ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2007. Серия 1. Том 14, № 3. 3–12

УДК 519.854

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С НЕ КРАТЧАЙШИМИ МАРШРУТАМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ*)

А. А. Агеев

В классических метрических задачах размещения стоимость обслуживания клиента предприятием пропорциональна длине кратчайшего пути между ними (другими словами, предприятие обслуживает клиента по кратчайшему маршруту). В данной статье исследуются обобщения этих задач, в которых маршрут обслуживающей бригады проходит через удалённый склад, содержащий блоки или модули, требующие замены. В этом случае суммарная длина пути до клиента, вообще говоря, уже не будет кратчайшей и задача перестаёт быть метрической. Показано, что известные в литературе алгоритмы для нахождения приближённых решений классических метрических задач переносятся на рассматриваемые обобщения с сохранением установленных для них оценок точности.

Введение

В классических метрических задачах размещения стоимость обслуживания клиента предприятием пропорциональна длине кратчайшего пути между ними (другими словами, предприятие обслуживает клиента по кратчайшему маршруту). Если предприятие осуществляет ремонтно-профилактические работы (например, представляет собой сервис-центр), то обслуживание включает выезд ремонтной бригады к клиенту. При этом нередка ситуация, когда обслуживание клиента включает замену определённых модулей или блоков, которые могут храниться на складах, достаточно удалённых от обслуживающих предприятий. В этом случае маршрут ремонтной бригады должен проходить через один из складов, содержащих необходимый модуль или блок, и суммарная длина пути до клиента, вообще говоря, уже не будет кратчайшей. В данной статье исследуются обобщения ряда классических задач размещения, адекватно отражающие специфику данной ситуации. Рассматриваются два варианта модели: в первом варианте при обслуживании клиента предприятием

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–00255–а).

множество допустимых складов зависит только от клиента (содержательно это означает, что склады — общие для всех предприятий, но специализированные и у разных клиентов заменяемые модули могут быть разными), во втором варианте — только от предприятия (что означает, что каждому предприятию доступна только часть универсальных складов). Первый вариант модели одновременно включает два ранее исследованных частных случая: с замкнутыми и незамкнутыми маршрутами обслуживания. В случае с замкнутыми маршрутами стоимость обслуживания клиента пропорциональна сумме длины маршрута ремонтной бригады до клиента и длины обратного маршрута. В случае с незамкнутыми маршрутами обслуживания длина обратного маршрута игнорируется. Оба случая первого варианта модели, обобщающие задачу о p-центре, изучались в [11], где были предложены полиномиальные алгоритмы для нахождения приближённого решения обеих задач с оценками точности 9 и 12 для незамкнутого и замкнутого случая соответственно.

В данной статье с использованием единообразной сводимости к метрическому случаю установлено, что известные в литературе приближённые алгоритмы переносятся на оба варианта обобщённой модели с сохранением тех же оценок точности. В частности, из полученного результата следует, что обе рассматриваемые в [11] задачи могут быть решены за полиномиальное время с точностью 3.

1. Формальные постановки задач

Перейдём к математическим формулировкам задач. Обозначим через V множество пунктов, в которых могут находиться клиенты, предприятия и склады, через F множество предприятий, через W множество складов и через C множество клиентов. Формально можно считать, что все эти множества являются подмножествами (возможно, пересекающимися) множества V. Далее, на множестве V задана симметрическая функция $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$, выражающая стоимость перемещения из пункта в пункт. Предполагается, что предприятия могут быть закрытыми и открытыми и клиенты обслуживаются только открытыми предприятиями; для каждого предприятия $i \in F$ известна стоимость его открытия $f_i \geqslant 0$. Для каждого клиента $j \in C$ определён спрос $r_j \geqslant 0$ (эту величину можно также рассматривать как число однотипных клиентов в пункте j). Кроме того, в первом варианте модели для каждого клиента $j \in C$ задано некоторое подмножество допустимых складов $W_j^c \subseteq W$, а во втором варианте для каждого предприятия $i \in F$ задано подмножество допустимых складов $W_i^f \subseteq W$. Первый вариант отражает ситуацию, когда все имеющиеся склады доступны для любого предприятия, но являются специализированными, т. е. содержат лишь ограниченный набор заменяемых модулей. Во втором варианте модели все склады являются универсальными, но каждому предприятию доступно только заранее определённое подмножество складов.

Заданы также верхняя граница $p \in \mathbb{Z}_+$ на число открываемых предприятий, т. е.

$$|X| \leqslant p, \tag{1}$$

и верхняя граница q_i на число обслуживаемых клиентов для каждого предприятия $i \in F$.

Допустимое решение представляет собой подмножество открытых предприятий $X \subseteq F$ и обслуживающую пару $\varphi(j) = (i(j), k(j))$ для каждого клиента $j \in V$, которая состоит из открытого предприятия $i(j) \in X$ и допустимого склада $k(j) \in W_j^c$ (первый вариант) или $k(j) \in W_i^f$ (второй вариант).

Стоимость обслуживания единицы спроса клиента $j \in C$ определим в обобщённом виде как

$$S(j) = \alpha\big(d(i(j), k(j)) + d(k(j), j\big) + \beta d(i(j), j),$$

где α и β — произвольные неотрицательные числа. Тогда случай $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ будет отвечать моделям с незамкнутыми маршрутами обслуживания, случай $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ — моделям с замкнутыми маршрутами обслуживания и случай $\alpha = 0$, $\beta = 1$ — классическим моделям размещения.

Мы рассматриваем два наиболее распространённых класса целевых функций, которые требуется минимизировать:

1) функции, выражающие суммарную стоимость открытия предприятий и обслуживания клиентов:

$$\sum_{i \in X} f_i + \sum_{j \in C} r_j S(j). \tag{2}$$

2) функции, выражающие максимальную стоимость обслуживания клиента

$$\max\{r_j S(j) \mid j \in V\}. \tag{3}$$

Легко заметить, что задачи с целевой функциями (2) при $p \geqslant |F|$ и $q_i \geqslant |C|$ являются прямыми обобщениями метрической задачи размещения предприятий с неограниченными объёмами производства; при произвольных q_i получаем обобщения метрических задач размещения предприятий с ограниченными объёмами производства; при $q_i \geqslant |C|$ для всех i и произвольном p — обобщения задачи размещения p-предприятий. Задачи с целевыми функциями (3), произвольном p и $q_i \geqslant |C|$ для всех i обобщают задачу о p-центре.

В классических постановках задач с целевой функцией вида (3) функция расстояний определяется как кратчайшее расстояние на сети и тем самым удовлетворяет неравенству треугольника. В задачах размещения с целевой функцией вида (2) функция расстояний может быть произвольной, но в таком случае эти задачи не поддаются приближённому решению с константными оценками точности, поскольку к ним сводится задача о покрытии множествами. Тем не менее для случая, когда функция расстояний d также задаётся кратчайшими расстояниями на сети (что эквивалентно тому, что она удовлетворяет неравенству треугольника), для многих задач с целевой функцией вида (2) за последние несколько лет такие алгоритмы удалось построить. В остальной части статьи исследуется аппроксимируемость рассматриваемых обобщений в предположении, что функция расстояний d на всем множестве V удовлетворяет неравенству треугольника.

2. Сводимость к метрическому случаю

Нетрудно понять, что рассматриваемые обобщения посредством априорного вычисления оптимального склада для каждой пары, состоящей из предприятия и клиента, и соответствующего переопределения функции расстояний легко сводятся к классическим задачам без требования о посещении промежуточных пунктов (складов). Однако такое сведéние не гарантирует, что возникающие в результате задачи будут метрическими, поскольку маршруты обслуживания в этих задачах, вообще говоря, не будут кратчайшими и потому новые функции расстояний, вообще говоря, не обязаны удовлетворять неравенству треугольника.

В этом разделе мы получим условия, при которых переопределённые таким образом функции расстояний удовлетворяют неравенству треугольника. Из полученного результата следует, что рассматриваемые задачи полиномиально сводятся к классическим метрическим задачам с сохранением оценок точности.

Используя обозначения предыдущего раздела, рассмотрим полный граф $G = (V, E)$, вершинами которого являются пункты из множества V (при этом C, W, F будут подмножествами вершин этого графа), а рёбрам приписаны длины, порождаемые метрикой d (т. е. длина ребра в графе G равна расстоянию между пунктами, являющимися его концевыми вершинами). Без ограничения общности можно считать, что множества C, W, F попарно не пересекаются (это достигается введением необходимого числа копий пунктов из V, находящихся друг от друга на нулевом расстоянии).

Заметим, что из этого определения сразу следует, что длина ребра в графе G равна длине кратчайшей цепи в этом графе. Построим полный двудольный граф H, долями которого являются множество клиентов C и множество предприятий F.

Рассмотрим более общий случай, когда как предприятиям, так и клиентам доступны не все склады, т. е. когда заданы семейства допустимых складов $(W_i^f)(i \in F)$ и $(W_i^c)(i \in C)$, причём $W_i^f \cap W_j^c \neq \varnothing$ для каждой пары $j \in C$ и $i \in F$, т. е. каждый клиент может быть обслужен каждым предприятием. Определим длину ребра $\rho(i,j)$ следующим образом:

$$\rho(i,j) = \alpha \min_{k \in W_i^f \cap W_j^c} \{d(i,k) + d(k,j)\} + \beta d(i,j). \tag{4}$$

Выясним, при каких условиях на семейства $(W_i^f)(j \in F)$ и $(W_j^c)(j \in C)$ функция ρ может быть продолжена до метрики на множестве $F \cup C$. Очевидно, что это возможно тогда и только тогда, когда для любых $i \in F$ и $j \in C$ величина $\rho(i,j)$ не превосходит суммарной длины $\rho(P)$ для любой цепи P в H, соединяющей i с j (расстояния между вершинами из одной и той же доли графа H можно доопределить равными кратчайшим расстояниям между ними, вычисленным относительно функции расстояний ρ).

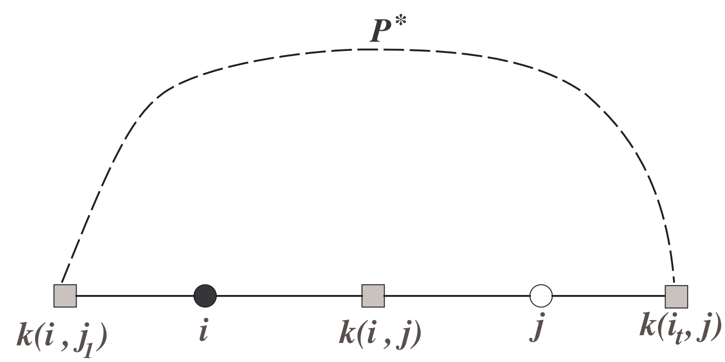

Рис.

Теорема. *Пусть d – метрика на множестве V и ρ — функция длин рёбер графа H, определённая соотношением* (4)*. Функция ρ может быть* *продолжена до метрики на полном графе с множеством вершин* $F \cup C$, *если семейства* $(W_i^f)(i \in F)$ *и* $(W_j^c)(j \in C)$ *удовлетворяют следующему условию*:

$$\text{для любых } i \in F,\ j \in C, \text{ либо } W_i^f \subseteq W_j^c, \text{ либо } W_i^f \supseteq W_j^c. \tag{5}$$

Доказательство. Согласно (4) при любых $i \in F$ и $j \in C$ имеем

$$\rho(i,j) = \alpha\rho_1(i,j) + \beta d(i,j), \tag{6}$$

где $\rho_1(i,j) = \min\limits_{k \in W_i^f \cap W_j^c} \{d(i,k) + d(k,j)\}$. Предположим, что условие (5) выполнено. Пусть $i \in F$ и $j \in C$. В силу симметричности множеств F и C без ограничения общности можно считать, что $W_i^f \supseteq W_j^c$. Пусть $i \in F$, $j \in C$, и пусть $P = (i, j_1, i_1 \ldots, j_t, i_t, j)$ — произвольная цепь между вершинами i и j в графе H $(t \geqslant 1)$. Покажем, что длина ребра (i,j) относительно ρ не превосходит суммарной длины цепи P относительно той же функции расстояний, т. е.

$$\rho(i,j) \leqslant \rho(P) = \rho(i,j_1) + \rho(i_1,j_1) + \ldots + \rho(i_t,j_t) + \rho(i_t,j). \tag{7}$$

Сначала докажем это неравенство для случая $\alpha = 1$ и $\beta = 0$, т. е. для ρ_1. Для каждой пары $i' \in F$, $j' \in C$ определим $k(j',i') \in W_{j'}^c$ следующим равенством:

$$\rho_1(i',j') = \min_{l \in W_{i'}^f \cap W_{j'}^c} \{d(i',l) + d(l,j')\} = d(i',k(i',j')) + d(k(i',j'),j'). \tag{8}$$

Теперь рассмотрим следующую цепь в графе G (см. рис.):

$$P^* = \big(k(i,j_1), j_1, k(i_1,j_1), i_1 \ldots, j_t, k(i_t,j_t), i_t, k(i_t,j)\big).$$

Согласно предположению имеем $k(i_t,j) \in W_j^c \subseteq W_i^f$. Отсюда и из определения $k(i,j)$ следует, что

$$d(i,k(i,j)) + d(j,k(i,j)) \leqslant d(i,k(i_t,j)) + d(j,k(i_t,j)). \tag{9}$$

Поскольку функция d удовлетворяет неравенству треугольника, справедливо неравенство

$$d(i,k(i_t,j)) \leqslant d(P^*) + d(i,k(i,j_1)),$$

что вместе с (9) приводит к требуемому неравенству:

$$\rho_1(i,j) = d(i,k(i,j)) + d(j,k(i,j)) \leqslant d(j,k(i_t,j)) + d(P^*) + d(i,k(i,j_1)) \\ = \rho_1(P).$$

Теперь рассмотрим случай произвольных α и β. Поскольку на множестве V функция расстояний d удовлетворяет неравенству треугольника, то на подмножестве $F \cup C \subseteq V$ она тем более будет обладать этим свойством. Поэтому $d(P) \geqslant d(i,j)$. Отсюда и из (6) следует, что

$$\rho(i,j) = \alpha\rho_1(i,j) + \beta d(i,j) \leqslant \alpha\rho_1(P) + \beta d(P) = \rho(P).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Следующий пример показывает, что условие (5) в теореме не может быть ослаблено. Пусть $F = \{i_1, i_2\}$, $C = \{j_1, j_2\}$, $W = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$, $W^f_{i_1} = \{k_1, k_2\}$, $W^c_{j_1} = \{k_1, k_3\}$, $W^f_{i_2} = W^c_{j_2} = W$. Положим $d(i_1, k_1) = d(j_1, k_3) = 4$, $d(i_1, k_2) = d(j_2, k_2) = d(j_2, k_4) = d(i_2, k_4) = d(i_2, k_3) = d(j_1, k_3) = 1$. Расстояния между остальными парами вершин в графе G определяются как кратчайшие расстояния в подграфе, образованном циклом $(i_1, k_1, j_1, k_3, i_2, k_4, j_2, k_2)$. Нетрудно видеть, что $\rho_1(i_1, j_1) = 8 > \rho_1(P) = 6$, где через P обозначена цепь (i_1, j_2, i_2, j_1).

Поскольку легко видеть, что условие (5) выполняется для обоих вариантов рассматриваемых задач, теорема обеспечивает полиномиальную сводимость с сохранением оценок точности и временно́й сложностью $O(|F||C||W|)$ к классическим *метрическим* частным случаям обоих вариантов задач с целевой функцией (2) и метрикой, являющейся продолжением метрики ρ на множество $F \cup C$ (которая определяется из решения задачи о кратчайших расстояниях между всеми парами вершин в графе G). Для задач с целевой функцией (3) мы получаем полиномиальное сведе́ние к другим, ранее исследованным задачам (в следующем разделе мы обсудим этот вопрос более подробно).

3. Приложения

В этом разделе мы рассмотрим несколько наиболее интересных приложений теоремы.

3.1. Минимаксные задачи

Рассмотрим задачу с целевой функцией (3), в которой p произвольно и $q_i \geqslant |C|$ для всех i. Эта задача является прямым обобщением (дискретной) задачи о p-центре. Легко видеть, что теорема обеспечивает сведе́ние обоих вариантов этой задачи к известной задаче о p поставщиках с сохранением оценок точности.

Задача о p поставщиках. Задан полный неориентированный двудольный граф H с долями C и F. Рёбрам графа H приписаны положительные длины, индуцированные некоторой метрикой l на множестве $C \cup F$. Каждой вершине $x \in C$ приписан неотрицательный вес $t(x)$. Требуется найти множество $X \subseteq F$, $|Z| = p$, минимизирующее величину

$$\max_{x \in C} \{t(x) \min_{y \in X} l(x, y)\}.$$

Полиномиальные алгоритмы для нахождения приближённых решений с оценками точности 3 для различных вариантов этой задачи можно найти в [4, 9]. Более того, в этих работах такие алгоритмы предлагаются даже для более общего случая, когда заданы стоимости размещения центров и верхняя граница на суммарную стоимость, так что мы получаем приближённые алгоритмы с оценками точности 3 и для таких обобщений обоих вариантов рассматриваемой модели.

3.2. Минисуммные задачи

Минисуммными мы называем задачи с целевой функцией вида (2). Для минисуммных задач теорема обеспечивает полиномиальное сведéние с сохранением оценок точности для обоих вариантов рассматриваемых задач к метрическим задачам, в которых клиенты обслуживаются предприятиями по кратчайшим маршрутам. Для многих частных случаев и модификаций последних задач известны полиномиальные приближённые алгоритмы с константными оценками точности. С использованием алгоритмов с наилучшими на данный момент оценками точности мы приходим к следующим результатам для наиболее интересных частных случаев обоих вариантов рассматриваемых задач.

1. В случае $p \geqslant |F|$ и $q_i \geqslant |C|$ для всех $i \in F$ получаем сведéние к метрической задаче размещения предприятий с неограниченными объёмами производства, что с использованием алгоритма из [10] даёт полиномиальный алгоритм с оценкой точности 1,52.

2. В случае произвольного p и $q_i \geqslant |C|$ для всех $i \in F$ получаем сведéние к метрической задаче размещения p-предприятий, что с использованием результата из [8] обеспечивает аппроксимируемость с оценкой точности 4.

3. В случае произвольного p, $q_i \geqslant |C|$ и $f_i = 0$ для всех $i \in F$ получаем сведéние к метрической задаче о p-медиане, что с использованием результата из [3] влечёт полиномиальную разрешимость с оценкой точности $3 + 2/p$.

4. В случае $p \geqslant |F|$ и $r_j = 1$ для всех $j \in C$ получаем сведéние к метрической задаче размещения предприятий с ограниченными объёмами производства, что с использованием результата из [12] даёт полиномиальный алгоритм с оценкой точности $5{,}83 + \varepsilon$. На самом деле, из результата [12] и теоремы вытекает, что полиномиальный алгоритм с такой оценкой точности существует для обоих вариантов задачи, в которой величины спроса r_j произвольны, но суммарный спрос одного клиента может удовлетворяться несколькими предприятиями при условии, что суммарный спрос, который обслуживает предприятие $i \in F$, не превышает q_i.

Приведенный список приложений в случае целевой функции вида (2) далеко не полный и не включает модификации рассматриваемых задач (см., например, [9, 5]), для которых теорема также применима.

Замечание 2. Из построенной сводимости не следует, что частный случай задачи на некотором специальном классе графов сводится к обычной метрической задаче на том же классе графов. Более того, в [11] показано, что в случае $\beta = 0$ первый вариант задачи NP-труден даже на цепи в случае целевой функции вида (3). На самом деле небольшая модификация соответствующего рассуждения в [11] доказывает, что при $\beta = 0$ первый вариант NP-труден на цепи и для целевой функции вида (2), причём это имеет место для двух случаев: при $p \geqslant |F|$, $q_i \geqslant |C|$ для всех $i \in F$ и при произвольном p, $q_i \geqslant |C|$ и $f_i = 0$ для всех $i \in F$. Известно, что соответствующие этим случаям классические задачи размещения полиномиально разрешимы не только на цепях, но даже на деревьях и более общих классах графов [1, 6, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гимади Э. Х.** Эффективный алгоритм решения задачи размещения с областями обслуживания, связными относительно ациклической сети // Экстремальные задачи исследования операций (Управляемые системы). Сб. научн. работ. Вып. 23. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1983. С. 12–23.
2. **Ageev A. A.** A criterion of polynomial time solvability for the network location problem // Integer programming and combinatorial optimization. Carnegie Mellon University: Campus Printing, 1992. P. 237–245.
3. **Arya V., Garg N., Khandekar R., Meyerson A., Munagala K., Pandit V.** Local search heuristics for k-median and facility location problems // SIAM J. Comput. 2004. V. 33, N 3. P. 544–562.
4. **Bhatia R., Guha S., Khuller S., Sussmann Y. J.** Facility location with dynamic distance function // J. Combinatorial Optimization. 1998. V. 2, N 3. P. 199–217.

5. **Charikar M., Khuller S., Mount D. M., Narasimhan G.** Algorithms for facility location problems with outliers // Proc. of the Twelfth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (Washington, DC, 2001). New York: ACM Press, 2001. P. 642–651.
6. **Cornuéjols G., Nemhauser G. L., Wolsey L. A.** The uncapacitated facility location problem // Discrete Location Theory. New York: Wiley, 1990. P. 119–171.
7. **Guha S., Meyerson A., Munagala K.** A constant factor approximation algorithm for the fault-tolerant facility location problem // J. Algorithms. 2003. V. 48, N 2. P. 429–440.
8. **Jain K., Mahdian M., Saberi A.** A new greedy approach for facility location problems // Proc. of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York: ACM Press, 2002. P. 731–740.
9. **Khuller S., Pless R., Sussmann Y. J.** Fault tolerant K-center problems // Theoret. Comput. Sci. 2000. V. 242, N 1–2. P. 237–245.
10. **Mahdian M., Ye Y., Zhang J.** Approximation algorithms for metric facility location problems // SIAM J. Comput. 2006. V. 36, N 2. P. 411–432.
11. **Tamir A., Halman N.** One-way and round-trip center location problems // Discrete Optim. 2005. V. 2, N 2. P. 168–184.
12. **Zhang J., Chen B., Ye Y.** A multiexchange local search algorithm for the capacitated facility location problem // Math. Oper. Res. 2005. V. 30, N 2. P. 389–403.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.
E-mail: ageev@math.nsc.ru

Статья поступила
7 декабря 2006 г.

Переработанный вариант —
14 мая 2007 г.