ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2007. Серия 1. Том 14, № 3. 40–45

УДК 519.718

О РАСКРАСКЕ ИНЦИДЕНТОРОВ В ГИПЕРГРАФЕ*)

В. Г. Визинг

Рассматривается задача p-раскраски инциденторов ориентированного и неориентированного гиперграфов. Даются точные нижняя и верхняя оценки минимального числа необходимых цветов.

Введение

Задачу раскраски инциденторов ориентированного мультиграфа можно интерпретировать как задачу составления расписания для компьютерной сети [4]. При этом вершины мультиграфа интерпретируются как узлы сети, дуги — как сообщения. Задача состоит в минимизации общего времени, необходимого для передачи и получения всех сообщений. Если моменты времени считать цветами, то задача сводится к раскраске инциденторов в минимальное число цветов. Цвет начального инцидентора дуги — это момент времени, в который посылается соответствующее сообщение, цвет конечного инцидентора — это момент доставки сообщения адресату. В [4] предполагалось, что в единицу времени узел может посылать или принимать не более одного сообщения.

Предположим теперь, что каждое сообщение может отправляться в один и тот же момент нескольким адресатам. В этом случае сообщение изображается гипердугой (которую в дальнейшем для краткости будем называть дугой) гиперграфа и возникает задача раскраски инциденторов гиперграфа.

1. Основные понятия

Под *гиперграфом* [3] понимается пара (V,E), где V — непустое множество вершин, E — множество рёбер; каждое ребро представляет собой подмножество V, содержащее не менее двух вершин. Вершина v и ребро e называются *инцидентными*, если $v \in e$. Для $v \in V$ через $d(v)$ будем обозначать число рёбер, инцидентных вершине v; $d(v)$ называется *степенью* вершины v. Максимальная степень вершины гиперграфа G

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (проект 04–77–7173).

обозначается через $\Delta(G)$; если $\Delta(G) = \Delta$, то будем говорить, что G — *гиперграф степени* Δ

Введём понятие инцидентора. Пусть e — ребро, которому инцидентна вершина v. Тогда пара (v, e) называется *инцидентором* этого ребра, *примыкающим* к вершине v (или, *при* вершине v). Два различных инцидентора одного и того же ребра называются *сопряженными*. Два различных инцидентора, примыкающих к одной и той же вершине, называются *смежными*.

Мы будем рассматривать *ориентированные* и *неориентированные* гиперграфы. Рёбра неориентированного гиперграфа называются *звеньями*. В случае ориентированного гиперграфа (оргиперграфа) ребро $e \in E$ называется *дугой* и представляется как упорядоченная пара (h, T), где $h \in V$, $T \subseteq V \backslash \{h\}, T \neq \varnothing$. При этом вершина h называется *началом* дуги e, а каждая вершина из T — *конечной вершиной* дуги e. Будем говорить, что дуга e *исходит* из вершины h и *заходит* в каждую из вершин множества T. Если $G = (V, E)$ — оргиперграф, то *полустепень исхода* $d^+(v)$ вершины v — это число дуг, исходящих из v; *полустепень захода* $d^-(v)$ вершины v — это число дуг, заходящих в v. Очевидно, что $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$. Максимальные значения величин $d^+(v)$ и $d^-(v)$ для оргиперграфа G обозначаются через $\Delta^+(G)$ и $\Delta^-(G)$ соответственно. Если ребро e является дугой (h, T), то инцидентор (h, e) *называется начальным*, а остальные инциденторы этой дуги называются *конечными*.

Будем считать, что *цветами* являются натуральные числа. Множество всех цветов обозначается через $C = \{1, 2, \ldots\}$. Под *раскраской* множества инциденторов понимается отображение этого множества в C.

Раскраска инциденторов называется *правильной*, если смежные инциденторы окрашиваются различно. Пусть p — целое неотрицательное число. Раскраска инциденторов оргиперграфа G называется *p-раскраской*, если она правильная и для любой дуги разность между цветом любого конечного инцидентора и цветом начального инцидентора не меньше p. Введём понятие p-раскраски инциденторов неориентированного гиперграфа. Пусть имеется некоторая правильная раскраска инциденторов неориентированного гиперграфа. Для каждого звена назовём *активным* тот инцидентор этого звена, который окрашен в наименьший цвет; остальные инциденторы звена назовём *пассивными*. Правильная раскраска инциденторов неориентированного гиперграфа называется *p-раскраской*, если цвет активного инцидентора каждого звена отличается от цветов пассивных инциденторов этого звена не меньше чем на p.

Инциденторным p-хроматическим числом $\chi I(p, G)$ гиперграфа G

называется наименьшее натуральное s такое, что существует p-раскраска всех инциденторов с помощью цветов из $[1, s]$.

2. Раскраска инциденторов ориентированного гиперграфа

Известно [5], что если G — орграф, то $\chi I(p, G) = \max\{\Delta(G), \Delta^-(G) + p, \Delta^+(G) + p\}$.

Для оргиперграфов справедлива

Теорема 1. *Пусть $G = (V, E)$ — оргиперграф степени Δ. Тогда*

$$\max\{\Delta, \Delta^-(G) + p, \Delta^+(G) + p\} \leqslant \chi I(p, G) \leqslant 2\Delta + p - 1. \tag{1}$$

Доказательство. Неравенство $\max\{\Delta, \Delta^-(G) + p, \Delta^+(G) + p\} \leqslant \chi I(p, G)$ очевидно. Докажем верхнюю оценку для $\chi I(p, G)$. Окрасим начальные инциденторы при каждой вершине различными цветами из $[1, \Delta]$ так, чтобы цвета, использованные на окраску этих инциденторов, образовывали интервал с левым концом 1. Конечные инциденторы при каждой вершине окрашиваем произвольным образом различными цветами из интервала $[\Delta + p, 2\Delta + p - 1]$. Покажем, что построенная таким образом раскраска инциденторов будет правильной. Пусть z — произвольная вершина оргиперграфа, i_1 и i_2 — различные инциденторы, примыкающие к z. Если оба инцидентора являются конечными или начальными, то они окрашиваются различно. Предположим теперь, что i_1 — начальный, а i_2 — конечный инциденторы. Так как $d^-(z) \geqslant 1$, то $d^+(z) < \Delta$. Но цвет инцидентора i_1 не больше $d^+(z)$, а цвет инцидентора i_2 не меньше $\Delta + p$. Поэтому i_1 и i_2 окрашены различно. Таким образом, инциденторы раскрашены правильно. А так как разность между цветами любого конечного и любого начального инциденторов не меньше p, то построенная раскраска всех инциденторов цветами из $[1, 2\Delta + p - 1]$ является p-раскраской и $\chi I(p, G) \leqslant 2\Delta + p - 1$. Теорема 1 доказана.

Верхняя и нижняя оценки из (1) для $\chi I(p, G)$ достижимы. Достижимость нижней оценки показывается легко (например, для орграфов имеет место равенство $\max\{\Delta(G), \Delta^-(G) + p, \Delta^+(G) + p\} = \chi I(p, G)$). Докажем достижимость верхней оценки.

При $\Delta = 1$ требуемое равенство выполняется всегда. Пусть $\Delta = k \geqslant 2$. Построим оргиперграф H степени Δ такой, что $\chi I(p, H) = 2k + p - 1$. Начальными вершинами дуг гиперграфа H будут k вершин $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Множество этих вершин обозначим через V'. Множество вершин, являющихся конечными вершинами дуг, обозначим через V''. Множество V'' состоит из всевозможных упорядоченных наборов, составленных из натуральных чисел отрезка $[1, k]$. Если $v = (j_1, j_2, \ldots, j_k) \in V''$, то будем говорить, что j_1 — первая координата вершины, j_2 — вторая координата вершины и т. д. Очевидно, что $\mid V^{''} \mid = k^k$, $V^{'} \cap V^{''} = \varnothing$. Опишем теперь дуги гиперграфа. Из каждой вершины v_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ исходит k дуг e_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Конечными вершинами дуги e_{ij}, исходящей из v_i, являются те и только те вершины множества $V^{''}$, i-я координата которых равна j. Следовательно, оргиперграф H имеет k^2 дуг, причём каждая вершина множества $V^{'}$ имеет степень k. Каждая вершина из $V^{''}$ тоже имеет степень k. Действительно, пусть $v^{''} = (s_1, s_2, \ldots, s_k) \in V^{''}$. Тогда $v^{''}$ является конечной вершиной дуги e_{1,s_1}, исходящей из v_1, конечной вершиной дуги e_{2,s_2}, исходящей из v_2, …, конечной вершиной дуги e_{k,s_k}, исходящей из v_k. Никаким другим дугам вершина $v^{''}$ не инцидентна. Таким образом, степень оргиперграфа H равна k.

Покажем, что $\chi I(p, H) \geqslant 2k + p - 1$. Построим произвольную p-раскраску всех инциденторов оргиперграфа H. Так как степень каждой вершины из $V^{'}$ равна k, то к каждой вершине из $V^{'}$ примыкает хотя бы один начальный инцидентор, цвет которого не меньше k. Пусть e_{i,t_i} — дуга, исходящая из вершины $v_i \in V^{'}$, начальный инцидентор которой имеет цвет, не меньший k $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Рассмотрим вершину $y = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in V^{''}$. Эта вершина инцидентна дугам e_{i,t_i} $(i = 1, 2, \ldots, k)$, начальные инциденторы которых имеют цвет не меньше k. Следовательно, каждый конечный инцидентор, примыкающий к y, имеет цвет не меньше $k+p$. Так как цвета примыкающих к y инциденторов различны, то среди конечных инциденторов, примыкающих к y, найдётся инцидентор, цвет которого не меньше $k+p+k-1 = 2\Delta+p-1$. Значит, $\chi I(p, H) \geqslant 2\Delta+p-1$. В силу теоремы 1 имеем $\chi I(p, H) = 2\Delta+p-1$.

Замечание. Рассуждениями, аналогичными тем, которые проводились при доказательстве теоремы 1, можно доказать, что имеют место следующие верхние оценки для $\chi I(p, G)$: $\chi I(0, G) \leqslant \Delta^-(G) + \Delta^+(G)$ и $\chi I(p, G) \leqslant \Delta^-(G) + \Delta^+(G) + p - 1$ при $p \geqslant 1$.

3. Раскраска инциденторов неориентированного гиперграфа

В [2] доказано, что если G — неориетированный мультиграф степени Δ, то $\chi I(p, G) = \max\{\Delta, \lceil \Delta/2 \rceil + p\}$.

Теорема 2. *Пусть G — неориентированный гиперграф степени Δ. Тогда*

$$\max\{\Delta, \lceil \Delta/2 \rceil + p\} \leqslant \chi I(p, G) \leqslant \Delta + p. \tag{2}$$

Доказательство. При $p = 0$ теорема справедлива, так как $\chi I(p, G) {=} \Delta$. Пусть $p \geqslant 1$. Сначала докажем левое неравенство в (2). Рассмотрим p-раскраску всех инциденторов цветами из $[1, \chi I(p, G)]$. Так как p-раскраска инциденторов является правильной, то $\Delta \leqslant \chi I(p, G)$. Осталось доказать неравенство $\lceil \Delta/2 \rceil + p \leqslant \chi I(p, G)$. Пусть v — вершина в G такая, что $d(v) = \Delta$. Обозначим через I_1 (I_2) подмножество примыкающих к v инциденторов, цвета которых не больше p (не меньше $p+1$). Очевидно, что все инциденторы множества I_1 являются активными. Так как $\mid I_1 \mid + \mid I_2 \mid = \Delta$, то по крайней мере одно из двух неравенств $\mid I_1 \mid \geqslant \lceil \Delta/2 \rceil$ и $\mid I_2 \mid \geqslant \lceil \Delta/2 \rceil$ справедливо. Если справедливо первое неравенство, то в I_1 есть инцидентор, цвет которого не меньше $\lceil \Delta/2 \rceil$; так как цвет этого инцидентора не больше p, то сопряженный ему инцидентор окрашен в цвет, не меньший чем $\lceil \Delta/2 \rceil + p$. Если $\mid I_2 \mid \geqslant \lceil \Delta/2 \rceil$, то поскольку цвета всех инциденторов из I_2 не меньше $p + 1$, в I_2 есть инцидентор, цвет которого не меньше $\lceil \Delta/2 \rceil + p$. Таким образом, нижняя оценка для $\chi I(p, G)$ доказана.

Теперь докажем верхнюю оценку для $\chi I(p, G)$. Раскрасим правильно цветами из $[1, \Delta]$ все инциденторы гиперграфа G. Отметим все активные инциденторы при этой раскраске. Затем перекрасим инциденторы при каждой вершине так, чтобы цвета активных инциденторов образовывали интервал с левым концом 1 и по возрастанию следовали в том же порядке, что и при исходной правильной раскраске, а цвета пассивных инциденторов образовывали интервал с правым концом Δ и тоже следовали друг за другом в прежнем порядке. Получится правильная раскраска цветами из $[1, \Delta]$, при которой множество активных инциденторов не изменится. После этого увеличим на p цвета всех пассивных инциденторов. Получим p-раскраску всех инциденторов гиперграфа G цветами из $[1, \Delta + p]$. Теорема 2 доказана.

Докажем неулучшаемость полученных оценок. Достижимость нижней оценки для инциденторного хроматического числа неориентированного гиперграфа при любых Δ и p вытекает из того, что требуемое равенство выполняется для неориентированных мультиграфов. Докажем достижимость верхней оценки .

Построим неориентированный гиперграф $H = (V, E)$ степени Δ с $\Delta+2$ вершинами и $\Delta+1$ ребром следующим образом. Пусть $V = \{v_i\}(i = 1, \ldots, \Delta+1, \Delta+2)$, а $E = \{e_j\}(j = 1, 2, \ldots, \Delta+1)$, где $e_1 = V \setminus \{v_1, v_{\Delta+2}\}$, $e_k = V \setminus \{v_k\}(k = 2, \ldots, \Delta + 1)$. Степень каждой вершины гиперграфа равна Δ. Покажем, что $\chi I(p, H) = \Delta + p$. Построим p-раскраску всех инциденторов гиперграфа H цветами из $[1, \chi I(p, H)]$. При этой раскраске один из инциденторов каждого ребра является активным. Так как число вершин больше числа рёбер, то существует по меньшей мере одна вершина, к которой не примыкает ни один активный инцидентор. Так как к такой вершине примыкают Δ пассивных инцидентов и каждый из них окрашен в цвет, не меньший чем $p+1$, то один из примыкающих инцидентов имеет цвет не меньше $\Delta+p$. Следовательно, $\chi I(p,H) \geqslant \Delta+p$. В силу теоремы 2 имеем $\chi I(p,H) = \Delta+p$.

В заключение заметим, что при раскраске инцидентов в гиперграфах можно рассматривать задачи, аналогичные тем, что решались при раскраске инцидентов мультиграфов (см., например, [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г., Пяткин А. В.** Задача раскраски инцидентов мультиграфа // Российская конференция «Дискретный анализ и исследование операций»: Материалы конференции (Новосибирск, 28 июня–2 июля 2004 г.). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004. С. 6–11.
2. **Визинг В. Г., Тофт Б.** Раскраска инцидентов и вершин неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 3. С. 3–14.
3. **Зыков А. А.** Гиперграфы // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, вып. 6. С. 89–154.
4. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.
5. **Пяткин А. В.** Задачи раскраски инцидентов и их приложения.: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1999.

Адрес автора:

ул. Варненская, 18/2, кв. 26,
65070 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
28 марта 2007 г.