ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2007. Серия 1. Том 14, № 3. 53–66

УДК 519.716

ДИСКРИМИНАТОРНЫЕ ПОЗИТИВНО ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ ТРЁХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ*)

С. С. Марченков

На множестве P_k функций k-значной логики рассматривается оператор позитивного замыкания. Доказывается, что при любом $k \geqslant 3, k \neq 4$, множество H_k всех однородных функций из P_k образует атом в решётке позитивно замкнутых классов из P_k. Находятся все 17 позитивно замкнутых классов в P_3, которые целиком содержат класс H_3 (дискриминаторные позитивно замкнутые классы). Определяются позитивно порождающие системы этих классов.

Введение

Один из способов классификации множества P_k функций k-значной логики состоит в задании на множестве P_k оператора замыкания $\mathcal{O}$. Совокупность классов (как правило, пересекающихся), замкнутых относительно оператора $\mathcal{O}$, образует $\mathcal{O}$-классификацию множества P_k. Известно, что для оператора суперпозиции соответствующая классификация множества P_2 счётна [16, 17], а при $k \geqslant 3$ множества P_k — континуальна [15]. В связи с этим интерес вызывают такие операторы $\mathcal{O}$, которые при любом $k \geqslant 3$ приводят к конечным либо счётным классификациям.

В работе [6] автор определил оператор Pos позитивного замыкания и установил, что при любом $k \geqslant 2$ оператор Pos даёт конечную классификацию множества P_k. Однако число позитивно замкнутых классов в P_k растёт примерно как двойная экспонента от k. В [10] начато исследование решётки $\mathcal{L}_3$ позитивно замкнутых классов в P_3. Найдены, в частности, все (их оказалось 10) позитивно предполные классы в P_3.

Однородные функции — функции, самодвойственные относительно любых перестановок, — играют заметную роль в универсальной алгебре и теории функций многозначной логики. В ряде классификаций множества P_k (см., например, [5, 7, 9, 12, 13]) замкнутые классы однородных функций образуют основу, «ядро» классификации. В связи с этим

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–00438).

возникает вопрос о месте замкнутых (относительно операции суперпозиции) классов однородных функций в позитивной классификации множества P_k.

В настоящей статье дан ответ на этот вопрос. Доказано (следствие из утверждения 2), что при любом $k \geqslant 3, k \neq 4$, класс H_k всех однородных функций из P_k образует атом в решётке $\mathcal{L}_k$ позитивно замкнутых классов. В решётке $\mathcal{L}_4$ атомом является класс L_4 линейных однородных функций (следствие 1). В класс H_k входят известные в универсальной алгебре функции — тернарный дискриминатор p и дуальный дискриминатор d Пиксли. Поэтому всякий позитивно замкнутый класс функций из P_k, целиком содержащий класс H_k, мы назвали дискриминаторным классом. В теореме указаны все 17 дискриминаторных классов в P_3. Определены также позитивно порождающие системы этих классов.

1. Основные понятия

Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, P_k — множество всех функций на E_k (множество функций k-значной логики). *Селекторной* называем функцию, значения которой совпадают со значениями некоторой из её переменных. Понятия суперпозиции, замыкания и замкнутого относительно суперпозиции класса предполагаем известными (см. [14]).

Если $n \geqslant 1$ и $Q \subseteq P_k$, то через $Q^{(n)}$ обозначаем множество всех n-местных функций из Q. Для функций $g \in P_3^{(1)}$ в дальнейшем используем обозначение $(g(0)g(1)g(2))$. Например, (210) есть функция из $P_3^{(1)}$, принимающая значения 2, 1, 0 соответственно при $x = 0, 1, 2$.

Пусть π — перестановка на E_k. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k называется *самодвойственной* относительно перестановки π, если выполняется тождество

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))).$$

Множество всех функций из P_k, самодвойственных относительно перестановки π, обозначим через S_π. Легко проверить, что класс S_π замкнут относительно операции суперпозиции.

Функция $f \in P_k$ называется *однородной*, если f самодвойственна относительно любых перестановок на E_k. Множество всех однородных функций из P_k обозначим через H_k. Легко убедиться, что селекторные функции являются однородными, а класс H_k замкнут относительно операции суперпозиции.

В дальнейшем нам понадобятся однородные функции p, d, l_n, r_k, f_0. Функции p (тернарный дискриминатор) и d (дуальный дискриминатор

Пиксли) определяются на любом множестве E_k:

$$p(x,y,z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$d(x,y,z) = \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ z & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция l_n определяется на множестве E_k при $k \geqslant 3$ и $3 \leqslant n \leqslant k$:

$$l_n(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} x_1, & \text{если значения } x_1,\ldots,x_n \text{ попарно различны,} \\ x_n & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция r_k определяется на множестве E_k при $k \geqslant 3$:

$$r_k(x_1,\ldots,x_{k-1}) = \begin{cases} x_k, & \text{если значения } x_1,\ldots,x_{k-1},x_k \\ & \text{образуют множество } E_k, \\ x_1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим, что $r_3(x_1,x_2) = 2x_1 + 2x_2 \pmod 3$. Функция f_0 определяется на множестве E_4:

$$f_0(0,1,1) = f_0(1,0,1) = f_0(1,1,0) = f_0(1,2,3) = 0$$

(на остальных наборах из E_4^3 значения функция f_0 находятся из условий однородности). Нетрудно убедиться, что функция $f_0(x,y,z)$ представима в виде $x+y+z$, где $\langle E_4;+\rangle$ — абелева группа экспоненты 2 с нейтральным элементом 0, причём $1+2=3,\ 1+3=2,\ 2+3=1$.

Пусть $\rho(x_1,\ldots,x_m)$ — отношение на E_k. Говорят, что функция $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k$ *сохраняет отношение* ρ, если для любых n наборов $(a_{11},\ldots,a_{m1}),\ldots,(a_{1n},\ldots,a_{mn})$, удовлетворяющих отношению ρ, набор

$$(f(a_{11},\ldots,a_{1n}),\ldots,f(a_{m1},\ldots,a_{mn}))$$

также удовлетворяет отношению ρ. Множество всех функций из P_k, сохраняющих отношение ρ, обозначим через $\mathrm{Pol}(\rho)$. Известно [1], что для любого отношения ρ множество $\mathrm{Pol}(\rho)$ содержит все селекторные функции и замкнуто относительно операции суперпозиции. Если R — множество отношений, то полагаем

$$\mathrm{Pol}(R) = \bigcap_{\rho\in R} \mathrm{Pol}(\rho).$$

Если $E \subseteq P_k$ и $f \in \mathrm{Pol}(x \in E)$, то говорят, что *функция f сохраняет множество E*. В частном случае, когда $E = \{i\}$, функция $f \in \mathrm{Pol}(x = i)$

сохраняет константу i. Множество $\mathrm{Pol}(x=i)$ обозначим через T_i. Если $i_1,\ldots,i_s$ — попарно различные числа из E_k, то пусть

$$T_{i_1\ldots i_s}=T_{i_1}\cap\ldots\cap T_{i_s}.$$

Если π — перестановка на E_k, то множество $\mathrm{Pol}(\pi(x)=y)$ совпадает с классом S_π. Отсюда, в частности, следует, что $H_k=\mathrm{Pol}(R)$, где R — множество всех перестановок на E_k.

Напомним основные понятия, связанные с оператором позитивного замыкания [6]. Вначале для любого k определим язык Pos_k. Исходными символами языка Pos_k являются символы предметных переменных $x_1,x_2,\ldots$ (с областью значений E_k), символы $f_i^{(n)}$ для обозначения n-местных функций из P_k ($1\leqslant i\leqslant k^{k^n}, n=1,2,\ldots$), знаки равенства $=$, конъюнкции $\&$, дизъюнкции $\vee$, квантор существования $\exists$, левая и правая скобки и запятая. Иногда вместо символов переменных $x_1,x_2,\ldots$ будем использовать символы x,y,z,w.

Терм в языке Pos_k определим по индукции. Символ предметной переменной есть терм; если $x_{j_1},\ldots,x_{j_n}$ — символы предметных переменных (не обязательно различные), а $f_i^{(n)}$ — символ n-местной функции, то $f_i^{(n)}(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})$ есть терм; если $t_1,\ldots,t_m$ — термы, а $f_l^{(m)}$ — символ m-местной функции, то $f_l^{(m)}(t_1,\ldots,t_m)$ есть терм. Других термов в языке Pos_k нет.

Любой терм языка Pos_k очевидным образом определяет некоторую функцию языка Pos_k (переменная определяет тождественную функцию).

Если t_1,t_2 — термы языка Pos_k, то выражение $(t_1=t_2)$ называем элементарной формулой языка Pos_k. Далее, если Φ_1,Φ_2 — формулы языка Pos_k, а x_i — символ предметной переменной, то

$$(\Phi_1\&\Phi_2),\ (\Phi_1\vee\Phi_2),\ (\exists x_i)\Phi_1\ —$$

также формулы языка Pos_k. Понятия свободной и связанной переменных предполагаем известными.

Любая формула языка Pos_k с m свободными переменными определяет некоторое m-местное отношение на E_k. Пусть $Q\subseteq P_k$, $\Phi(x_1,\ldots,x_m)$ — формула языка Pos_k со свободными переменными $x_1,\ldots,x_m$, все функциональные символы которой суть обозначения функций из Q, и формула $\Phi(x_1,\ldots,x_m)$ определяет отношение $\rho(x_1,\ldots,x_m)$ на E_k. В этом случае говорим, что формула Φ *позитивно выражает отношение* ρ *через функции множества* Q. Понятие позитивной выразимости перенесём с отношений на функции. Именно, если $g(x_1,\ldots,x_m)$ — функция из P_k, а формула $\Phi(x_1, \ldots, x_m, y)$ языка Pos_k позитивно выражает отношение $g(x_1, \ldots, x_m) = y$ (график функции g) через функции множества Q, то говорим, что формула Φ *позитивно выражает функцию g через функции множества Q*. Совокупность всех функций, позитивно выразимых через функции множества Q, называем *позитивным замыканием множества Q* и обозначаем через $\mathrm{Pos}[Q]$. Множества вида $\mathrm{Pos}[Q]$ называем *позитивно замкнутыми классами*. Решётку позитивно замкнутых классов в P_k обозначаем через $\mathcal{L}_k$. Решётка $\mathcal{L}_k$ имеет единицу — класс P_k и нуль — класс всех селекторных функций.

Известные для операции суперпозиции понятия полноты, порождающей системы и базиса [14] распространяем на оператор позитивного замыкания. Отметим [6], что любой позитивно замкнутый класс содержит все селекторные функции и замкнут относительно операции суперпозиции. Кроме того, в [10] доказано, что для любой перестановки π и любого i классы S_π, T_i позитивно замкнуты. Позитивно замкнутым будет и пересечение любого числа таких классов.

2. Классы однородных функций и классы сохранения констант

Утверждение 1 содержит достаточное условие включения множества H_k в позитивно замкнутый класс.

Утверждение 1. *Пусть $k \geqslant 3, n \geqslant 1, Q \subseteq P_k^{(n)}$ и для любых неравных элементов $a_1, a_2 \in E_k$ найдутся такие функции $f_1, f_2 \in Q$, что*

$$(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)((f_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1) \& (f_2(x_1, \ldots, x_n) = a_2)),$$
$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(f_1(x_1, \ldots, x_n) \neq f_2(x_1, \ldots, x_n)). \quad (1)$$

Тогда $H_k \subseteq \mathrm{Pos}[Q]$.

Доказательство. Определим отношение $w = p(x, y, z)$ следующей позитивной формулой над множеством Q:

$$(x = y) \& (w = z) \vee (\exists x_1) \ldots (\exists x_n) \left(\bigvee_{f_1, f_2} (x = f_1(x_1, \ldots, x_n) \right.$$
$$\left. \& (y = f_2(x_1, \ldots, x_n))) \& (w = x), \right.$$

где дизъюнкция под кванторами существования распространяется по всем парам функций f_1, f_2 из Q, удовлетворяющим условию (1). Таким образом, $p \in \mathrm{Pos}[Q]$.

Рассмотрим далее отношение $x_k = r_k(x_1, \dots, x_{k-1})$. Имеем

$$(x_k = r_k(x_1, \dots, x_{k-1})) \equiv (\bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant k-1} (x_i = x_j))\&(x_k = x_1) \vee \mathop{\&}_{\substack{1 \leqslant i,j,l \leqslant k \\ i \neq j, i \neq l, j \neq l}} (x_i = p(x_i, x_j, x_l)).$$

Согласно [2, 3] система функций $\{p, r_k\}$ образует базис по суперпозиции в классе H_k. Следовательно, $H_k \subseteq \mathrm{Pos}[Q]$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Пусть* $Pos[\{r_3\}] = H_3$. *Тогда при любом* $k \geqslant 3$ *справедливы равенства*

$$\mathrm{Pos}[\{d\}] = \mathrm{Pos}[\{l_k\}] = H_k.$$

Доказательство. Имеем

$$(w = p(x, y, z)) \equiv (x = y)\&(w = z) \vee (z = d(x, y, z))\&(w = x).$$

Таким образом, $p \in \mathrm{Pos}[\{d\}]$. Вместе с тем при доказательстве утверждения 1 установлено, что $\mathrm{Pos}[\{p\}] = H_k$. Следовательно, $\mathrm{Pos}[\{d\}] = H_k$.

Рассмотрим функцию l_k. Если $k \geqslant 4$, то сначала из функции l_k получим функции $l_{k-1}, \dots, l_3$. Именно, при $4 \leqslant n \leqslant k$ выполняется эквивалентность

$$(y = l_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})) \equiv (\bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} (x_i = x_j))\&(y = x_{n-1}) \vee (\exists x_n)((x_1 = l_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n))\&(x_2 = l_n(x_2, \dots, x_n, x_1))\& \dots \&(x_n = l_n(x_n, x_1, \dots, x_{n-1})))\&(y = x_1).$$

Теперь с помощью функции l_3 получаем функцию p:

$$(w = p(x, y, z)) \equiv (x = y)\&(w = z) \vee (x = l_3(x, y, z) \vee y = l_3(y, x, z))\&(w = x).$$

Для функции r_3 имеем эквивалентность

$$(w = l_3(x, y, z)) \equiv (x = y \vee x = z \vee y = z)\&(w = z) \vee (x = r_3(y, z))\&(w = x).$$

Утверждение 2 доказано.

Следствие 1. *При любом* $k \geqslant 3, k \neq 4$, *класс* H_k *является атомом в решётке* $\mathcal{L}_k$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться тем (см. [2, 3]), что

что при любом $k \geqslant 5$ каждый замкнутый (относительно операции суперпозиции) класс однородных функций, отличный от класса всех селекторных функций, содержит хотя бы одну из функций d, l_k, а в случае $k = 3$ — одну из функций d, r_3, l_3.

Обозначим через L_4 замыкание по суперпозиции множества $\{f_0\}$.

Утверждение 3. *Класс L_4 позитивно замкнут.*

Доказательство. Пусть $Q = \mathrm{Pos}[L_4]$. Докажем утверждение 3 от противного.

Предположим, что $Q \neq L_4$. Согласно [10, следствие 2 из утверждения 4] класс Q состоит только из однородных функций. Так как $Q \neq L_4$, то из [3] следует, что класс Q содержит хотя бы одну из функций d, l_4. Если $l_4 \in Q$, то из утверждения 2 следует, что класс Q содержит также функцию l_3. Таким образом, будем предполагать, что в класс Q входит одна из функций d, l_3. Обозначим её через g.

Пусть позитивная формула $\Phi(x, y, z, w)$ выражает отношение $w = g(x, y, z)$ через функцию f_0. Используя известные логические тождества, формулу Φ преобразуем к эквивалентному виду

$$\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \ldots \vee \Phi_m, \tag{2}$$

где формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ не содержат знака дизъюнкции и находятся в предваренной форме. Проведём дальнейшие преобразования формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$.

Как отмечалось в разделе 1, $f_0(x, y, z) = x+y+z$, где $\langle E_4; + \rangle$ есть абелева группа экспоненты 2 с нейтральным элементом 0. Поэтому любой терм формулы (2) можно привести к эквивалентному виду $x_{i_1} + \ldots + x_{i_s}$, где переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ попарно различны и s нечётно ($x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ суть свободные и связанные переменные формулы (2)). В связи с этим элементарные подформулы формулы (2) будут приводиться к виду

$$x_{i_1} + \ldots + x_{i_s} = x_{j_1} + \ldots + x_{j_t}, \tag{3}$$

где числа s, t нечётны. В равенствах (3) возможны дальнейшие упрощения: одинаковые переменные из левой и правой частей равенства можно сокращать. Таким образом, далее можно предполагать, что каждая элементарная подформула формулы (2) имеет вид (3), где переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}$ попарно различны, а числа s, t имеют одинаковую чётность. (Если, например, в процессе сокращения одинаковых переменных в правой части формулы (3) не осталось переменных, то формула (3) эквивалентна формуле $x_{i_1} + \ldots + x_{i_s} = 0$, причём s — чётное число.

При $s = 0$ имеем тождество $0 = 0$, а при $s > 0$ формула (3) эквивалентна формуле $x_{i_1} + \ldots + x_{i_{s-1}} = x_{i_s}$.)

Займёмся теперь элиминированием кванторов в формулах Φ_j. Чтобы упростить изложение, рассмотрим элиминирование квантора существования в формуле вида

$$(\exists v)(\underset{1\leqslant i\leqslant l}{\&}(x_{i1} + \ldots + x_{im_i} + v = y_{i1} + \ldots + y_{in_i})), \tag{4}$$

где при любом i переменные $x_{i1}, \ldots, x_{im_i}, v, y_{i1}, \ldots, y_{in_i}$ попарно различны, а числа m_i, n_i имеют разную чётность. Формулу (4) удобно представить в следующем эквивалентном виде:

$$(\exists v)(\underset{1\leqslant i\leqslant l}{\&}(v = x_{i1} + \ldots + x_{im_i} + y_{i1} + \ldots + y_{in_i})).$$

Понятно, что данная формула тождественно истинна при $l = 1$ и эквивалентна бескванторной формуле

$$\underset{1\leqslant i<j\leqslant l}{\&}(x_{i1} + \ldots + x_{im_i} + y_{i1} + \ldots + y_{in_i} = x_{j1} + \ldots + x_{jm_j} + y_{j1} + \ldots + y_{jn_j})$$

при $l \geqslant 2$. Отметим, что в каждом равенстве последней формулы слева и справа стоят суммы нечётного числа слагаемых. Это обстоятельство позволяет заключить, что после элиминирования всех кванторов существования и сокращения в равенствах одинаковых переменных каждая формула Φ_j будет эквивалентна конъюнкции равенств вида (3), где

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, y_{j_1}, \ldots, y_{j_t}\} \subseteq \{x, y, z, w\},$$

а числа s, t отличны от нуля и имеют одинаковую чётность.

Предполагая, что все формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ в (2) уже имеют такой вид, рассмотрим значения подформул формулы (2) на наборе $(0, 1, 2, a)$, где $a = g(0, 1, 2)$. Пусть, например, на этом наборе истинной будет формула Φ_1. Очевидно, что она в этом случае не может содержать подформул $x = y, x = z, y = z$ (равенства рассматриваем с точностью до перестановки переменных). Формула Φ_1 не может также содержать равенств вида $v_1 + v_2 = v_3 + v_4$ или $v_1 + v_2 + v_3 = v_4$, где $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{x, y, z, w\}$, поскольку $a = g(0, 1, 2) \in \{0, 2\}$ и $b_1 + b_2 + b_3 \notin \{b_1, b_2, b_3\}$ для любых попарно различных b_1, b_2, b_3. Значит, в формулу Φ_1 могут входить лишь формулы

$$w = x, \quad w = y, \quad w = z \tag{5}$$

(тождественно истинные формулы вида $v = v$ опускаем). Однако переменные x, y, z по условию принимают соответственно значения 0, 1, 2.

Поэтому формула Φ_1 не может содержать никакие две различные формулы из (5). Остаётся одна возможность: формула Φ_1 совпадает с одной из формул (5). Это, очевидно, противоречит тому, что функция g отлична от селекторной функции. Утверждение 3 доказано.

Следствие 2. *Класс L_4 является атомом в решётке $\mathcal{L}_4$.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться тем, что класс L_4 является атомом в решётке замкнутых (относительно операции суперпозиции) классов однородных функций (см. [3]).

Утверждение 4. *При любом $k \geqslant 3$ класс $T_{01\ldots k-1}$ целиком содержится ровно в 2^k замкнутых (относительно операции суперпозиции) классах. Все они, за исключением класса P_k, имеют вид $T_{i_1\ldots i_s}$, где $\{i_1,\ldots,i_s\}$ — непустое подмножество множества E_k.*

Доказательство. Пусть Q — замкнутый (относительно операции суперпозиции) класс функций из P_k и $T_{01\ldots k-1} \subseteq Q$. Если $Q \neq T_{01\ldots k-1}$, то для некоторого $j \in E_k$ в класс Q входит функция f_j, не сохраняющая константу j. Поскольку класс Q замкнут относительно операции отождествления переменных, функцию f_j можно считать одноместной. Пусть $j_1,\ldots,j_t$ — все такие j, для которых $f_j \in Q \setminus T_{01\ldots k-1}$. Если $\{i_1,\ldots,i_s\} = E_k \setminus \{j_1,\ldots,j_t\}$, то, следовательно, для любого v ($1 \leqslant v \leqslant s$) все функции из Q сохраняют константу i_v, т. е. $Q \subseteq T_{i_1\ldots,i_s}$ (множество $\{i_1,\ldots,i_s\}$ может быть пустым и тогда вместо класса $T_{i_1\ldots i_s}$ следует рассмотреть класс P_k). Очевидно, что для любой функции $g(x_1,\ldots,x_n)$ из $T_{i_1\ldots,i_s}$ (из P_k, если множество $\{i_1,\ldots,i_s\}$ пусто) в классе $T_{01\ldots k-1}$ найдётся такая функция $h(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_t)$, что

$$g(x_1,\ldots,x_n) = h(x_1,\ldots,x_n,f_{j_1}(x_1),\ldots,f_{j_t}(x_1)),$$

т. е. $g \in Q$. Утверждение 4 доказано.

Пусть $i_1,\ldots,i_s$ — попарно различные числа из E_k и $s < k$. Тогда для любых $j \in E_k \setminus \{i_1,\ldots,i_s\}$ и $l \in E_k$ классу $T_{i_1\ldots i_s}$ принадлежит такая функция $f_{j,l}(x)$, что $f_{j,l}(j) = l$. В частности,

$$\{f_{j,0}(j), f_{j,1}(j), \ldots, f_{j,k-1}(j)\} = E_k.$$

Поэтому на основании утверждения 3 из [10] получаем

$$T_{i_1\ldots i_s} = \mathrm{Pos}[T^{(1)}_{i_1\ldots i_s}].$$

Для класса $T_{01\ldots k-1}$ аналогичное соотношение не имеет места, поскольку множество $T^{(1)}_{01\ldots k-1}$ состоит только из тождественной функции.

Вместе с тем, очевидно, для любого $l \in E_k$ классу $T_{01\ldots k-1}$ принадлежит такая функция $f_l(x,y)$, что $f_l(0,1) = l$. Используя теперь равенство

$$\{f_0(0,1), f_1(0,1), \ldots, f_{k-1}(0,1)\} = E_k,$$

так же, как в утверждении 3 из [10], можно показать, что $T_{01\ldots k-1} = \mathrm{Pos}[T^{(2)}_{01\ldots k-1}]$.

В [4, теорема 2] при любом $k \geqslant 2$ охарактеризованы все замкнутые (отностельно операции суперпозиции) классы из P_k, которые содержат тернарный дискриминатор p. Показано, в частности, что каждый из этих замкнутых классов можно определить как класс сохранения конечного множества одно- и двуместных отношений, причём любое двуместное отношение либо представимо в виде конъюнкции двух одноместных отношений, либо имеет вид

$$(x_1 \in E)\&(\pi(x_1) = x_2), \tag{6}$$

где E — непустое подмножество множества E_k, а π — перестановка на E_k.

Если интересоваться аналогичным описанием замкнутых классов, целиком включающих класс H_k однородных функций, то из приведённого выше описания необходимо удалить все одно- и двуместные отношения, определение которых содержит конъюнктивный сомножитель вида $x \in E$, где $|E| = k-1$. В самом деле, однородная функция r_k по определению не сохраняет любое $(k-1)$-элементное подмножество множества E_k. Более того, функция r_k не может сохранять и отношение (6), если только выполняется равенство $|E| = k-1$. Это следует из того, что любая функция, сохраняющая отношение (6), сохраняет также и проекцию этого отношения по переменной x_2, т. е. отношение $x_1 \in E$ (см. [1]). Последнее, как мы знаем, невозможно для функции r_k.

При переходе к позитивно замкнутым классам можно также не рассматривать одноместные отношения вида $x \in E$, где $1 < |E| < k$, поскольку все они определяют класс P_k. В самом деле пусть, например, $E = E_l$, где $1 < l < k$. Положим

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & \text{если } y = k-1, \\ x+1 \pmod{l}, & \text{если } x \in E_l \text{ и } y \neq k-1, \\ x+1 \pmod{k}, & \text{если } x \in E_k \setminus E_l \text{ и } y \neq k-1. \end{cases}$$

Тогда функция f сохраняет отношение $x \in E_l$, а позитивная формула $f(x,y) = x$ определяет отношение $y = k-1$ и тем самым — функцию-константу $k-1$. Далее, класс $\mathrm{Pol}(x \in E_l)$ содержит все функции-константы

$0, 1, \ldots, l-1$, и для любого $j \in E_k \setminus E_l$ в классе $\mathrm{Pol}(x \in E_l)$ имеется такая функция $g(x)$, что $g(k-1) = j$. Таким образом, позитивное замыкание класса $\mathrm{Pol}(x \in E_l)$ включает все функции-константы. В силу утверждения 1 из [10] совокупность всех функций-констант образует позитивно полную в P_k систему.

3. Трёхзначная логика

В [8] найдены все 144 замкнутых класса в P_3, которые содержат тернарный дискриминатор p (они названы дискриминаторными классами). Эти классы определены как классы сохранения конечных множеств отношений на E_3. С учётом замечаний, сделанных в предыдущем разделе, часть этих отношений не может быть использована при задании замкнутых классов, включающих множество H_3. Для остальных отношений приведём обозначения из [8]:

$$e_i(x) \equiv (x = i),\ \sigma(x, y) \equiv (x + 1 = y),\ \sigma^0(x, y) \equiv (2x = y),$$
$$\sigma^1(x, y,) \equiv (2x + 2 = y), \quad \sigma^2(x, y) \equiv (2x + 1 = y), \quad (7)$$

где $i \in E_3$, а сложение и умножение рассматриваются по модулю 3.

Отберём из 144 множеств отношений, перечисленных в [8], лишь те множества, которые состоят из отношений списка (7). Получим следующий список из 16 множеств:

$$\{\sigma\},\ \{e_0, \sigma^0\},\ \{e_1, \sigma^1\},\ \{e_2, \sigma^2\},\ \{e_0\},\ \{e_1\},\ \{e_2\},\ \{e_0, e_1\},\ \{e_0, e_2\},$$
$$\{e_1, e_2\},\ \{e_0, e_1, e_2\},\ \{e_0, e_1, e_2, \sigma\},\ \{e_0, e_1, e_2, \sigma^0\},\ \{e_0, e_1, e_2, \sigma^1\},$$
$$\{e_0, e_1, e_2, \sigma^2\},\ \{e_0, e_1, e_2, \sigma, \sigma^0, \sigma^1, \sigma^2\}. \quad (8)$$

Заметим, что

$$\mathrm{Pol}(\sigma) = S_{x+1},\ \mathrm{Pol}(\sigma^0) = S_{2x},\ \mathrm{Pol}(\sigma^1) = S_{2x+2},\ \mathrm{Pol}(\sigma^2) = S_{2x+1},$$
$$\mathrm{Pol}(e_i) = T_i\ (i = 0, 1, 2).$$

Поэтому каждый из замкнутых классов, определяемый как класс сохранения множества отношений из списка (8), является пересечением некоторых замкнутых классов:

$$S_{x+1}, \quad S_{2x}, \quad S_{2x+2}, \quad S_{2x+1}, \quad T_0, \quad T_1, \quad T_2. \quad (9)$$

Согласно [10] все классы списка (9) позитивно замкнуты. Таким образом, мы приходим к следующим позитивно замкнутым классам, целиком включающим класс H_3 (порядок следования из списка (8) сохраняем):

$$\begin{gathered}S_{x+1},\ S_{2x}\cap T_0,\ S_{2x+2}\cap T_1,\ S_{2x+1}\cap T_2,\ T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_{01},\ T_{02},\ T_{12},\\ T_{012},\ S_{x+1}\cap T_{012},\ S_{2x}\cap T_{012},\ S_{2x+2}\cap T_{012},\ S_{2x+1}\cap T_{012},\\ S_{x+1}\cap S_{2x}\cap S_{2x+2}\cap S_{2x+1}\cap T_{012}.\end{gathered}\tag{10}$$

Сделаем несколько замечаний по поводу классов из списка (10). Перестановка $2x$ сохраняет константу 0. Поэтому все функции класса S_{2x} также сохраняют константу 0. В частности, $S_{2x}\cap T_0 = S_{2x}$. Аналогичные соотношения справедливы для классов $S_{2x+2}\cap T_1$ и $S_{2x+1}\cap T_2$. Класс $S_{x+1}\cap S_{2x}\cap S_{2x+2}\cap S_{2x+1}$ по определению есть класс H_3. Известно [2], что все функции из H_3 сохраняют любую константу. Поэтому

$$S_{x+1}\cap S_{2x}\cap S_{2x+2}\cap S_{2x+1}\cap T_{012} = H_3.$$

Наконец, в пересечении $S_{x+1}\cap T_{012}$ класс T_{012} можно заменить любым классом T_i, а в пересечениях

$$S_{2x}\cap T_{012},\quad S_{2x+2}\cap T_{012},\quad S_{2x+1}\cap T_{012}$$

класс T_{012} — например, соответственно классами T_1, T_0, T_0. Однако из соображений симметрии мы этого в дальнейшем не делаем.

Подведём итог проведённым выше построениям.

Теорема. *В* P_3 *имеется ровно* 17 *дискриминаторных позитивно замкнутых классов*:

$$\begin{gathered}P_3,\ S_{x+1},\ S_{2x},\ S_{2x+2},\ S_{2x+1},\ T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_{01},\ T_{02},\ T_{12},\ T_{012},\\ S_{x+1}\cap T_{012},\quad S_{2x}\cap T_{012},\quad S_{2x+2}\cap T_{012},\quad S_{2x+1}\cap T_{012},\quad H_3.\end{gathered}\tag{11}$$

О позитивно порождающих системах в классах $T_0, T_1, T_2, T_{01}, T_{02}, T_{12}$ говорилось в предыдущем разделе. Именно, справедливы следующие соотношения (в порождающие системы не включаем тождественную функцию x):

$$\begin{aligned}
&T_0 = \mathrm{Pos}[\{0,(001),(002),(010),(011),(020),(021),(022)\}],\\
&T_1 = \mathrm{Pos}[\{1,(010),(011),(110),(112),(210),(211),(212)\}],\\
&T_2 = \mathrm{Pos}[\{2,(002),(022),(102),(112),(122),(202),(212)\}],\\
&T_{01} = \mathrm{Pos}[\{(010),(011)\}],\\
&T_{02} = \mathrm{Pos}[\{(002),(022)\}],\\
&T_{12} = \mathrm{Pos}[\{(112),(212)\}].
\end{aligned}$$

В каждом из классов $S_{x+1}, S_{2x}, S_{2x+2}, S_{2x+1}$ имеются такие функции f_0, f_1, f_2, что для некоторого $a \in E_3$ выполняется равенство

$$\{f_0(a), f_1(a), f_2(a)\} = E_3.$$

Поэтому на основании утверждения 3 из [10] каждый из этих классов позитивно порождается множеством всех своих одноместных функций:

$$S_{x+1} = \mathrm{Pos}[\{x+1, x+2\}],\ S_{2x} = \mathrm{Pos}[\{0, 2x\}],$$
$$S_{2x+2} = \mathrm{Pos}[\{1, 2x+2\}],\ S_{2x+1} = \mathrm{Pos}[\{2, 2x+1\}].$$

Как отмечалось, класс T_{012} позитивно порождается множеством $T_{012}^{(2)}$. Однако среди классов (11) непосредственно в классе T_{012} содержатся лишь классы

$$S_{x+1} \cap T_{012}, \quad S_{2x} \cap T_{012}, \quad S_{2x+2} \cap T_{012}, \quad S_{2x+1} \cap T_{012}. \tag{12}$$

Функция $\max(x, y)$ входит в класс T_{012}, но не входит ни в один из классов (12). Кроме того, как доказано в утверждении 2, $\mathrm{Pos}[\{2x + 2y\}] = H_3$. Поэтому

$$T_{012} = \mathrm{Pos}[\{2x + 2y, \max(x, y\}].$$

Этот же приём можно использовать при нахождении позитивно порождающих систем в классах (12). Именно, в каждом из классов (12) непосредственно содержится лишь класс H_3. Поэтому в качестве позитивно порождающей системы можно выбрать систему, состоящую из функции $2x + 2y$ и двуместной функции данного класса, не входящей в класс H_3. Например, для класса $S_{x+1} \cap T_{012}$ такой функцией может служить функция $\alpha(x, y)$ из работы [11]:

$$\alpha(x, x) = x,\ \alpha(0, 1) = \alpha(1, 0) = 1,\ \alpha(0, 2) = \alpha(2, 0) = 0,$$
$$\alpha(1, 2) = \alpha(2, 1) = 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.** Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1–10; № 5. С. 1–9.
2. **Марченков С. С.** О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики // Проблемы кибернетики. Вып. 36. М.: Наука, 1979. С. 5–22.
3. **Марченков С. С.** Однородные алгебры // Проблемы кибернетики. Вып. 39. М.: Наука, 1982. С. 85–106.

4. **Марченков С. С.** Клоновая классификация дуально дискриминаторвных алгебр с конечным носителем // Математические заметки. 1997. Т. 61, вып. 3. С. 359–366.
5. **Марченков С. С.** S-классификация функций многозначной логики // Дискретная математика. 1997. Т. 9, вып. 3. С. 125–152.
6. **Марченков С. С.** О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискретная математика. 1999. Т. 11, вып. 4. С. 110–126.
7. **Марченков С. С.** S-классификация функций трёхзначной логики. М.: Физматлит, 2001.
8. **Марченков С. С.** Дискриминаторные классы трёхзначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. М.: Физматлит, 2003. С. 15–26.
9. **Марченков С. С.** Операторы замыкания с разветвлением по предикату // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2003. № 6. С. 37–39.
10. **Марченков С. С.** Критерий позитивной полноты в трёхзначной логике // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 3. С. 27–39.
11. **Марченков С. С., Деметрович Я., Ханнак Я.** О замкнутых классах самодвойственных функций в P_3 // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач. Сб. научн. тр. Вып. 34. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1980. С. 38–73.
12. **Нгуен Ван Хоа.** О структуре самодвойственных замкнутых классов трёхзначной логики // Дискретная математика. 1992. Т. 4, вып. 4. С. 82–95.
13. **Нгуен Ван Хоа.** О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискретная математика. 1993. Т. 5, вып. 4. С. 87–108.
14. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
15. **Янов Ю. И., Мучник А. А.** О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих базиса // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.
16. **Post E. L.** Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. V. 43. P. 163–185.
17. **Post E. L.** Two-valued iterative systems of mathematical logic. Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.

Адрес автора:

Московский гос. ун-т им. М.В.Ломоносова,
Воробьёвы горы, 2-й учебный корпус,
119992 Москва,
Россия.
E-mail: mathcyb@cs.msu.su

Статья поступила
2 марта 2007 г.