \cap VQ = \varnothing$. Поэтому истинна импликация

$$\big(|D_G(u)| > 1, u \in VB \cap VA\big) \Rightarrow \big(B \cap (D_G(u) \setminus A) \neq \varnothing\big)$$

(см. определение правила выбора $\mathcal{L}_2$). Поэтому каждой вершине $u \in VB$ можно поставить в соответствие дугу $e(u)$ следующим образом:

если $|D_G(u)| > 1$, то $e(u) \in B \cap (D_G(u) \setminus A)$;

если $|D_G(u)| = 1$, то $e(u) \in B \cap D_G(u)$.

Пусть $M = \bigcup\limits_{u \in VB} e(u)$. Тогда в M имеется некоторый простой орцикл N, поскольку в M нет орпутей из s в t и $B \cap D_G(u) \neq \varnothing$ для любой вершины $u \in VM$. Если $e(u)$ — приводимая дуга орцикла N, то $|D_G(u)| > 1$ и, следовательно, $e(u) \notin A$. Поэтому пара (N,A) искомая. Лемма 6 доказана.

Теорема 2. *Пусть C — циклический (s,t)-гиперграф. Тогда $d(G) = 0$.*

Доказательство. От противного. Среди всех циклических (s,t)-гиперграфов, доминирование которых отлично от нуля, выберем (s,t)-гиперграф G с наименьшим числом дуг. Согласно лемме 6 существует пара (L,F) такая, что L — простой орцикл в G, F — минимальный путь, не принадлежащий ни одному минимальному покрытию орцикла L. Обозначим через $\mathcal{P}_1$ множество формаций G, не содержащих F; через $\mathcal{P}_2$ множество формаций G, полученных добавлением минимального пути F к каждой формации из $\mathcal{P}_1$; через $\mathcal{P}_3$ множество всех остальных формаций G (каждая из них содержит F). Очевидно, что $od(\mathcal{P}_1) = ev(\mathcal{P}_2)$, $od(\mathcal{P}_2) = ev(\mathcal{P}_1)$. Пусть $\mathcal{E}$ — множество подмножеств минимальных путей, полученных удалением минимального пути F из каждой формации

$\mathcal{P}_3$. На множестве $\mathcal{E}$ введём отношение эквивалентности: для E_s, E_r из $\mathcal{E}$ положим $E_s \sim E_r$, если и только если объединение минимальных путей, входящих в E_s и E_r соответственно, совпадают. Пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ — классы эквивалентности (относительно $\sim$), и пусть $P_{i1}, \ldots, P_{in_i}$ — все те минимальные пути из $\mathcal{P}(G)$, которые хотя бы раз встречаются в одном из элементов в $\mathcal{F}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Определим подгиперграф G_i (s,t)-гиперграфа G следующим образом:

$$VG_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} VP_{ij},\ DG_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} P_{ij},\ RG_i = \{P_{i1}, \ldots, P_{in_i}\},\ i = 1, \ldots, n.$$

Согласно выбору пары (L, F) имеем $L \subseteq DG_i$, а согласно определению $\mathcal{P}_3$ в множестве DG_i нет некоторых дуг из F. Поэтому $|DG_i| < |DG|$. Следовательно, $d(G_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, по индуктивному предположению.

Итак,

$$\begin{aligned} d(G) &= \sum_{i=1}^{3} \bigl(od(\mathcal{P}_i) - ev(\mathcal{P}_i)\bigr) = \bigl(od(\mathcal{P}_3) - ev(\mathcal{P}_3)\bigr) \\ &= -\bigl(od(\mathcal{E}) - ev(\mathcal{E})\bigr) = -\sum_{i=1}^{n} \bigl(od(\mathcal{F}_i) - ev(\mathcal{F}_i)\bigr) = -\sum_{i=1}^{n} d(H_i) = 0. \end{aligned}$$

Получено противоречие. Теорема 2 доказана.

Следствие 5 [18, 22, 26, 27, 29, 30, 32]. *Пусть G — циклический исток-K-терминальный орграф или 2-терминальный орграф. Тогда $d(G) = 0$.*

Из следствия 1 и теорем 1, 2 вытекает следующий результат.

Следствие 6. *Задача определения доминирования (s,t)-гиперграфа, в котором все локальные гиперграфы регулярны, полиномиальна разрешима.*

Из леммы 2 и теорем 1, 2 вытекает следующий результат.

Следствие 7. *При любом фиксированном k задача определения доминирования в классе (s,t)-гиперграфов, степень которых не превосходит k, полиномиально разрешима.*

Следствие 8. *При любом фиксированном целом $r \geqslant 1$ задача определения доминирования является NP-трудной в классе нестандартных r-циклических (s,t)-гиперграфов.*

Доказательство. Докажем полиномиальную сводимость к этой задаче задачи DHP(2) (см. лемму 5). Пусть $H = (T, \mathcal{P})$ — произвольный простой 2-униформный гиперграф, $T = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_m\}$. Определим нестандартный (s,t)-гиперграф G следующим образом. Пусть $VG = \{s, t, v, w, u_1, \ldots, u_{n+r}\}$ и $DG = \big\{(w,t), (w,v), (v,w), (s,u_i), (u_i, w)\big\}$, $i = 1, \ldots, n+r$. Все вершины, исключая вершину w, объявим c-вершинами; элементы $e_1, \ldots, e_n$ отождествим соответственно с дугами $(u_1, w), \ldots, (u_n, w)$; положим также $e_i = (u_i, w)$, $i = n+1, \ldots, n+r$, $e_0 = (v, w)$,

$$R_G(w) = \big\{P_1, \ldots, P_m, \{e_0, e_{n+1}\}, \ldots, \{e_0, e_{n+r}\}\big\}.$$

Очевидно, что ровно r минимальных подгиперграфов (s,t)-гиперграфа G циклические — они содержат соответственно гипердуги $\{e_0, e_i\}$, $n+1 \leqslant i \leqslant n+r$; остальные m минимальных подгиперграфов ациклические — они содержат соответственно гипердуги P_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Непосредственно проверяется, что $d(G) = d(w, G)$ (этот же факт очевиден в силу теоремы 1, если условно «удалить» дугу (w, v)).

Пусть $T' = D_G(w) = \{e_0, e_1, \ldots, e_{n+r}\}$, $\mathcal{P}' = R_G(w)$, $T^* = T' \setminus \{e_0\}$, $\mathcal{P}'_{\setminus e_0}$ — множество всех гипердуг из $\mathcal{P}'$, не содержащих e_0, и $\mathcal{P}'_{-e_0}$ — множество всех минимальных (по включению) множеств из $\mathcal{P}'$, в которых нет e_0 или которые получаются исключением элемента e_0 из множеств в $\mathcal{P}'$, содержащих e_0. Согласно факторизационной теореме о знаковом доминировании [14] имеем

$$d(T', \mathcal{P}') = d(T^*, \mathcal{P}'_{-e_0}) - d(T^*, \mathcal{P}'_{\setminus e_0}).$$

Так как $\mathcal{P}'_{\setminus e_0} = \mathcal{P}$, то простой гиперграф $(T^*, \mathcal{P}'_{\setminus e_0})$ не является когерентным; поэтому $d(T^*, \mathcal{P}'_{\setminus e_0}) = 0$. Далее, $\mathcal{P}'_{-e_0} = \{P_1, \ldots, P_m, e_{n+1}, \ldots, e_{n+r}\}$. Обозначим $\mathcal{P}'_{-e_0}$ через $\mathcal{P}^*$. Пусть D^*_k — число наборов из k рёбер гиперграфа $H^* = (T^*, \mathcal{P}^*)$, объединение которых есть T^*, а D_k — число наборов из k рёбер гиперграфа $H = (T, \mathcal{P})$, объединение которых есть T. Очевидно, что $D^*_k = 0$ при $k \leqslant r$ и $D_k = D^*_{k+r}$, $k = 1, \ldots, m$. Отсюда с учётом леммы 2 имеем

$$\begin{aligned} d(H^*) &= \sum_{k=r+1}^{m+r} (-1)^{k-1} D^*_k \\ &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+r-1} D^*_{i+r} = (-1)^r \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} D_i = (-1)^r d(H). \end{aligned}$$

Следовательно, $D(G) = (-1)^r \cdot d(H)$. Следствие 8 доказано в силу леммы 5.

3. Надёжность сетевых гиперграфов

Пусть $M \subseteq DG$ и $Pr(M) = \prod\limits_{e \in M} pr(e)$. Следующий результат непосредственно доказывается индукцией по числу дуг (s,t)-гиперграфа G, в котором на множестве дуг задана весовая функция pr.

Лемма 7 [1, 5]. *Для любого подмножества дуг $M \subseteq DG$ величина $Pr(M)$ равна сумме вероятностных весов всех подмножеств в DG, содержащих M.*

Пусть $\mathcal{M}(G)$ — множество всех подгиперграфов (s,t)-гиперграфа G и $\mathcal{A}(G)$ — множество всех ациклических подгиперграфов в G.

Теорема 3. *Пусть G — произвольный (s,t)-гиперграф. Тогда*

$$\mathrm{Rel}\big(G, pr(DG)\big) = \sum_{H \in \mathcal{A}(G)} d(H) \cdot Pr(DH),$$

где $d(H) = \prod\limits_{v \in VH} d(v, H)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}(G) = \{P_1, \ldots, P_m\}$ — множество минимальных путей в G. Обозначим через $\mathcal{P}P_i$ свойство «содержать минимальный путь P_i», $i = 1, \ldots, m$. Тогда согласно определению величина $\mathrm{Rel}\big(G, pr(DG)\big)$ есть сумма вероятностных весов всех подмножеств дуг в DG, обладающих хотя бы одним из свойств $\mathcal{P}P_1, \ldots, \mathcal{P}P_m$. По лемме 7 сумма вероятностных весов всех подмножеств дуг в DG, обладающих k фиксированными свойствами $\mathcal{P}P_{i_1}, \ldots, \mathcal{P}P_{i_k}$, равна $Pr(P_{i_1} \cup P_{i_2} \cup \ldots \cup P_{i_k})$. Отсюда с использованием принципа включения-исключения следует, что

$$\mathrm{Rel}\big(G, pr(DG)\big) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} Pr(P_{i_1} \cup P_{i_2} \cup \ldots \cup P_{i_k}). \quad (3)$$

Набору минимальных путей $\{P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}\}$ поставим в соответствие подгиперграф H (s,t)-гиперграфа G следующим образом:

$$VH = \bigcup_{j=1}^{k} VP_{i_j},\ DH = P_{i_1} \cup P_{i_2} \cup \ldots \cup P_{i_k},\ RH = \{P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}\}.$$

Очевидно, что это соответствие является взаимно однозначным. Поэтому правую часть в (3) можно записать так:

$$\sum_{H \in \mathcal{M}(G)} Pr(DH) \cdot \big(od\, f(H) - ev\, f(H)\big) = \sum_{H \in \mathcal{M}(G)} Pr(DH) \cdot d(H),$$

где $od\,f(H)$, $ev\,f(H)$ обозначают число нечётных и чётных формаций подгиперграфа H соответственно. Отсюда в силу теоремы 2 получаем

$$h_R\big(G, pr(DG)\big) = \sum_{H \in \mathcal{A}(G)} d(H) \cdot Pr(DH).$$

Остальное следует из теоремы 1. Теорема 3 доказана.

На рис. 5 изображены все ациклические подгиперграфы H_i (s,t)-гиперграфа $\mathcal{Z}$, изображённого на рис. 3.

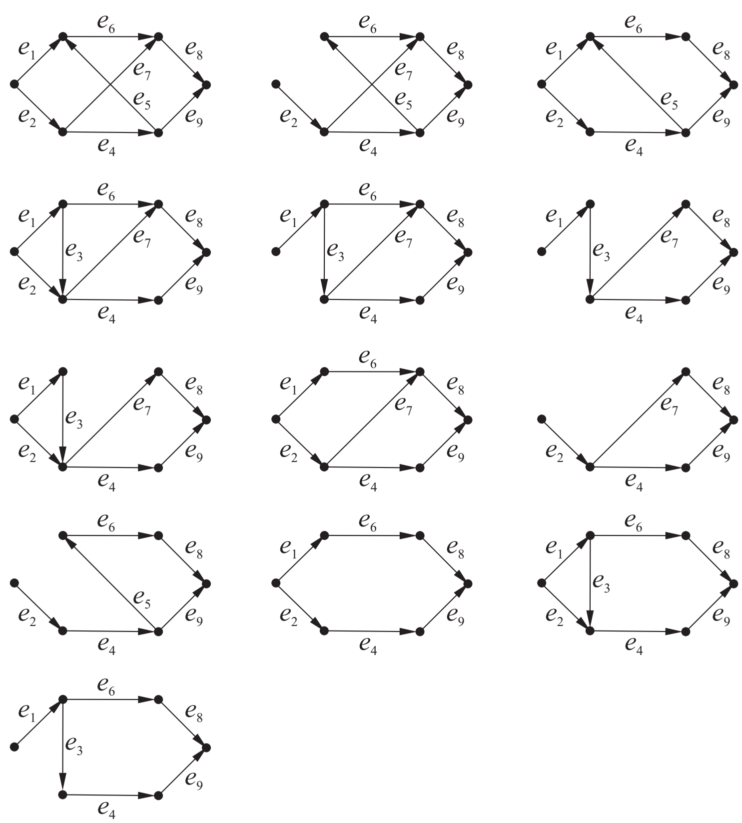

Рис. 5. Множество $\mathcal{A}(\mathcal{Z})$

Положим $p_i = pr(e_i)$. Применив теперь следствие 2 для вычисления $d(H_i)$ и теорему 3, получим символьное выражение комбинаторной надёжности для $\mathcal{Z}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Rel}(\mathcal{Z}, pr(D\mathcal{Z})) = {} & p_1p_2p_4p_5p_6p_7p_8p_9 - p_2p_4p_5p_6p_7p_8p_9 - p_1p_2p_4p_5p_6p_8p_9 + \\ & + p_1p_2p_3p_4p_6p_7p_8p_9 - p_1p_3p_4p_6p_7p_8p_9 + p_1p_3p_4p_7p_8p_9 - \\ & - p_1p_2p_3p_4p_7p_8p_9 - p_1p_2p_4p_6p_7p_8p_9 + p_2p_4p_7p_8p_9 + \\ & + p_2p_4p_5p_6p_8p_9 + p_1p_2p_4p_6p_8p_9 - p_1p_2p_3p_4p_6p_8p_9 + \\ & + p_1p_3p_4p_6p_8p_9.\end{aligned}$$

Если G — ациклический (s,t)-гиперграф, то множество $\mathcal{A}(G)$ его подгиперграфов может быть определено за время $O\big(|DG| \cdot |\mathcal{A}(G)|\big)$ [8]. Поэтому из теоремы 3 и следствия 7 непосредственно вытекает следующий результат.

Следствие 9. *При любом фиксированном целом k задача определения комбинаторной надёжности в классе ациклических (s,t)-гиперграфов степени k разрешима за время, полиномиально зависящее от размера этих гиперграфов и числа их подгиперграфов.*

Лемма 8. *Пусть a и b — некоторые целые числа, причём $|a| \geqslant 8$. Если уравнение*

$$b = \sum_{i=0}^{n} x_i a^i \tag{4}$$

имеет такое целочисленное решение, что $|a| \geqslant |x_i|^3$, $0 \leqslant i \leqslant n$, то это решение однозначно определяется за время, полиномиально зависящее от n, $\log_2 |a|$ и $\log_2 |b|$.

Доказательство. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — целочисленное решение уравнения (4), причём $|a| \geqslant y^3$, $y = \max(2, \{|x_i| \mid 0 \leqslant i \leqslant n\})$. Тогда

$$x_k + \frac{\sum\limits_{i=0}^{k-1} x_i a^i}{a^k} = \frac{b - \sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i a^i}{a^k} \tag{5}$$

(сумма $\sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i a^i$ полагается равной нулю, если $k = n$) и

$$|a^{-k} \sum_{i=0}^{k-1} x_i a^i| \leqslant y \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{|a|^{i+1}} \leqslant y \left(\frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^6} + \ldots \right) = \frac{y}{y^3 - 1} < \frac{1}{2}.$$

Следовательно, если правая часть в (5) известна, то целое число x_k однозначно определяется из соотношения (5). Поэтому числа $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$

последовательно определяются из соотношения (5). Лемма 8 доказана.

Теорема 4. *Задача вычисления полинома комбинаторной надёжности является* #P- *полной в классе ациклических тривиальных* (s,t)*-гиперграфов степени* 2 *с числом минимальных путей, ограниченным сверху линейной функцией от размера этих* (s,t)*-гиперграфов.*

Доказательство. Докажем полиномиальную сводимость задачи определения доминирования простого 2-униформного гиперграфа $\mathcal{Z}(T, \Omega)$, являющейся #P-полной в силу леммы 5, к задаче, о которой говорится в условии теоремы.

Пусть $T = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $|\Omega| = m$, H — двудольный орграф с долями $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ и множеством дуг DH, которое задаётся в соответствии со следующим правилом: если (s_i, s_j) — k-е ребро в Ω, то $(w_i, u_k) \in DH$ и $(w_j, u_k) \in DH$. Добавим к H множество вершин $\{s, v_1, \ldots, v_m\}$ и множества дуг $A = \{(s, w_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$, $B = \{(u_i, v_i) \mid i = 1, \ldots, m\}$, $C = \{(v_{j-1}, v_j) \mid j = 2, \ldots, m\}$, положив $s = v_m$. Полученный (s,t)-орграф обозначим через G. Все вершины из множества $\{v_2, \ldots, v_m\}$ положим d-вершинами, а все остальные вершины из VG — c-вершинами. В этом случае имеем ациклический тривиальный (s,t)-гиперграф $G = (VG, DG, RG)$ степени 2.

На базе G построим (s,t)-гиперграф G_{rs}. Каждую дугу (s, w_i) из множества A заменим орпутём из вершины s в вершину w_i, состоящую из r дуг $(s, z_{i1}), (z_{i1}, z_{i2}), \ldots, (z_{ir-1}, w_i)$, а каждую дугу (v_{i-1}, v_i) из C заменим орпутём из вершины v_{i-1} в вершину v_i, состоящим из s дуг $(v_{i-1}, t_{i1}), (t_{i1}, t_{i2}), \ldots, (t_{is-1}, v_i)$. Все добавленные вершины z_{ij}, t_{ij} положим c-вершинами.

Таким образом, построен ациклический тривиальный (s,t)-гиперграф G_{rs} степени 2.

Отметим, что каждый минимальный путь M в G имеет следующий вид:

$$M = \big\{(s, w_i), (s, w_j), (w_i, u_q), (w_j, u_q), (u_q, v_q), (v_q, v_{q+1}), \ldots, (v_{m-1}, t)\big\}.$$

Поэтому число минимальных путей в G (следовательно, в G_{rs}) равно m.

Обозначим через $\mathcal{L}_{kli}$ множество подгиперграфов (s,t)-гиперграфа G, содержащих i дуг из C, l дуг из A, k дуг из B, а через $\mathcal{L}^{rs}_{kli}$ множество всех подгиперграфов (s,t)-гиперграфа G_{rs}, которые получаются из подгиперграфов в $\mathcal{L}_{kli}$ посредством замены соответствующих дуг описанными выше орпутями. Очевидно, что $|\mathcal{L}_{kli}| = |\mathcal{L}^{rs}_{kli}|$.

Пусть $F \subseteq \mathcal{L}^{rs}_{kli}$ и v_j — вершина из $\{v_1, \ldots, v_m\}$ с наименьшим индексом, принадлежащая F. Тогда в F содержатся все дуги (u_j, v_j), $(t_{i,s-1}, v_i)$,

$i = j+1, \ldots, m$. А так как в DF имеется ровно k дуг из B, то среди вершин $v_{j+1}, v_{j+2}, \ldots, v_m$ ровно $k-1$ вершин будут d-вершинами в (s,t)-гиперграфе F. Для каждой вершины x из F имеем $d(x,F) = -1$. Поэтому по теореме 1 $d(F) = \prod\limits_{x \in VF} d(x,F) = (-1)^{k-1}$. Далее по теореме 3 имеем

$$\mathrm{Rel}(G_{rs}, p) = \sum_{l,i,k} \sum_{F \in \mathcal{L}^{rs}_{kli}} d(F) \cdot Pr(DF) = \sum_{l,i,k} \sum_{F \in \mathcal{L}^{rs}_{kli}} (-1)^{k-1} p^{lr+is+3k}$$

$$= -\sum_{l=0}^{n} p^{rl} \sum_{i=0}^{m} p^{si} \sum_{k=0}^{m} (-p^3)^k |\mathcal{L}_{kli}|$$

$$\Rightarrow \frac{-\mathrm{Rel}(G_{rs}, p)}{p^{nr+ms+3m}} = \sum_{l=0}^{n} \left(\frac{1}{p}\right)^{rl} \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1}{p}\right)^{si} \sum_{k=0}^{m} \left(-\frac{1}{p^3}\right)^{k} |\mathcal{L}_{m-k,n-l,m-i}|. \quad (6)$$

Пусть

$$y_{li} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k 2^{3mk} |\mathcal{L}_{m-k,n-l,m-i}|,\ 0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant l \leqslant n, \quad (7)$$

$$x_l = \sum_{i=0}^{m} 2^{smi} y_{li},\ 0 \leqslant l \leqslant n. \quad (8)$$

Если левую часть в (6) обозначить через b и положить $p = 1/2^m$, то (6) запишется в виде

$$b = \sum_{l=0}^{n} 2^{rml} x_l. \quad (9)$$

Так как число минимальных путей в G_{rs} равно m, то $|\mathcal{L}_{kli}| \leqslant 2^m$. Поэтому $|y_{il}| \leqslant 2^{3m^2+2m}$. Но тогда $|x_l| \leqslant 2^{3m^2+3m+sm^2}$. Если теперь положить $r = 27m^2 + 27m + 9$ и $s = 9m + 6$, то $2^{rm} \geqslant |x_l|^3$. Поэтому к (9) применима лемма 8, в силу которой значения x_l определяются за время, полиномиально зависящее от m, n и $\log_2 b$. Аналогично, $2^{sm} \geqslant |y_{il}|^3$, где $0 \leqslant i \leqslant m$, $0 \leqslant l \leqslant n$, и к уравнениям (8) применима лемма 8, в силу которой значения y_{il} определяются за время, полиномиально зависящее от m, n и $\log_2 b$. Наконец, $2^{3m} \geqslant |\mathcal{L}_{m-k,n-l,m-i}|^3$, и лемма 8 применима к уравнениям (7).

Отметим также, что размер гиперграфа G_{rs} ограничен сверху полиномом от размера гиперграфа G. Пусть $D_{kl} = \sum\limits_{i=0}^{m} |\mathcal{L}_{kli}|$. По определению орграфа H величина D_{kl} равна числу наборов из k рёбер гиперграфа $\mathcal{L}$, в объединении которых имеется ровно l вершин из T. В силу леммы 2 $d(\mathcal{L}) = \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} D_{kn}$, откуда и следует искомая сводимость. Теорема 4 доказана.

Следствие 10. *Если классы* P *и* NP *не совпадают, то задача определения комбинаторной надёжности в классе ациклических тривиальных гиперграфов степени* 2 *не может быть решена алгоритмом с временно́й сложностью, полиномиально зависящей от числа минимальных путей этих гиперграфов.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Барлоу Р., Прошан Ф.** Статистическая теория надёжности и испытания на безотказность. М.: Наука, 1984.
2. **Велигурский Г. А.** Расчёт надёжности технических систем с несколькими типами отказов элементов // Весці АН БССР. Сер. фіз.-тэх.н. 1984. № 3. С. 57–64.
3. **Велигурский Г. А.** Аппаратно-программные методы анализа надёжности структурно-сложных систем. Минск: Наука и техника, 1986.
4. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
5. **Полесский В. П.** Развязывания клаттеров, корреляционные неравенства и границы комбинаторной надёжности // Проблемы передачи информации. 1997. Т. 33, вып. 3. Р. 50–70.
6. **Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.** Комбинаторные алгоритмы: теория и практика. М.: Мир, 1980.
7. **Сачков В. Н.** Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982.
8. **Черняк А. А.** Комбинаторно-графовый метод анализа надёжности сложных систем с монотонными булевыми функциями // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 165–174.
9. **Черняк А. А., Черняк Ж. А.** Надёжность бинарных систем // Дискретная математика. 1999. Т. 11, вып. 1. С. 129–139.
10. **Agrawal A., Satyanarayana A.** An $O(|E|)$ algorithm for computing the reliability of a class of directed networks // Oper. Res. 1984. V. 32, N 3. P. 493–515.
11. **Ball M. O., Colbourn C. J., Provan J. S.** Network reliability. Network models // Handbooks in operation research and management science. Ch. 7. Amsterdam: North Holland, 1995. P. 673–762.
12. **Ball M. O., Provan J. S.** Bounds on the reliability polynomial for shellable independence systems // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1982. V. 3, N 2. P. 166–181.

13. **Ball M. O., Provan J. S.** Calculating bounds on reachability and connectedness in stochastic networks // Networks. 1983. V. 3, N 2. P. 253–78.
14. **Barlow R. E., Iyer S.** Computational complexity of coherent systems and the reliability polynomial // Prob. Eng. Inform. Sci. 1988. V. 2. P. 461–469.
15. **Buzacott J. A.** Node partition formulae for directed graph reliability // Networks. 1987. V. 17, N 2. P. 227–240.
16. **Chernyak A. A.** A new graph-combinatorial method for reliability analysis of monotone graphs // Proc. of the 8th Internat. Simposium on Reliability in Electronics. V.1. Budapest, 1991. P. 135–140.
17. **Chernyak A. A., Chernyak Z. A.** A unified domination approach for reliability analysis of networks with arbitrary logic // IEEE Trans. Reliab. 1996. V. 45, N 1. P. 114–119.
18. **Hagstrom J. N.** Directed network reliability: domination and computing coefficients of the success-marginal expansion // Networks. 1990. V. 20, N 1. P. 65–78.
19. **Huseby A. B.** A unified theory of domination and signed domination with application to exact reliability computations // Technical report, Institute of Mathematics, Oslo. 1983. N 3.
20. **Huseby A. B.** Domination theory and Crapo b-invariant // Networks. 1989. V. 19. P. 135–149.
21. **Johnson R.** Network reliability and acyclic orientations // Networks. 1984. V. 14, N 4. P. 489–505.
22. **Kahn J., Sturtevant D.** Mobius inversion and directed network reliability // Technical report, Rutgers University, New Brunswick, USA. 1983.
23. **Provan J. S., Ball M. O.** The complexity of counting cuts and of computing the probability that a graph is connected // SIAM J. Comput. 1983. V. 12, N 4. P. 777–788.
24. **Provan J. S., Ball M. O.** Computing network reliability in time polynomial in the number of cuts // Oper. Res. 1984. V. 32, N 2. P. 516–526.
25. **Provan J. S., Kulkarni V. G.** Exact cuts in networks // Networks. 1989. V. 19, N 3. P. 281–289.
26. **Rodrigues J., Traldi L.** (K, j)-domination and (K, j)-reliability // Networks. 1997. V. 30, N 4. P. 293–306.
27. **Satyanarayana A.** A unified formula for analysis of some network reliability problems // IEEE Trans. Reliab. 1982. V. 31, N 1. P. 23–32.
28. **Satyanarayana A., Chang M. K.** Network reliability and the factoring theorem // Networks. 1983. V. 13, N 1. P. 107–120.
29. **Satyanarayana A., Hagstrom J. N.** Combinatorial properties of directed graphs useful in computing network reliability // Networks. 1981. V. 11, N 4. P. 357–366.

30. **Satyanarayana A., Prabhakar A.** New topological formula and rapid algorithm for reliability analysis of complex networks // IEEE Trans. Reliab. 1978. V. 27, N 2. P. 82–100.

31. **Valiant L. G.** The complexity of enumeration and reliability problems // SIAM J. Comput. 1979. V. 8, N 3. P. 410–421.

32. **Willie R. R.** A theorem concerning cyclic directed graphs with application to network reliability // Networks. 1980. V. 10, N 1. P. 71–78.

Адреса авторов:

Черняк А. А.

Белорусский государственный
педагогический университет им. М. Танка,
кафедра математики
физического факультета,
ул. Советская, 18,
220050 Минск, Республика Беларусь.
E-mail: arkcharniak@tut.by

Суздаль С. В.

Белорусский государственный университет,
Механико–математический факультет,
пр. Независимости, 4,
220030 Минск, Республика Беларусь.
E-mail: suzdal@bsu.by

Статья поступила
14 апреля 2005 г.

Переработанный вариант —
15 декабря 2006 г.