ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2007. Серия 1. Том 14, № 3. 13–30

УДК 519.172

# ПРЕДПИСАННАЯ 2-ДИСТАНЦИОННАЯ $(\Delta+1)$-РАСКРАСКА ПЛОСКИХ ГРАФОВ С ЗАДАННЫМ ОБХВАТОМ*)

*О. В. Бородин, А. О. Иванова, Т. К. Неустроева*

Определены достаточные условия (в терминах обхвата и максимальной степени), при выполнении которых предписанное 2-дистанционное хроматическое число планарного графа $G$ с максимальной степенью $\Delta$ равно $\Delta+1$.

## Введение

Ниже под графом всюду понимается обыкновенный граф без петель и кратных рёбер. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначаются множества вершин и рёбер графа $G$ соответственно. Раскраска $\varphi : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ графа $G$ называется 2-*дистанционной*, если любые две вершины, находящиеся друг от друга на расстоянии не более 2, окрашены в разные цвета. Наименьшее число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа $G$ называется 2-*дистанционным хроматическим числом* графа $G$ и обозначается через $\chi_2(G)$.

Если для каждой вершины $v$ графа $G$ задан свой список допустимых цветов $L(v) \subset C$, где $C$ — множество всех цветов, а $|L(v)| = k$, то говорят, что на множестве вершин $V(G)$ задано *предписание $L$ размера $k$*. Граф $G$ называется *предписанно 2-дистанционно $k$-раскрашиваемым*, если для любого множества $C$ и любого предписания $L$ размера $k$ существует 2-дистанционная раскраска $\varphi : V(G) \to C$ такая, что $\varphi(v) \in L(v)$ для любой вершины $v$ графа $G$. Наименьшее целое $k$ такое, что граф $G$ является предписанно 2-дистанционно $k$-раскрашиваемым, называется *предписанным 2-дистанционным хроматическим числом графа $G$* и обозначается через $\chi_2^l(G)$.

В [1, 2] были определены достаточные условия (в терминах обхвата и максимальной степени) 2-дистанционной $(\Delta+1)$-раскрашиваемости

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05–01–00816 и 06–01–00694).

плоских графов с максимальной степенью $\Delta$. В частности, был полностью решён вопрос о том, что для плоских графов $G$ сколь малых обхватов число $\chi_2(G)$ достигает своего наименьшего значения $\Delta+1$ лишь путём наложения ограничения на максимальную степень графа.

Следующая теорема обобщает результаты, полученные в [1, 2], на случай предписанной 2-дистанционной раскраски.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — планарный граф обхвата $g$ и с максимальной степенью $\Delta$. Тогда $\chi_2^l(G) = \Delta+1$ в каждом из следующих случаев*:
(i) $\Delta = 3$ *и* $g \geqslant 24$;
(ii) $\Delta = 4$ *и* $g \geqslant 15$;
(iii) $\Delta = 5$ *и* $g \geqslant 13$;
(iv) $\Delta = 6$ *и* $g \geqslant 12$;
(v) $\Delta \geqslant 7$ *и* $g \geqslant 11$;
(vi) $\Delta \geqslant 9$ *и* $g = 10$;
(vii) $\Delta \geqslant 16$ *и* $g = 9$;
(viii) $\Delta \geqslant 15$ *и* $g = 8$;
(ix) $\Delta \geqslant 30$ *и* $g = 7$.
*Существуют графы $G$ с $g(G) \leqslant 6$ такие, что $\chi_2^l(G) > \Delta(G)+1$ при произвольно большом $\Delta(G)$.*

## 1. Доказательство теоремы 1

Пусть граф $G'$ — контрпример к теореме 1, т. е. $\Delta(G') = \Delta \geqslant 3$, обхват $g(G')$ не меньше чем в соответствующем пункте теоремы 1, а $\chi_2^l(G') > \Delta+1$. Пусть, далее, $G$ — наименьший по числу рёбер граф со свойствами: $\Delta(G) \leqslant \Delta$, $g(G) = g \geqslant g(G')$ и $\chi_2^l(G) > \Delta+1$. Множество графов с этими свойствами непусто, так как, например, $G'$ всеми ими обладает. Доказательство теоремы 1 состоит в доказательстве несуществования графа $G$, что противоречит сделанному предположению о существовании графа $G'$.

Не нарушая общности, можно считать, что граф $G$ связен. Обозначим через $\delta$ его минимальную степень. Легко видеть, что $\delta \geqslant 2$.

Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ запишем в виде

$$((g-2)|E| - g|V|) + (2|E| - g|F|) = -2g,$$

где $F$ — множество граней графа $G$.

Отсюда следует, что

$$\sum_{v\in V}\left(\frac{g-2}{2}d(v) - g\right) + \sum_{f\in F}(r(f) - g) < 0, \tag{1}$$

где $d(v)$ — степень вершины $v$, а $r(f)$ — ранг грани $f$. *Заряд* $\mu(v)$ каждой вершины $v$ графа $G$ положим равным $\frac{g-2}{2}d(v)-g$, а *заряд* $\mu(f)$ каждой грани $f$ графа $G$ — равным $r(f)-g$. Заметим, что заряд 2-вершины при всех $g$ равен $-2$, а заряды вершин степени не менее 3 и всех граней неотрицательны.

Для доказательства несуществования графа $G$, во-первых, для каждого значения $\Delta$ нужно описать ряд структурных свойств графа $G$; во-вторых, опираясь на эти свойства, надо перераспределить заряды вершин и граней, не изменяя их суммы, так, чтобы их новые заряды стали неотрицательными (что будет противоречить (1)).

Условия на обхват и максимальную степень графа в каждом пункте теоремы 1 совпадают с аналогичными условиями для обычной 2-дистанционной раскраски в [1, 2]. Для того, чтобы выполнить первую часть доказательства теоремы, нужно показать сводимость соответствующих конфигураций из [1, 2] при условии, что цвета для вершин выбираются из предписания размера $\Delta+1$. Отметим, что доказательства сводимости некоторых конфигураций в предписанном случае будут отличаться от тех, что были применены для обычной 2-дистанционной раскраски. В особенности при $\Delta=3$ доказательство будет существенно отличаться от того, которое было в [1]. Предупреждаем читателя, что во всех пунктах, кроме $(ix)$, системы сводимых конфигураций будут в точности такими же, как в [1, 2] (при тех же значениях $\Delta$ и $g$). Система сводимых конфигураций в пункте $(ix)$ (при $g=7$) отличается от соответствующей системы в [2] незначительно, а точнее, в предписанном случае отсутствует одна из тех конфигураций, которые были при обычной 2-дистанционной раскраске.

Что же касается второй половины доказательства теоремы, то в случае $g>7$ мы опишем правила перераспределения зарядов, но не будем проверять неотрицательность новых зарядов вершин и граней. Это связано с тем, что для предписанного случая эта проверка будет такой же, как в [1, 2], т. е. нет необходимости её повторять (заинтересованный читатель может обратиться к [1, 2]). В случае $g=7$ мы опишем правила перераспределения зарядов вершин и граней и сделаем проверку неотрицательности новых зарядов, так как эти правила будут отличаться от правил, введённых в [2]. Но и здесь, для того чтобы не повторять имеющиеся рассуждения в [2], в некоторой части нашего доказательства мы просто сделаем ссылку на соответствующий раздел из [2].

Сделаем общее замечание по доказательству структурных свойств.

**Замечание** 1. В силу минимальности графа $G$ граф, полученный из

него удалением ребра, предписанно 2-дистанционно $(\Delta{+}1)$-раскрашиваем. Если концы этого ребра можно перекрасить в цвета из их списков, не встречающиеся на смежных вершинах и вершинах, находящихся от соответствующего конца на расстоянии 2, то и граф $G$ будет предписанно 2-дистанционно $(\Delta + 1)$-раскрашиваем.

Под $k$-*цепью* далее будем понимать цепь, состоящую в точности из $k$ вершин степени 2, а под $(k_1, \ldots, k_d)$-*вершиной* понимается $d$-вершина, инцидентная $d$ различным цепям, где $i$-я цепь $(1 \leqslant i \leqslant d)$ содержит не менее $k_i$ вершин степени 2.

## 2. Случай $g \geqslant 9$

Для всех $\Delta$ используется общее правило перераспределения зарядов.

$\mathbb{R}1$: Любая вершина степени не менее 3 отдаёт заряд $k$ каждой выходящей из неё $k$-цепи.

При некоторых $\Delta$ мы будем вводить дополнительные правила, причём в их номер будет входить $\Delta$. Например, правило R3 будет касаться случая $\Delta = 3$.

Пусть $\Delta = 3$. Тогда граф $G$ обладает следующими структурными свойствами.

**Лемма 1.** *Пусть* $\Delta = 3$. *Тогда в* $G$ *нет*:

(i) $k$-*цепей*, $k \geqslant 6$;

(ii) $(5, 4, 1)$-*вершин*;

(iii) $(5, 3, 2)$-*вершин*;

(iv) $(4, 4, 2)$-*вершин*;

(v) $(4, 3, 3)$-*вершин*.

Доказательство.

(i) Предположим, что имеется цепь $P = v_0v_1 \ldots v_7$, где $v_i$ — вершины степени 2 $(1 \leqslant i \leqslant 6)$. Рассмотрим предписанную 2-дистанционную $(\Delta{+}1)$-раскраску графа $G - v_2v_3$ (согласно замечанию 1 такая раскраска существует) и продолжим её на весь граф, предварительно обесцветив вершины $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$, которые мы будем называть *внутренними*. Здесь и далее для внутренней вершины $x$ обозначим через $L(x)$ множество допустимых цветов из списка $x$, остающихся в этом списке после удаления из него цветов окрашенных вершин, находящихся от $x$ на расстоянии не больше 2 (если таковые имеются). У вершин $v_2$ и $v_5$ имеются по два ограничения от $v_0$, $v_1$ и $v_6$, $v_7$ соответственно, а у вершин $v_3$ и $v_4$ имеются по одному ограничению от $v_1$ и $v_6$ соответственно. Тогда $|L(v_2)| \geqslant 2$, $|L(v_3)| \geqslant 3$, $|L(v_4)| \geqslant 3$, $|L(v_5)| \geqslant 2$ и можно считать, что красить нужно только цепь $v_2v_3v_4v_5$ со списками указанных мощностей. Оставим в

$L(v_2)$ ровно два цвета и покрасим вершину $v_3$ в цвет, отличный от этих цветов (это возможно, так как $|L(v_3)| \geqslant 3$). Далее красим вершину $v_5$ (на выбор цвета действует 1 ограничение), а затем — вершину $v_4$. Последней красим вершину $v_2$.

(ii) Пусть имеется цепь $u_5u_4u_3u_2u_1vw_1w_2w_3w_4$, где $v$ — $(5,4,1)$-вершина, а $u_i$ и $w_j$, $1 \leqslant i \leqslant 5$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, — вершины степени 2. Удалим ребро $vw_1$ и обесцветим внутренние вершины конфигурации: $u_4, u_3, u_2, u_1$, $v$, $w_1, w_2, w_3$. Тогда с учётом ограничений, действующих от окрашенных *граничных* вершин конфигурации, внутренние вершины имеют соответственно списки следующих мощностей: $|L(u_4)| \geqslant 2$, $|L(u_3)| \geqslant 3$, $|L(u_2)| = 4$, $|L(u_1)| \geqslant 3$, $|L(v)| \geqslant 2$, $|L(w_1)| \geqslant 3$, $|L(w_2)| \geqslant 3$ и $|L(w_3)| \geqslant 2$. Положим $|L(v)| = 2$.

Покрасим $w_1$ в цвет $\gamma$, отличный от цветов из $L(v)$. Здесь и далее через $L'(x)$ обозначим, где $x$ — внутренняя вершина, множество цветов из $L(x)$, допустимых на $x$ после первого окрашивания внутренних вершин. Тогда $|L'(u_4)| \geqslant 2$, $|L'(u_3)| \geqslant 3$, $|L'(u_2)| = 4$, $|L'(u_1)| \geqslant 2$, $|L'(v)| = 2$, $|L'(w_2)| \geqslant 2$, $|L'(w_3)| \geqslant 1$.

Предположим, что вершины $w_2, w_3$ можно покрасить при любом выборе цвета на $v$. Тогда, как и в случае 6-цепи, оставив в $L'(u_4)$ ровно 2 цвета, покрасим вершину $u_3$ в цвет, отсутствующий в $L'(u_4)$, потом красим последовательно $u_1, v, u_2$ и $u_4$. Последними красим $w_2, w_3$.

Рассмотрим $L'(w_2)$ и $L'(w_3)$. Если после окрашивания вершины $w_1$ $|L'(w_2)| \geqslant 3$ или $|L'(w_3)| \geqslant 2$ (т.е. цвета $\gamma$ нет либо в $L'(w_2)$, либо в $L'(w_3)$), то вершины $w_2, w_3$ можно покрасить в последнюю очередь. Тогда $\gamma \in L(w_2) \cap L(w_3)$, т.е. $L(w_3) = \{\alpha, \gamma\}$ и $L(w_2) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Значит, раскраска вершин $w_2$ и $w_3$ однозначная и на $v$ остаётся только один цвет. Поэтому снимаем цвет $\gamma$ с вершины $w_1$ и красим цепь $u_4u_3u_2u_1vw_1w_2w_3$ заново.

Если $\alpha \in L(v)$, то сначала красим $v$ и $w_3$ в $\alpha$, затем вершины $u_1, u_2, u_3$, $u_4$ красим аналогично случаю (i), так как $|L'(u_4)| \geqslant 2$, $|L'(u_3)| \geqslant 3$, $|L'(u_2)| \geqslant 3$, $|L'(u_1)| \geqslant 2$. В последнюю очередь красим вершины $w_1$ и $w_2$ (это возможно, так как цвета на $v$ и $w_3$ одинаковы). Если $\alpha \notin L(v)$, то красим $v$ в цвет, отличный от $\beta$, затем красим вершины $u_1, u_2, u_3, u_4$ как описано выше. Потом красим $w_1$, $w_3$ и затем $w_2$.

(iii) Пусть $u_5, u_4, u_3, u_2, u_1$, $w_1, w_2, w_3$ и $z_1, z_2$ — 2-вершины цепей, исходящих из $(5,3,2)$-вершины $v$. Обесцветим внутренние вершины конфигурации. Учитывая, что вершины $u_5$, $w_3$ и $z_2$ остались окрашенными, для внутренних вершин имеем $|L(u_4)| \geqslant 2$, $|L(u_3)| \geqslant 3$, $|L(u_2)| = 4$, $|L(u_1)| = 4$, $|L(v)| \geqslant 3$, $|L(w_1)| \geqslant 3$, $|L(w_2)| \geqslant 2$ и $|L(z_1)| \geqslant 2$. Как и в слу-

чае с 6-цепью, оставим в $L(u_4)$ и $L(w_2)$ ровно по два цвета и покрасим $u_3$ в цвет $\beta$, а $w_1$ в цвет $\gamma$, отсутствующие в $L(u_4)$ и $L(w_2)$ соответственно. Тогда $|L'(u_1)| \geqslant 2$, $|L'(v)| \geqslant 2$, $|L'(z_1)| \geqslant 1$. Заметим, что если $|L'(v)| \geqslant 3$ или $|L'(u_1)| \geqslant 3$, то раскраску можно продолжить. Значит, $|L'(u_1)| = 2$ и $|L'(v)| = 2$, т.е. $\beta \neq \gamma$ и цвет $\gamma$ есть в $L(v)$ и $L(u_1)$, а цвет $\beta$ — в $L(u_1)$. Пусть теперь $\alpha \in L'(z_1)$. Тогда $\alpha$ должен содержаться в $L'(v)$ и $L'(u_1)$, причём при окрашивании $z_1$ в $\alpha$ в списках $L'(v)$ и $L'(u_1)$ должен оставаться один и тот же цвет, скажем $\delta$. Итак, $L(v) = \{\alpha, \gamma, \delta\}$ и $L(u_1) = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Если бы в $L(z_1)$ был цвет, не принадлежащий множеству $\{\alpha, \gamma, \delta\}$, то покрасив в него $z_1$, мы затем покрасили бы $v$ и $u_1$. Следовательно, в $L(z_1)$ кроме $\alpha$, содержится один из цветов $\delta$, $\gamma$. Кроме того, если бы в $L(w_1)$ имелся цвет, отличный от $\alpha, \gamma, \delta$, то, перекрасив в него $w_1$, мы смогли бы продолжить раскраску, начав с $w_2$, так как после этого списки $L(z_1), L(v)$ имели бы мощности не меньше двух, а $L(u_1)$ — не меньше трёх. Итак, мы можем считать, что $L(w_1) = \{\alpha, \gamma, \delta\}$.

Если имеет место такая ситуация, то внутренние вершины красим заново следующим образом. Сначала покрасим $u_1$ в $\beta$ (что необходимо, так как иначе на четыре вершины $w_1, v, z_1, u_1$ приходилось бы только три цвета $\alpha, \gamma, \delta$). Тогда $|L'(w_2)| = 2$, $|L'(w_1)| \geqslant 3$, $|L'(v)| \geqslant 3$, $L(z_1) \geqslant 2$ и $|L'(u_2)| \geqslant 3$, $|L'(u_3)| \geqslant 2$, $|L'(u_4)| = 2$. Независимо друг от друга цепи $z_1vw_1w_2$ и $u_4u_3u_2$ можно раскрасить, поскольку цепь $u_4u_3u_2$ можно покрасить в порядке следования вершин, а для $z_1vw_1w_2$ имеем ту же ситуацию, что и в случае (i). Конфликт может возникнуть лишь между вершинами $u_2$ и $v$, но ввиду того, что $L(v) = L(w_1)$, цвета на вершинах $v$ и $w_1$ можно поменять местами.

(iv) Пусть $v$ — $(4,4,2)$-вершина, а $u_1, u_2, u_3$, $w_1, w_2, w_3$, $z_1$ — внутренние вершины рассматриваемой конфигурации.

*Случай* 1. $L(v) \neq L(u_2)$.

Покрасим $v$ в цвет $\gamma$, отсутствующий в $L(u_2)$. Тогда $|L'(u_1)| \geqslant 3$, $|L'(u_3)| \geqslant 2$, $|L'(u_2)| \geqslant 3$, а значит вершины $u_1, u_3, u_2$ можно раскрасить в последнюю очередь в указанном порядке.

Лишь в случае $|L'(w_3)| = 2, |L'(w_2)| = 2, |L'(w_1)| = 3$ и $|L'(z_1)| = 1$ может оказаться, что раскраску нельзя продолжить. Это означает, что цвет $\gamma$ присутствует в каждом из списков $L(w_2), L(w_1)$ и $L(z_1)$, а оставшийся в $L(z_1)$ цвет $\beta \neq \gamma$ имеется также и в $L(w_1)$. Кроме того, единственный случай, в котором при раскраске вершины $v$ в цвет $\gamma$ остальные вершины нельзя докрасить, — $L(w_3) = \{\alpha, \delta\}$, $L(w_2) = \{\alpha, \gamma, \delta\}$, $L(w_1) = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $L(z_1) = \{\beta, \gamma\}$ и $\gamma \in L(v)$. Снимаем цвет $\gamma$ с вершины $v$ и внутренние вершины красим следующим образом. Сначала

покрасим $w_2$ и $z_1$ в $\gamma$. Тогда $w_3$ и $w_1$ можем покрасить последними, а вершины $v, u_1, u_2, u_3$ имеют списки мощностей $2, 3, 3, 2$ соответственно. Поэтому их можно раскрасить, как в случае (i).

Учитывая симметрию конфигурации, остаётся рассмотреть

*Случай 2.* $L(w_2) = L(v) = L(u_2)$.

Пусть $L(w_2) = L(v) = L(u_2) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Сначала покрасим $w_1$ в цвет $\delta \notin \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Тогда $w_2$ и $w_3$ можно покрасить последними. Теперь покрасим $z_1$ в $\varepsilon$. Если $\varepsilon \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$, то и $u_2$ красим в $\varepsilon$, а затем докрашиваем $u_3, u_1$ и $v$ в указанном порядке. В противном случае красим вершины в порядке $u_1, u_3, u_2$ и $v$ ($\delta \notin L(v)$).

(v) Пусть $v$ — $(4,3,3)$-вершина, а $u_1, u_2, u_3$, $w_1, w_2$, $z_1, z_2$ — внутренние вершины данной конфигурации, причём $|L(v)| = 4$, $|L(u_1)| = 4$, $|L(u_2)|\geqslant 3$, $|L(u_3)| \geqslant 2$, $|L(w_1)| \geqslant 3$, $|L(w_2)| \geqslant 2$, $|L(z_1)| \geqslant 3$, $|L(z_2)| \geqslant 2$.

Покрасим вершину $v$ в цвет $\gamma$, отсутствующий в $L(u_2)$ (оставляем на $u_2$ ровно три цвета). Тогда вершины $u_1, u_3, u_2$ можно покрасить в последнюю очередь в указанном порядке, а $|L'(w_2)| \geqslant 1$, $|L'(w_1)| \geqslant 2$, $|L'(z_1)| \geqslant 2$, $|L'(z_2)| \geqslant 1$. Если мощность списка хотя бы одной из вершин больше возможного минимума, то раскраску можно продолжить на все внутренние вершины. Поэтому будем считать, что $|L'(w_2)| = 1$, $|L'(w_1)| = 2$, $|L'(z_1)| = 2$, $|L'(z_2)| = 1$. Лишь в случае, когда $L(w_2) = \{\alpha, \gamma\}$, $L(w_1) = \{\alpha, \gamma, \beta\}$, $L(z_1) = \{\beta, \gamma, \delta\}$, $L(z_2) = \{\delta, \gamma\}$, раскраску нельзя продолжить. В этой ситуации поступаем иначе.

Если в $L(v)$ есть цвет, отличный от $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, то красим в него $v$. Тогда $L'(w_2) = \{\alpha, \gamma\}$, $L'(w_1) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $L'(z_2) = \{\delta, \gamma\}$, $L'(z_1) = \{\beta, \gamma, \delta\}$. Поэтому вершины $w_1, z_1, w_2, z_2$ можно покрасить в последнюю очередь в указанном порядке. Начнём красить с $u_3$, так как $|L(u_3)| \geqslant 2$, затем $u_2$ и $u_1$ ( $|L'(u_2)| \geqslant 2$, $|L'(u_1)| \geqslant 3$).

Если $L(v) = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, то покрасим $v$ в $\beta$. Тогда $L'(w_2) = \{\alpha, \gamma\}$, $L'(z_2) = \{\gamma, \delta\}$, $L'(w_1) = \{\alpha, \gamma\}$, $L'(z_1) = \{\gamma, \delta\}$ и $w_2$, $z_2$ красим в последнюю очередь. Сначала красим вершины $u_3$, $u_2$ и $u_1$ в порядке следования, а затем $w_1$ и $z_1$. Последнее всегда можно будет сделать, поскольку $L'(w_1)$ и $L'(z_1)$ имеют только один общий цвет $\gamma$, а значит после окрашивания вершины $u_1$ либо в $L'(w_1)$ и $L'(z_1)$ останется ровно по одному цвету, причём разных, либо по крайней мере у одной вершины её список не изменится. Лемма 1 доказана.

Что касается (5,5,0)-вершины $v$, то мы не можем исключить её из $G$, так как существует частичная 2-дистанционная раскраска $\varphi$ графа $G$, которую нельзя продолжить на $v$. Действительно, пусть $v$ смежна с 3-вершиной $z_1$, а $x_1 \dots x_5 z_2$ и $y_1 \dots y_5 z_3$, где $d(z_1) = d(z_2) = d(z_3) = 3$, —

цепи, выходящие из $v$. Пусть $\varphi(v) = \varphi(x_5) = \varphi(y_5) = 1, \varphi(z_2) = \varphi(z_3) = 2$, а $\varphi(z_1) = 3$. Если $L(x_i) = L(y_i)$, где $2 \leqslant i \leqslant 4$, то без ограничения общности пусть $\varphi(x_1) = 2$. Тогда для раскраски вершин $x_2$, $x_3$, $x_4$ из их списков может остаться только по два цвета, причём одних и тех же — 3, 4.

Однако имеет место более слабое структурное свойство.

**Лемма 2.** *В графе $G$ нет смежных* $(5, 5, 0)$*- и* $(5, 4, 0)$*-вершин.*

Доказательство. Пусть $x_3x_2x_1xzyy_1y_2y_3$ и $u_3u_2u_1uvww_1w_2$ — цепи из внутренних вершин рассматриваемой конфигурации, где $z$ и $v$ — смежные $(5, 5, 0)$- и $(5, 4, 0)$-вершины соответственно.

Мощности списков вершин $|L(x_3)| \geqslant 2$, $|L(x_2)| \geqslant 3$, $|L(x_1)| = 4$ и $|L(x)| = 4$; оставим в этих списках ровно по $2, 3, 4, 4$ цвета. Аналогично поступим со списками вершин других цепей, исходящих из $z$ и $v$.

Покрасим вершину $x_2$ в цвет, отсутствующий в $L(x_3)$. Тогда в последнюю очередь можно красить $x_1$, а затем $x_3$. Аналогично раскрашиваем вершины $y_2$, $u_2$ и $w_1$ в цвета, отсутствующие в списках вершин $L(y_3)$, $L(u_3)$ и $L(w_2)$ соответственно. Теперь на вершинах $u, v, w, x, y$ имеем по три цвета, а на $z$ — четыре цвета. Покрасим $z$ в цвет $\gamma$, отсутствующий в $L'(x)$. Тогда $x$ и $y$ можно покрасить последними, так как в их списках соответственно осталось три и два цвета. А вершины $u, v, w$ имеют в своих списках по два цвета. Раскраску нельзя продолжить лишь в случае, когда после окрашивания вершин $u_2$, $w_1$ в списках вершин $u, v, w$ остаются одни и те же три цвета $\alpha, \beta, \gamma$. В этом случае перекрасим $z$ в цвет, отличный от $\alpha, \beta, \gamma$. Теперь сначала красим $x$ и $y$, поскольку для них может остаться в точности по два цвета, а потом красим $u, v$ и $w$. Затем докрашиваем остальные вершины в таком порядке: $x_1, y_1, u_1, w_2, y_3, x_3, u_3$. Лемма 2 доказана.

**Замечание** 2. Описанные в данном разделе структурные свойства минимального контрпримера $G$ остались такими же как в [1].

В дополнение к общему правилу $\mathbb{R}1$ в случае $\Delta(G) = 3$ используется следующее правило.

$\mathbb{R}3$: Каждая (5,5,0)-вершина получает заряд 1 от смежной 3-вершины.

Ввиду замечания 2 проверка неотрицательности новых зарядов всех вершин, которая была в [1] (раздел 2.1), подходит и для предписанного случая.

Пусть $\Delta \geqslant 4$.

Вершину $v$ будем называть *средней*, если $d(v) < \Delta$, а $\mu(v) \geqslant 2d(v)$, и *младшей*, если $2 < d(v) < \Delta$ и $v$ не является средней. Для удобства чи-

тателей приведём таблицу зарядов вершин, где двойная черта отделяет младшие вершины от средних, а заряд $\Delta$-вершины выделен полужирным шрифтом (см. таблицу 1).

Таблица 1

| $g\backslash d$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ... | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | -2 | $\frac{9}{2}$ | **11** | | | | | | | |
| 13 | -2 | $\frac{7}{2}$ | 9 | $\mathbf{\frac{29}{2}}$ | | | | | | |
| 12 | -2 | 3 | 8 | 13 | **18** | | | | | |
| 11 | -2 | $\frac{5}{2}$ | 7 | $\frac{23}{2}$ | 16 | $\mathbf{\frac{41}{2}}$ | | | | |
| 10 | -2 | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | **26** | | |
| 9 | -2 | $\frac{3}{2}$ | 5 | $\frac{17}{2}$ | 12 | $\frac{31}{2}$ | 19 | $\frac{45}{2}$ | ... | **47** |

Следующее правило перераспределения зарядов будет действовать для всех $\Delta \geqslant 5$.

$\mathbb{R}2$: Любая средняя и $\Delta$-вершина отдаёт заряд 1 другому концу каждой инцидентной ей 1-цепи, и заряд 2 — концу 0-цепи.

Дополнительные правила (для $\Delta = 4$ и $\Delta \geqslant 16$) следующие.

$\mathbb{R}4$: Если (2,2,1)- или (2,2,2)-вершина $v$ соединена 2-цепью с 4-вершиной $w$, то $v$ получает заряд $\frac{1}{2}$ от $w$.

Среднюю вершину $v$ назовём *старшей*, если $\mu(v) \geqslant \frac{5}{2}d(v)$.

$\mathbb{R}16$: Если (2,2,0)-вершина $v$ смежна со старшей или $\Delta$-вершиной $w$, то $v$ получает от $w$ заряд $\frac{1}{2}$ в дополнение к заряду 2, полученному по общему правилу R2 (т. е. всего $v$ получает от $w$ заряд $\frac{5}{2}$ ).

Заряд вершины $v$, оставшийся у $v$ после применения правил, обозначим через $\mu^*(v)$ .

При всех $\Delta$ верно следующее структурное свойство графа $G$.

**Лемма 3.** *В $G$ нет $k$-цепей, $k \geqslant 3$, ограниченных хотя бы с одной стороны вершиной степени меньше $\Delta$.*

Доказательство. Пусть в $G$ имеется 3-цепь $vv_1v_2v_3w$, где $d(v) < \Delta$ и $d(v_i) = 2$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$. Удалим ребро $v_1v_2$ и обесцветим вершины $v_1$, $v_2$. Вершина $v_1$ имеет не более $\Delta$ ограничений на выбор цвета. Так как $|L(v_1)| = \Delta + 1$, то в $L(v_1)$ найдётся хотя бы один свободный цвет, в который мы и покрасим $v_1$. Затем красим вершину $v_2$, у которой имеется не более четырёх ограничений. На рис. 1 удалённое ребро перечеркнуто, символы $N_i$ определяют очередность раскраски. Лемма 3 доказана.

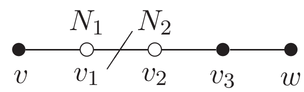


*Рис.* 1

**Лемма** $3'$**.** *В* $G$ *нет* $k$*-цепей,* $k \geqslant 4$.

**Замечание** 3. Доказательство леммы 3 повторяет рассуждения, которые приводились для данного структурного свойства графа $G$ в случае обычной 2-дистанционной раскраски (см. [1, 2]), где все вершины графа $G$ имеют одинаковый список допустимых цветов $L = \{1, 2, \ldots, \Delta+1\}$. Таким образом, если доказательство структурного свойства минимального контрпримера в [1, 2] состояло в простой проверке того, что после снятия цвета с некоторых вершин и дальнейшем окрашивании этих вершин, на выбор цвета для очередной вершины $v$ имеется не более $\Delta$ ограничений (от уже окрашенных вершин, находящихся на расстоянии не более 2 от $v$), то оно будет верным и для предписанного случая. Далее эти свойства будут даны без доказательств.

При всех $\Delta$ верно следующее структурное свойство графа $G$.

**Лемма 4.** *В* $G$ *нет* $(3, 3, \ldots, 3)$*-вершины степени* $\Delta$.

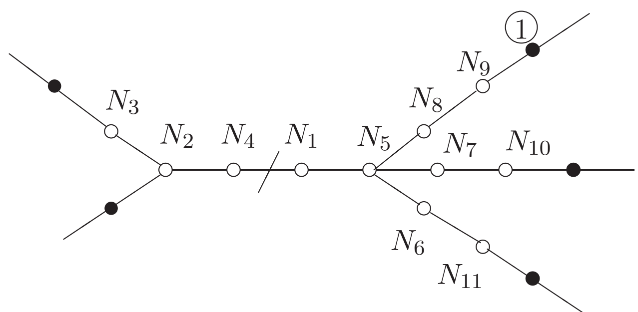


*Рис.* 2

При $\Delta = 4$ справедлива

**Лемма 5.** *В* $G$ *нет* $(3, 3, 3, 2)$*-вершины и* $(2, 2, 1)$*-вершины, имеющих общую 2-цепь.*

Доказательство. Пусть $v$ — $(3, 3, 3, 2)$-вершина, имеющая общую 2-цепь $P$ с $(2, 2, 1)$-вершиной $w$, и $w_1$ — вершина, смежная с $w$ и инцидентная $P$. Вершины, смежные по циклу с $v$, обозначим через $v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, где $v_1$ инцидентна $P$, а вершины, инцидентные 3-цепи с $v_i$ и находящиеся от $v$ на расстоянии 3, — через $u_i$ $(2 \leqslant i \leqslant 4)$. Удалим ребро $v_1w_1$ и обесцветим $w$ и смежную с ней вершину, инцидентную второй 2-цепи (см. рис. 2), а также $v$ со всеми вершинами, находящимися от $v$ на расстоянии не более 2.

Пусть $\varphi(u_2) = 1$. Если $1 \notin L(v_2)$ (т.е. $|L(v_2)| = 5$), то красим $v_1$ в произвольный цвет, а затем все остальные вершины в порядке, указанном на рис. 2; при этом у вершины $v_2$, которая красится последней среди всех вершин, смежных с $v$, будет четыре ограничения на выбор цвета. Если же $1 \in L(v_2)$, то $|L(v_2)| = 4$. Поскольку $|L(v_1)| = 5$, для $v_1$ выбираем цвет, которого нет в $L(v_2)$, и красим остальные вершины в том же порядке, что и выше. Лемма 5 доказана.

При $\Delta \geqslant 16$ для графа $G$ верно следующее структурное свойство.

**Лемма 6.** *В $G$ нет $(3,\dots,3,0)$-вершины $v$ степени $\Delta$, смежной с $(2,2,0)$-вершиной.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 5 (см. рис. 3).

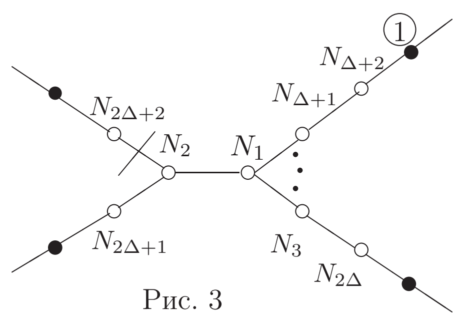


Рис. 3

При проверке того, что $\mu^* \geqslant 0$ для $\Delta$- и средних вершин, мы используем леммы 3–6 (см. раздел 2.2.1 в [1]). Для проверки неотрицательности новых зарядов младших вершин в случае $\Delta = 4$ нам нужно доказать следующее структурное свойство (см. раздел 2.2.2 в [1]).

**Лемма 7.**

(i) *Если в графе $G$ есть $(2,2,2)$-вершина $v$, то все 2-цепи, выходящие из $v$, заканчиваются 4-вершинами.*

(ii) *Если в графе $G$ есть $(2,2,1)$-вершина $v$, то хотя бы одна 2-цепь, выходящая из $v$, заканчивается 4-вершиной.*

Доказательство. (i) Пусть существуют цепи $vw_ix_iy_i$, где $d(w_i) = d(x_i) = 2$ при $1 \leqslant i \leqslant 3$ и $d(y_1) = 3$, $d(y_2) \geqslant 3$, $d(y_3) \geqslant 3$, а $\varphi$ — предписанная 2-дистанционная $(\Delta+1)$-раскраска графа $G - vw_1$. Обесцветим $v$, все $w_i$ и $x_1$. Тогда $|L(x_1)| = 2$, $|L(v)| = |L(w_2)| = |L(w_3)| = 3$, $|L(w_1)| = 4$. Красим $v$ в цвет, не принадлежащий $L(X_1)$, затем красим $w_2$, $w_3$, $w_1$, $x_1$.

(ii) Пусть 2-цепи $P_1$ и $P_2$, выходящие из $v$, заканчиваются 3-вершинами $y_1$ и $y_2$ соответственно, а $y_3$ — вершина, инцидентная 1-цепи $P_3$ и находящаяся на расстоянии 2 от $v$. Обозначим 2-вершину цепи $P_i$, смежную с $v$, через $w_i$ ($1 \leqslant i \leqslant 3$), а через $x_i$ вершину, находящуюся на

расстоянии 2 от $v$ ($1 \leqslant i \leqslant 2$). Удалим ребро $vw_1$ и обесцветим $v$, $x_1$, $w_1$, $x_2$, $w_2$. Вершина $x_1$ имеет три ограничения на выбор цвета.

Оставим в списке $x_1$ ровно два цвета. Сначала красим вершину $v$ в цвет, отсутствующий на $x_1$, затем красим вершины $x_2$, $w_2$, $w_1$, $x_1$. Лемма 7 доказана.

Для проверки неотрицательности новых зарядов младших вершин при $\Delta \geqslant 5$ в [1] нам понадобились следующие структурные свойства минимального контрпримера, которые доказываются в точности как в [1].

При $\Delta \geqslant 5$ в $G$ нет вершин типа $(2, 1, 1)$ и $(2, 2, 0)$-вершины, смежной с вершиной степени не больше 3.

При $\Delta \geqslant 7$ в $G$ нет $(1, 1, 1)$-вершины, соединенной хотя бы по одной 1-цепи с вершиной степени не больше 5, и нет $(2, 1, 0)$-вершины, смежной с вершиной степени не больше 4, и $(2, 2, 1, 1)$-вершины.

При $\Delta \geqslant 16$ в графе $G$ нет:

— $(2, 2, 0)$-вершины, смежной с вершиной степени не больше 8;

— $(2, 1, 0)$-вершины, смежной с вершиной степени не больше 5;

— $(2, 0, 0)$-вершины, смежной с двумя вершинами степени не больше 5;

— $(1, 1, 0)$-вершины, смежной с вершиной степени не больше 5 и соединённой по 1-цепи с вершиной степени не больше 5;

— $(2, 2, 2, 0)$-вершины, смежной с вершиной степени не больше 5;

— в $G$ нет $(2, 2, 2, 2, 1)$-вершины.

## 3. Случай $g \leqslant 8$

При любом $\Delta \geqslant 15$ справедливы лемма 3 и следующее структурное свойство графа $G$.

**Лемма 8.** *В $G$ нет двух вершин, соединённых двумя 3-цепями.*

Доказательство. Пусть $u$ и $v$ — вершины в графе $G$, соединённые двумя 3-цепями $ux_1x_2x_3v$ и $uy_1y_2y_3v$, где $d(x_i) = d(y_i) = 2$ при $1 \leqslant i \leqslant 3$, а $d(u) = d(v) = \Delta$. Граф $G - x_1x_2$ является предписанно 2-дистанционно $(\Delta + 1)$-раскрашиваемым. Обесцветим все 2-вершины на этих 3-цепях, т. е. все $x_i$ и $y_i$. Каждая из вершин $x_1$, $x_3$, $y_1$ и $y_3$ имеет по $\Delta - 1$ ограничений на выбор цвета. Следовательно, в списках этих вершин остаётся по крайней мере по два свободных цвета. Задачу 2-дистанционной раскраски этих четырёх вершин с предписанием из двух цветов можно заменить задачей предписанной 2-раскраски (обычной, не 2-дистанционной) цикла длины четыре на этих вершинах. При любом предписании такой

цикл чётной длины 2-раскрашиваем. Осталось покрасить $x_2$ и $y_2$, которые имеют по четыре ограничения. Лемма 8 доказана.

Пусть $g = 8$. Тогда вершину $v$ будем называть *средней*, если $d(v) < \Delta$, а $\mu(v) \geqslant 2d(v)$, и *младшей*, если $0 < \mu(v) < 2d$.

Правила перераспределения зарядов следующие.

$\mathbb{R}1$: Любая вершина $v$ с $d(v) \geqslant 3$ отдаёт заряд $k$ каждой $k$-цепи, из неё исходящей.

Правило R1 дополняется следующим.

$\mathbb{R}1'$: Любая $\Delta$-вершина отдаёт заряд $\frac{1}{2}$ вершине типа (2,2,0), если они соединены 2-цепью.

$\mathbb{R}2$: Любая средняя и $\Delta$-вершина $v$ отдаёт

(a) заряд 1 другому концу $u$ каждой инцидентной ей 1-цепи, если $u$ — младшая вершина,

(b) заряд 2 смежной младшей вершине $w$, за исключением случая, когда $w$ смежна с двумя $\Delta$-вершинами, и получает от них по заряду $\frac{3}{2}$ вместо заряда 2.

Две цепи с общим концом, лежащие на границе некоторой грани, будем называть *соседними*.

$\mathbb{R}3$: $\Delta$-вершина, инцидентная двум соседним 3-цепям, получает заряд 1 от грани $f$, инцидентной этим цепям.

Пусть (2,2,0)-вершина $u$ лежит на границе грани $f$ вместе со своими 2-цепями, а $v$ — другой конец одной из этих цепей, тогда $v$ и $f$ будем называть *особыми* (см. рис. 4).

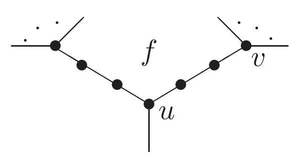


*Рис.* 4

$\mathbb{R}4$: Особая $\Delta$-вершина получает от инцидентной ей особой грани $f$ заряд 1, если $r(f) \geqslant 10$, и заряд $\frac{1}{2}$, если $r(f) = 9$.

Заряды вершины $v$ и грани $f$, оставшиеся у них после применения правил, обозначим через $\mu^*(v)$ и $\mu^*(f)$ соответственно.

Для проверки неотрицательности новых зарядов $\mu^*(v)$ в [2] (разделы 2.1.2 — 2.1.3) нам понадобилось ещё несколько свойств графа $G$ (проверку $\mu^*(f) \geqslant 0$ см. в разделе 2.1.1 [2]).

В графе $G$ нет:

— 2-цепи, соединяющей (2,2,0)-вершину с вершиной степени меньше чем $\Delta$;

— младшей вершины типа $(2, 1, \ldots, 1)$;

— младшей вершины типа $(2, \ldots, 2, 1, 0)$, смежной с младшей вершиной;

— младшей вершины типа $(1, \ldots, 1)$, соединённой по 1-цепи с другой младшей вершиной;

— $(2, 0, 0)$-вершины, смежной с двумя младшими вершинами;

— $(1, 1, 0)$-вершины, смежной с младшей вершиной и соединённой по 1-цепи с младшей вершиной.

Пусть теперь $g = 7$.

В случае обычной 2-дистанционной раскраски (см. [2]) при $g = 7$ граф $G$ обладал свойством: в $G$ нет двух вершин, соединённых 3-цепью и 2-цепью. Но в предписанном случае данная конфигурация не является сводимой. Действительно, представим, что в доказательстве леммы 8 вершины $y_3$ нет. Граф $G - x_1x_2$ является предписанно 2-дистанционно $(\Delta+1)$-раскрашиваемым. Обесцветим вершины $x_1$, $x_2$, $x_3$. В этом случае каждая из вершин $x_1$ и $x_3$ будет иметь по $\Delta$ ограничений на выбор цвета. Ясно, что тогда можно подобрать такие списки $L(x_1)$, $L(x_3)$, $L(y_1)$, $L(y_2)$ с учетом цветов на вершинах $u$, $v$ и смежных с ними вершинах, что для окрашивания вершин $x_1$ и $x_3$ остаётся один и тот же цвет, и мы не сможем поменять цвета, например, вершин $x_1$ и $y_1$, как это было при обычной раскраске. В качестве примера можно привести следующий случай: $L(x_1) = \{1, 3, 4, \ldots, \Delta-1, \Delta, \Delta+1, \Delta+3\}$, $L(x_2) = \{2, 3, \ldots, \Delta, \Delta+2, \Delta+3\}$, $L(y_1) = \{1, 2, \ldots, \Delta, \Delta+1\}$, $L(y_2) = \{1, 2, \ldots, \Delta, \Delta+2\}$, а цвета вершин $u$, $v$ и на смежных с ними вершинах такие, как на рис. 5.

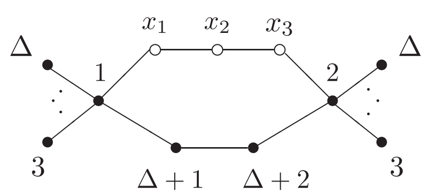


*Рис.* 5

Следовательно, при $g = 7$ имеются 7-грани, образованные 3-цепью и 2-цепью, которых не было в [2]. Такие 7-грани и инцидентные им цепи будем называть *особыми*. Заметим, что ввиду леммы 8 особая 2-цепь может быть инцидентна только одной особой 7-грани.

Появление особых граней, которые при обычной 2-дистанционной раскраске в перераспределении зарядов вершин и граней не участвовали, приводит нас к изменению правил в [2] (раздел 2.2). Следовательно, нам также придётся проверить неотрицательность новых зарядов вершин и

граней, чтобы получить противоречие с (1). Заметим, что на самом деле правила из [2] изменятся только в той части, где речь шла о передаче заряда от грани к центральной 2-вершине 3-цепи и заключительной передаче оставшегося заряда у 2-цепи (цепи получали некоторый заряд от инцидентных им вершин степени не меньше 3). Чтобы не повторять рассуждения из [2], по мере необходимости мы будем делать ссылки на те разделы из [2], в которых можно с ними ознакомиться.

Вершину $v$ назовем *младшей*, если $2 < d(v)$ и $\mu(v) < 2d(v)$, *средней*, если $2d(v) \leqslant \mu(v) < \frac{9}{4}d(v)$, и *старшей*, если $\mu(v) \geqslant \frac{9}{4}d(v)$. Нетрудно видеть, что младшими являются вершины степени от 3 до 13, средними — вершины степеней от 14 до 27, а старшими — вершины степени не менее 28.

Перераспределим заряды вершин и граней по следующим правилам.

$\mathbb{R}1$: (a) Младшая вершина отдаёт инцидентной ей $k$-цепи заряд 1, если $k = 1$, и заряд 2, если $k \geqslant 2$;

(b) Средняя или старшая вершина любой инцидентной ей цепи отдаёт заряд 2 или $\frac{9}{4}$ соответственно.

Обозначим через $\rho_1$ сумму зарядов, полученных цепью от её концов по R1.

$\mathbb{R}2$: Любая цепь отдаёт инцидентной ей 2-вершине $v$ заряд $\frac{1}{2}$, если $v$ смежна с двумя 2-вершинами, и заряд 2, если $v$ смежна хотя бы одной вершине степени не менее 3.

Через $\rho_2$ обозначим заряд цепи, оставшийся после применения правила R2.

$\mathbb{R}3$: Если $k$-цепь $C$, $k \leqslant 1$, и соседняя с ней 3-цепь инцидентны 7-грани $f$, то $C$ отдаёт грани $f$ заряд $\frac{3}{8}$.

Пусть $\rho_3$ — заряд цепи, оставшийся после применения правила R3.

$\mathbb{R}4$: (a) Если $k$-цепь $C$, $k \leqslant 2$, соединяет младшую вершину $v$ с вершиной степени не менее 14, то $v$ получает заряд $\rho_3$ от $C$.

(b) Пусть $k$-цепь $C$, $k \leqslant 1$, соединяет две немладшие вершины $u$ и $w$. Если среди соседних с $C$ цепей имеется хотя бы одна $k$-цепь, $k \leqslant 2$, ведущая в младшую вершину, то $C$ раздаёт $\rho_3$ поровну концам таких цепей.

Обозначим через $\rho_4$ заряд цепи, оставшийся после применения правила R4.

$\mathbb{R}4'$: Если $\rho_4 > 0$, то особая 2-цепь отдаёт весь заряд $\rho_4$ инцидентной ей особой грани, а остальные цепи отдают каждому из своих концов по заряду $\frac{\rho_4}{2}$.

$\mathbb{R}5$: (a) Каждая грань $f$ с $r(f) \geqslant 8$, инцидентная двум соседним

2-цепям, ведущим из младшей вершины $v$ в вершины степени не менее 14, отдаёт вершине $v$ заряд 1.

(b) Любая грань $f$ с $r(f) \geqslant 8$ отдаёт заряд 1 центральной вершине инцидентной ей 3-цепи.

(c) Если $f$ — неособая 7-грань, то $f$ отдаёт центральной вершине $v$ инцидентной ей 3-цепи заряд $\frac{3}{4}$. Если $f$ — особая 7-грань, то $f$ отдаёт вершине $v$ заряд $\frac{1}{2}$.

Для завершения доказательства остаётся проверить, что новые заряды $\mu^*$ являются неотрицательными, что будет противоречить (1).

**Замечание** 4. Правила перераспределения зарядов R1–R4, R5a остались такими же как в [2], а правило R4$'$ изменилось частично (в [2] особых 2-цепей не было).

Проверим справедливость неравенства $\mu^*(f) \geqslant 0$ для любой грани $f$ графа $G$.

Пусть $f$ — грань ранга $r$. Её граница разбивается на цепи, ограниченные с обеих сторон вершинами степени не менее 14. Чтобы оценить расход зарядов грани $f$ по правилу R5, представим, что по каждому из правил заряд передаётся не на вершину, а равномерно распределяется по рёбрам соответствующей цепи. Тогда по правилу R5a каждое ребро получает заряд $\frac{1}{6}$, а по R5b и R5c — заряд, не превышающий $\frac{1}{4}$. Тогда любое ребро на границе грани $f$ может получить от $f$ заряд от 0 до $\frac{1}{4}$. Заметим, что $\frac{r-7}{r} \geqslant \frac{1}{4}$ при $r \geqslant 10$, откуда $\mu^* \geqslant r - 7 - r \times \frac{1}{4} \geqslant 0$. Если $r = 9$, то ввиду того, что правила R5a и R5b не могут одновременно работать в грани $f$, имеем $\mu^* \geqslant 9 - 7 - 8 \times \frac{1}{4} = 0$, так как $f$ может быть инцидентна не более двум 3-цепям, или $\mu^* \geqslant 9 - 7 - 9 \times \frac{1}{6} > 0$. Остается рассмотреть грани ранга 7 и 8.

Если $r = 7$ и $f$ не инцидентна 3-цепи, то $\mu^* = r - 7 = 0$, так как в этом случае $f$ не фигурирует в правиле R5c. Пусть $r = 7$ и $f$ инцидентна 3-цепи. Если $f$ неособая, то $\mu^* = r - 7 + 2 \times \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = 0$ по правилам R3, R5b. Если $f$ особая, то инцидентная ей 2-цепь $C$ отдаёт грани $f$ заряд $\rho_4$ согласно R4$'$. Оба конца 2-цепи $C$ являются $\Delta$-вершинами. Поэтому по правилам R3 и R4 цепь $C$ зарядов не расходует. Значит, $\rho_4 = \rho_3 = \rho_2 = \frac{1}{2}$ и $\mu^* = r - 7 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ согласно R4$'$ и R5c.

Пусть, наконец, $r = 8$, тогда $\mu(f) = 1$. Если грань $f$ делает передачу по правилу R5, то ввиду леммы 8 она единственная (по R5a или R5b). Поэтому $\mu^* \geqslant 1 - 1 = 0$.

Проверка того, что $\mu^*(v) \geqslant 0$, где $v$ — средняя и старшая вершина, имеется в разделе 2.2.2 из [2].

Проверка того, что $\mu^*(v) \geqslant 0$, где $v$ — младшая вершина, имеется в

разделе 2.2.4 из [2]. Отметим, что эта проверка основывалась на том, что в графе $G$ нет:

— 2-цепи, соединяющей младшую вершину $v$ с вершиной степени не более $\Delta - 1$;

— младшей вершины типа $(2, 1, \ldots, 1)$;

— младшей вершины типа $(2, \ldots, 2, 1, 0)$, смежной с младшей вершиной;

— младшей вершины типа $(1, \ldots, 1)$, соединённой по 1-цепи с другой младшей вершиной;

— $(2, 1, 0)$-вершины, смежной с вершиной степени не больше 27;

— младшей вершины степени $d$, $d \leqslant 5$, типа $(2, \ldots, 2, 0, 0)$, смежной с двумя младшими вершинами;

— $(1, 1, 0)$-вершины, смежной с младшей вершиной и соединённой по 1-цепи с младшей вершиной;

— $(1, 0, 0)$-вершины, смежной с двумя младшим вершинами и соединённой по 1-цепи с младшей вершиной.

Кроме того, для доказательства неотрицательности нового заряда младшей вершины $v$ необходимо оценить $\rho_3$, так как по правилу R4 вершина $v$ получает заряд, равный $\rho_3$, от $k$-цепи, $k \leqslant 2$. Особая же 2-цепь, как было замечено выше, в R4 не участвует. Поэтому определённая в разделе 2.2.3 из [2] нижняя оценка $\rho_3$ для $k$-цепи, $k \leqslant 2$, остаётся верной и для предписанного случая.

Остаётся проверить, что $\mu^*(v) \geqslant 0$ для 2-вершины $v$ графа $G$.

Если $v$ не является центральной вершиной 3-цепи, то $v$ получает заряд 2 от инцидентной цепи по правилу R2.

Пусть $v$ — центральная вершина 3-цепи $P$, т. е. имеет степень 2 и смежна с двумя 2-вершинами. Если $P$ не является особой, то вершина $v$ получает заряд, не меньший $\frac{3}{4}$, от каждой инцидентной ей грани по правилам R5b, R5c и заряд $\frac{1}{2}$ от $P$ согласно R2b. Поэтому $\mu^*(v) \geqslant -2 + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{4} = 0$. Пусть цепь $P$ особая. Тогда ввиду того, что $g = 7$, обе грани, которым инцидентна цепь $P$, одновременно особыми быть не могут. Кроме того, неособая грань $f$, которой инцидентна цепь $P$, имеет ранг, не меньший 8, так как иначе в графе $G$ был бы цикл длины 6 (что противоречит условию $g = 7$). Следовательно, вершина $v$ получает заряд $\frac{1}{2}$ от цепи $P$, заряд $\frac{1}{2}$ от особой грани согласно R2, R5c и заряд 1 от грани $f$ по R5b. Поэтому $\mu^*(v) \geqslant -2 + 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 0$.

В [2] были построены примеры плоских графов обхвата 5 и 6, для которых выполнялось условие $\chi_2(G) > \Delta + 1$ при произвольном $\Delta$. Ясно,

что эти примеры подходят и для предписанного случая, так как $\chi_2^l(G) \geqslant \chi_2(G)$. Теорема 1 доказана.

Авторы благодарят А. Н. Глебова за полезные обсуждения рукописи статьи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.** 2-дистанционная раскраска разреженных плоских графов // Сибирские Электронные Математические Известия. 2004. Т. 1. С. 76–90.
2. **Бородин О. В., Глебов А. Н., Иванова А. О., Неустроева Т. К., Ташкинов В. А.** Достаточные условия 2-дистанционной $(\Delta + 1)$-раскрашиваемости плоских графов // Сибирские Электронные Математические Известия. 2004. Т. 1. С. 129–141.

Адреса авторов:

*О. В. Бородин*
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: brdnoleg@math.nsc.ru

*А. О. Иванова, Т. К. Неустроева*
Якутский государственный университет
им. М.К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48,
677000 Якутск, Россия.
E-mail: shmgnanna@mail.ru
podn2001@mail.ru

Статья поступила
13 апреля 2007 г.