ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2007. Серия 1. Том 14, № 3. 80–89

УДК 519.718

О ПРЕДПИСАННОЙ РАСКРАСКЕ ИНЦИДЕНТОРОВ В МУЛЬТИГРАФЕ СТЕПЕНИ 3*)

А. В. Пяткин

Показано, что если число цветов, предписанное каждой дуге ориентированного мультиграфа степени 3, как минимум на 3 больше веса этой дуги, то инциденторы этого мультиграфа можно раскрасить в соответствии с заданным предписанием.

1. Постановка задачи

Под мультиграфом $G = (V, E)$ понимается конечный ориентированный мультиграф без петель с множеством вершин V, множеством дуг E, каждой из которых поставлено в соответствие некоторое целое неотрицательное число $w(e)$, называемое *весом* дуги, и множество цветов $L(e)$, называемое *предписанием* дуги. Под цветами понимаются натуральные числа. Максимальную и минимальную степени вершин мультиграфа G обозначим через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ соответственно.

Если $e = uv$ — дуга мультиграфа, то пара (u, e) называется *начальным инцидентором*, а пара (v, e) — *конечным инцидентором* этой дуги. При этом будем говорить, что инцидентор (u, e) *примыкает* к вершине u, а инцидентор (v, e) — к вершине v. Начальный и конечный инциденторы одной дуги называются *сопряжёнными* друг к другу. Будем говорить, что два инцидентора являются *однотипными*, если они оба являются либо начальными, либо конечными. Два различных инцидентора, примыкающих к одной и той же вершине, называются *смежными*.

Раскраской некоторого множества инциденторов называется его отображение во множество цветов. Раскраска инциденторов называется *допустимой*, если выполнены следующие условия:

1) смежные инциденторы окрашены различно;

2) разность между цветами конечного и начального инциденторов каждой дуги не меньше её веса;

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (проект 04–77–7173) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00395).

3) оба инцидентора каждой дуги окрашены в один из предписанных этой дуге цветов.

При каких условиях на мощность предписаний такая раскраска существует? *Инциденторным предписанным хроматическим числом* назовём такое наименьшее натуральное $\chi_I^{list}(G)$, что для любого предписания, удовлетворяющего условию $|L(e)| \geqslant \chi_I^{list}(G)$ для каждой дуги $e \in E$, допустимая раскраска инциденторов существует. Случай, когда предписания всех дуг совпадают, изучался в [2, 3]. В последней из них, в частности, доказана NP-трудность отыскания инциденторного хроматического числа. Следовательно, и задача нахождения $\chi_I^{list}(G)$ также NP-трудна.

Задача о предписанной раскраске инциденторов была впервые рассмотрена в [1]. В ней было доказано, что если веса всех дуг равны w, то $\chi_I^{list}(G) \leq \Delta(G) + w + 1$. Более того, для мультиграфов чётной степени выполняется неравенство $\chi_I^{list}(G) \leq \Delta(G) + w$. Аналогичное неравенство верно и для случая произвольных весов, что вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 1. *Пусть мультиграф $G = (V, E)$ либо имеет чётную степень, либо содержит паросочетание, покрывающее все вершины максимальной степени. Если для каждой дуги $e \in E$ выполнено соотношение $|L(e)| \geqslant w(e) + \Delta(G)$, то допустимая раскраска инциденторов мультиграфа G существует.*

Это утверждение можно доказать тем же способом, который использовался в [1]. Тем не менее, в следующем разделе оно будет доказано более простым способом с использованием понятия главного цвета.

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф максимальной степени 3, и для каждой дуги $e \in E$ выполняется неравенство $|L(e)| \geqslant w(e) + 3$. Тогда существует допустимая раскраска инциденторов мультиграфа G.*

Эта теорема доказывается в разделе 3.

2. Предварительные результаты

В этом разделе доказывается утверждение 1, а также выводятся некоторые свойства мультиграфов степени 3, необходимые для доказательства основного результата.

Пусть P — путь или цикл (не обязательно ориентированный) в мультиграфе G. Выберем для P направление обхода; допустим, что вершины P проходятся в таком порядке: $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (если P — цикл, то $v_k = v_1$). Пусть $e_i = v_i v_{i+1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Тогда для каждого $i = 1, 2, \ldots, k-1$ инцидентор (v_i, e_i) назовём *нечётным*, а инцидентор

(v_{i+1}, e_i) — *чётным*. Нетрудно видеть, что при движении от v_1 к v_k в выбранном направлении обхода чётные и нечётные инциденторы чередуются; в частности, каждая дуга в P содержит по одному чётному и нечётному инцидентору.

Введём понятие *главного* цвета. Пусть e — некоторая дуга, а цвета a и b являются соответственно наименьшим и наибольшим в $L(e)$. Тогда цвет a является главным для начального, а b — для конечного инцидентора дуги e. Ключевую роль в настоящей статье играет следующее простое наблюдение.

Утверждение 2. *Пусть предписание в мультиграфе $G = (V, E)$ удовлетворяет соотношению $|L(e)| \geqslant w(e) + \Delta(G)$ для каждой дуги $e \in E$. Предположим, что существует допустимая раскраска некоторого множества инциденторов мультиграфа G, при которой инцидентор i дуги e остаётся неокрашенным, а сопряжённый с i инцидентор окрашен в главный цвет. Тогда эту раскраску можно продолжить и на инцидентор i.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что инцидентор i является конечным. Тогда сопряжённый к нему инцидентор окрашен в цвет a, являющийся наименьшим в $L(e)$. По условию $L(e)$ содержит хотя бы $\Delta(G)$ цветов, превосходящих a как минимум на $w(e)$. Из них не более чем $\Delta(G) - 1$ цветов использованы для окраски инциденторов, смежных с i. Следовательно, инцидентор i можно докрасить в оставшийся цвет, не нарушая допустимости раскраски. Утверждение 2 доказано.

Нам потребуется следующий известный результат [4] о существовании 2-факторов.

Теорема 2 (Петерсена). 1) *В однородном мультиграфе чётной степени существует 2-фактор.*

2) *В кубическом мультиграфе не более чем с двумя перешейками существует 2-фактор.*

Из теоремы Петерсена следует, что мультиграф максимальной степени $2k$ разбивается на k подграфов максимальной степени 2. Теперь можно легко доказать утверждение 1.

Доказательство утверждения 1. По условию утверждения 1 имеем $G = (\cup F_i) \cup M$, где степень каждого подграфа F_i не превосходит 2, а M является паросочетанием, если степень графа G нечётна, и пустым в противном случае. Применим индукцию по $\Delta(G)$. При $\Delta(G) \leq 1$ утверждение очевидно. Пусть теперь $\Delta(G) \geqslant 2$. Рассмотрим подграф F_1. Для каждой его компоненты связности (пути или цикла) выберем направление обхода и окрасим все нечётные инциденторы в главные цвета. Для каждой дуги $e \notin F_1$ удалим из $L(e)$ цвета, использованные для окраски инциденторов, примыкающих к её концам (ясно, что число таких цветов будет не более двух для каждой дуги). Полученное предписание обозначим через $L'(e)$. Удалим из G дуги подграфа F_1. Получим мультиграф G' степени $\Delta(G') = \Delta(G) - 2$, в котором предписание каждой дуги e удовлетворяет соотношению $|L'(e)| \geqslant w(e) + \Delta(G) - 2 = w(e) + \Delta(G')$. По индукции существует допустимая раскраска инциденторов мультиграфа G', а по утверждению 2 её можно продолжить до допустимой раскраски мультиграфа G. Утверждение 1 доказано.

Описанный выше способ раскраски путей или циклов в мультиграфе в дальнейшем будем называть *стандартным.* Формально, при стандартной раскраске пути или цикла P выбирается некоторое направление обхода, нечётные инциденторы красятся в главные цвета и все дуги P удаляются. Кроме того, из предписания каждой дуги, не лежащей в P, удаляются использованные при её концах цвета. По утверждению 2 чётные инциденторы дуг из P могут быть докрашены по окончании раскраски всех остальных инциденторов мультиграфа.

Для доказательства основного результата нам потребуются некоторые свойства неориентированных кубических мультиграфов.

Лемма 1. *Пусть $e = uv \in E$ — некоторое ребро двусвязного кубического мультиграфа $G = (V, E)$. Тогда в G существует 2-фактор F, содержащий e, и 2-фактор F', не содержащий e.*

Доказательство. Сначала покажем наличие в G 2-фактора F'. Применим индукцию по числу вершин в G. Для двухвершинного мультиграфа утверждение очевидно. Допустим, что в G имеется более двух вершин. Рассмотрим мультиграф $H = G \setminus e$. Если H является двусвязным, то построим вспомогательный мультиграф H' следующим образом: добавим вершины u', v', w, x, y, z и рёбра $uu', vv', u'w, u'x, v'y, v'z$, а также по два ребра xw и zy. Получится кубический мультиграф с двумя перешейками uu' и vv'. По теореме Петерсена в нём есть 2-фактор F''. Поскольку, очевидно, $uu' \notin F''$ и $vv' \notin F''$, то ограничение 2-фактора F'' на H даёт искомый 2-фактор F'.

Предположим теперь, что в H имеются перешейки. Заметим, что любой путь, соединяющий u и v, проходит через все перешейки мультиграфа H (так как в противном случае они были бы перешейками и в G, что противоречит его двусвязности). Удалим из мультиграфа H все перешейки. Тогда каждая компонента связности полученного мультиграфа является двусвязной и имеет ровно две вершины степени 2. Соединим эти вершины ребром e_i. По индукции в полученном двусвязном кубическом мультиграфе найдётся 2-фактор F_i', не содержащий ребра e_i. Тогда F' получается объединением всех F_i'.

Для построения 2-фактора F достаточно рассмотреть любое ребро e', смежное с e. Тогда 2-фактор, избегающий e', должен пройти через e. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть $e = uv \in E$ — некоторое ребро двусвязного кубического мультиграфа $G = (V, E)$. Тогда в G существует совершенное паросочетание, содержащее ребро e.*

Лемма 2. *Пусть $G = (V, E)$ — двусвязный кубический мультиграф, $v_0 \in V$ и $e = uv \in E$. Тогда в G существует паросочетание M, покрывающее все вершины G, кроме v_0 и одного из концов ребра e.*

Доказательство. Если v_0 является одним из концов ребра e, то утверждение вытекает из следствия 1. Достаточно рассмотреть совершенное паросочетание, содержащее e, и удалить из него указанное ребро. Предположим, что v_0 не совпадает ни с u, ни с v. Пусть w — смежная с v_0 вершина, отличная от u и v. Удалим из мультиграфа G рёбра $e = uv$, v_0w и добавим к нему вершины s и t, а также рёбра sv_0, sw, st, tu и tv. Получим двусвязный кубический мультиграф G'. По следствию 1 в G' найдётся совершенное паросочетание M', содержащее ребро v_0s. Тогда M' должно также содержать одно из рёбер tu или tv. Следовательно, ограничение паросочетания M' на G даст искомое паросочетание M. Лемма 2 доказана.

3. Доказательство основного результата

Теперь мы готовы приступить к доказательству теоремы 1.

Предположим, что теорема неверна. Тогда среди всех контрпримеров к ней выберем мультиграф G с наименьшим количеством вершин. Если в G есть вершина степени 1, то её можно удалить, окрасив примыкающий к ней инцидентор в главный цвет. Тогда оставшийся мультиграф можно докрасить по выбору G и утверждению 2. Предположим теперь, что $\delta(G) \geqslant 2$. Можно считать, что в G степени всех вершин, за исключением, возможно, одной, равны 3 (иначе в него добавляется дуга веса 0 с произвольным предписанием мощности 3, соединяющая две вершины степени 2). Если мультиграф G кубический, то полагаем $G_0 = G$. В противном случае кубический мультиграф G_0 строится следующим образом. Вершину степени 2 в G обозначим через x. Рассмотрим копию $\bar{G}$ мультиграфа G и соединим вершины x и $\bar{x}$ дугой веса 0 с произвольным предписанием мощности 3. Если $x\bar{x}$ является единственным перешейком в G_0, то по теореме Петерсена в G_0 есть совершенное паросочетание. Но тогда по утверждению 1 в G_0 (а значит и в G) существует допустимая раскраска, что противоречит выбору G. Следовательно, в G_0 есть и другие перешейки. Таким образом, перешейки найдутся и в G. Тогда в мультиграфе G должен найтись блок, не содержащий вершину x, которому инцидентен лишь один перешеек. Обозначим такой блок через G', а инцидентный ему перешеек через $\bar{e} = yz$, где $z \in G'$. Удалим из G все вершины блока G' кроме z. По выбору G в полученном мультиграфе существует допустимая раскраска инциденторов. Покажем, что её можно продолжить на весь мультиграф G. Цвет инцидентора $(z, \bar{e})$ обозначим через α. Вершина z имеет в G' степень 2. Двух её соседей обозначим через u_1 и u_2, а соединяющие их с z дуги — через e_1 и e_2 соответственно. Через H обозначим вспомогательный неориентированный двусвязный кубический мультиграф, получающийся из G' после дезориентации всех дуг, удаления вершины z и добавления ребра $e = u_1u_2$.

Предположим, что цвет α не является главным для инцидентора (z, e_1). По лемме 1 в H найдётся 2-фактор, проходящий через e. Ему соответствует 2-фактор F в G', проходящий через z. Для каждой компоненты этого 2-фактора выберем направление обхода, причём для компоненты, содержащей z, сделаем это таким образом, чтобы инцидентор (z, e_1) был нечётным. Окрасим F стандартным образом и удалим его дуги из G'. Поскольку предписание каждой дуги оставшегося паросочетания уменьшилось на 2, инциденторы этих дуг можно докрасить. Для этого достаточно окрасить начальный инцидентор каждой дуги паросочетания в наименьший из оставшихся цветов, а конечный — в наибольший из них. По утверждению 2 эту раскраску можно продолжить до допустимой раскраски всего G'.

Если цвет α не является главным для инцидентора (z, e_2), то раскраска G' строится аналогично. Поэтому можно считать, что цвет α является главным для обоих инциденторов (z, e_1) и (z, e_2) (т. е. в дальнейшем при раскраске этих инциденторов главный цвет использовать нельзя).

Введём ещё один способ допустимой окраски дуги. Пусть предписание $L(e)$ некоторой дуги e содержит цвета $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$, где $k = |L(e)|$. Начальный инцидентор дуги e окрасим цветом α_2, а конечный — цветом α_{k-1}. Тогда $\alpha_{k-1} - \alpha_2 \geqslant (k-1) - 2 = |L(e)| - 3 \geqslant w(e)$. Такую раскраску дуги будем называть *особой*. Её особенность заключается в том, что ни один из инциденторов дуги e не окрашен в главный цвет.

Допустим теперь, что инциденторы (z, e_1) и (z, e_2) не являются однотипными. По лемме 1 в H найдётся 2-фактор F', не проходящий через e. Тогда F' красится стандартно, а паросочетание $(G' \setminus z) \setminus F'$ — как в предыдущем случае. Для каждого $i = 1, 2$ инцидентор (u_i, e_i) окрашивается в главный цвет, если он не был использован при u_i во время раскраски 2-фактора F'; в противном случае дуга e_i красится особым образом. Поскольку инциденторы (z, e_1) и (z, e_2) разнотипны, а их главные цвета совпадают, то даже если обе дуги e_1 и e_2 раскрашены особым образом, эти инциденторы получат разные цвета.

Таким образом, инциденторы (z, e_1) и (z, e_2) являются однотипными. Можно считать, что оба они — конечные. Рассмотрим два случая.

Случай 1. В $G' \setminus z$ найдётся такая вершина v_0, что не все главные цвета примыкающих к ней инциденторов совпадают. По лемме 2 в мультиграфе H найдётся паросочетание M, покрывающее все вершины, кроме v_0 и одного из концов ребра e. Для определённости будем считать, что M оставляет непокрытой вершину u_1 (если $v_0 \in \{u_1, u_2\}$, то обе вершины u_1 и u_2 останутся непокрытыми). В мультиграфе $G' \setminus M$ вершины v_0 и u_1 имеют степень 3, а все остальные вершины — степень 2. Компоненту связности этого мультиграфа, содержащую v_0 и u_1, обозначим через C. Все остальные компоненты (если они есть) красятся стандартным образом. Опишем раскраску компоненты C. Эта компонента может иметь одну из двух конфигураций, изображённых на рис. 1.

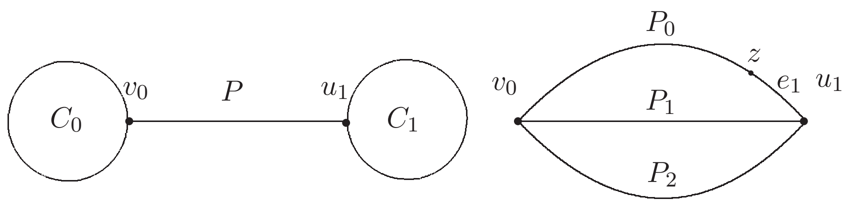

Рис. 1. Возможная структура компоненты C

Подслучай 1*a*. Компонента C такая, как на рис. 1 слева. Обозначим через C_0 и C_1 циклы, содержащие v_0 и u_1 соответственно, а через P — соединяющий эти вершины путь. Пусть вершине v_0 инцидентны дуги e_0, e' и e'', причём e_0 — дуга пути. По выбору v_0 главный цвет инцидентора (v_0, e_0) не совпадает с главным цветом хотя бы одного из двух других примыкающих к v_0 инциденторов (скажем, с главным цветом инцидентора (v_0, e')). Тогда для цикла C_0 направление обхода выбирается так, чтобы инцидентор (v_0, e') оказался нечётным, после чего цикл красится стандартно. Дальнейшая раскраска компоненты C зависит от положения вершины z. Если она лежит на цикле C_1, то путь P красится стандартно в направлении от v_0 к u_1, затем путь $C_1 \setminus e_1$ красится стандартно в направлении от u_1 к z. Если же вершина z лежит на пути P, то путь $P \setminus e_1$ красится стандартно в направлении от v_0 к z, затем цикл C_1 красится стандартно. При этом в обоих вариантах либо инцидентор (u_1, e_1) красится в главный цвет (если этот цвет не был использован при u_1), либо дуга e_1 красится особым образом. Поскольку предписание каждой дуги паросочетания M уменьшилось не более чем на 2 цвета, то его можно окрасить, как описано ранее.

Подслучай 1*б*. Компонента C такая, как на рис. 1 справа. Три пути, соединяющие v_0 и u_1, обозначим через P_0, P_1 и P_2, а инцидентные вершине v_0 дуги этих путей — через e_0, e' и e'' соответственно. Можно считать, что вершина z лежит на пути P_0. Тогда путь $P_0 \setminus e_1$ красится стандартно в направлении от v_0 к z. Как и ранее, можно считать, что главный цвет инцидентора (v_0, e_0) не равен главному цвету инцидентора (v_0, e'). Тогда путь P_1 красится стандартно в направлении от v_0 к u_1, а P_2 — в направлении от u_1 к v_0. Раскраска дуги e_1 и паросочетания M производится также как и в подслучае 1*a*.

Случай 2. Для каждой вершины главные цвета примыкающих к ней инциденторов совпадают. Покажем, что в G' найдётся вершина v_1, не являющаяся ни источником, ни стоком. Действительно, в противном случае G' был бы двудольным. Все источники имели бы степень 3, а значит, и число рёбер было бы кратно трём. С другой стороны, среди стоков есть вершина z степени 2, тогда как остальные стоки имели бы степень 3. Следовательно, $|E(G')| \equiv 2 \pmod 3$, пришли к противоречию. Дуги, инцидентные вершине v_1, обозначим через e_0, e' и e'', причём через e_0 — ту из них, которая не сонаправлена двум другим дугам. Пусть v_0 — второй конец дуги e_0.

Отдельно рассмотрим случай, когда $v_0 = z$. Тогда $v_1 \in \{u_1, u_2\}$. Можно считать, что $v_1 = u_1$, т. е. $e_0 = e_1$. По лемме 1 в H найдётся 2-фактор, проходящий через e. Ему соответствует 2-фактор F в G', проходящий через z. Обозначим через e' инцидентную вершине u_1 дугу, не лежащую в F. Пусть C — компонента 2-фактора F, содержащая вершину z. Компоненты F, отличные от C (если они есть), красятся стандартно. Путь $C \setminus e_1$ красится стандартно в направлении от u_1 к z. Все остальные дуги мультиграфа G' красятся особым образом. Поскольку инциденторы (u_1, e_1) и (u_1, e') разнотипны, а их главные цвета совпадают, то такая раскраска будет допустимой.

Пусть теперь $v_0 \neq z$. По лемме 2 в мультиграфе H найдётся паросочетание M, покрывающее все вершины, кроме v_0 и одного из концов ребра e (скажем, u_1). Компоненту связности мультиграфа $G' \setminus M$, содержащую вершины v_0 и u_1, обозначим через C. Поскольку v_0 имеет в C степень 3, то дуга e_0 и вершина v_1 также лежат в C. Без ограничения общности можно считать, что $e' \in M$. Компоненты мультиграфа $G' \setminus M$, отличные от C (если таковые найдутся), красятся стандартно. Как и в случае 1 компонента C может быть двух видов.

Подслучай 2а. Компонента C такая, как на рис. 1 слева. Будем использовать те же обозначения C_0, C_1 и P, что и в подслучае 1*а*. Компонента C_1 и дуга e_1 красятся в зависимости от того, лежит ли z на цикле C_1 или пути P. Раскраска производится также, как и в подслучае 1*а*. Раскраска цикла C_0 и пути P зависит от положения дуги e_0. Если e_0 лежит на цикле C_0, то путь $C_0 \setminus e_0$ красится стандартно в направлении от v_1 к v_0, а путь P — в направлении от v_0 к u_1. Если же дуга e_0 лежит на пути P, то цикл C_1 красится стандартно в произвольном направлении, а путь $P \setminus e_0$ — стандартно в направлении от v_1 к u_1. В обоих случаях дуга e_0 красится особым образом. Покажем, что все дуги из M также можно окрасить особым образом. Для любой дуги паросочетания, отличной от e', это очевидно, так как в раскраске инциденторов мультиграфа $G' \setminus M$ при её концах были использованы только главные цвета. При концах же дуги e' были также использованы оба главных цвета, но кроме того был использован ещё и один из неглавных цветов дуги e_0. Но так как инциденторы (v_0, e_0) и (v_0, e') разнотипны, а их главные цвета совпадают, то ни один из неглавных цветов дуги e_0 не может лежать в $L(e')$. Следовательно, дугу e' также можно окрасить особым образом.

Подслучай 2б. Компонента C такая, как на рис. 1 справа. Путь, содержащий вершину z, обозначим через P_0. Дуги e_0 и e_1 красятся особым образом. Если $e_0 \in P_0$, то цикл $C \setminus P_0$ красится стандартным образом в произвольном направлении, а путь $P_0 \setminus \{e_0, e_1\}$ — в направлении от v_1 к z. Если же $e_0 \notin P_0$, то путь $P_0 \setminus e_1$ красится стандартным образом в направлении от v_0 к z, а путь $(C \setminus P_0) \setminus e_0$ — в направлении от v_1 к v_0. Все дуги паросочетания M красятся особым образом (то, что это можно сделать, показывается также как и в подслучае 2*а*).

Таким образом, из утверждения 2 следует существование допустимой раскраски мультиграфа G, что противоречит его выбору. Теорема 1 доказана.

Благодарность. Автор благодарит рецензента за существенное упрощение доказательства леммы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Раскраска инциденторов мультиграфа в предписанные цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 1. С. 32–39.
2. **Визинг В. Г.** Об оценках инциденторного хроматического числа взвешенного ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 4. С. 18–25.
3. **Визинг В. Г., Пяткин А. В.** О раскраске инциденторов в ориентированном взвешенном мультиграфе // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 1. С. 33–44.
4. **Ловас Л., Пламмер М.** Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. М.: Мир, 1998.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2,
630090 Новосибирск,
Россия.
E-mail: artem@math.nsc.ru

Статья поступила
27 февраля 2007 г.

Переработанный вариант —
30 марта 2007 г.