ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2007. Серия 1. Том 14, № 4. 16–26

УДК 519.718

О МУЛЬТИРАСКРАСКЕ ВЕРШИН ВЗВЕШЕННЫХ ГРАФОВ*)

В. Г. Визинг

Рассматривается обобщение задачи раскраски вершин графа на случай взвешенных графов, у которых каждая вершина имеет вес, выражаемый натуральным числом. Мультираскраска состоит в том, что каждой вершине сопоставляется интервал цветов, длина которого равна весу вершины; этот интервал называется мультицветом вершины. При правильной мультираскраске мультицвета смежных вершин не пересекаются. Минимальное число цветов, необходимое для правильной мультираскраски всех вершин, называется мультихроматическим числом графа. Для мультихроматических чисел доказывается ряд утверждений, являющихся обобщением соответствующих утверждений для хроматических чисел.

Введение

К понятию правильной мультираскраски вершин взвешенного графа приводит, например, такая задача. Предположим, что в вершинах графа нужно выполнить некоторые работы различной целочисленной длительности, причём в смежных вершинах работы не могут выполняться одновременно. Требуется выполнить все работы за минимальное время. Будем считать моменты времени цветами, а длительность работы в вершине весом этой вершины. Каждой вершине нужно сопоставить мультицвет — интервал цветов, длина которого равна весу вершины, причём мультицвета смежных вершин не должны пересекаться. Общее число использованных при этом цветов нужно минимизировать.

Частным случаем этой задачи является задача минимальной мультираскраски взвешенных рёбер мультиграфа [1]. Рёбра можно интерпретировать как сообщения соответствующей длительности, которыми должны обменяться вершины, причём каждая вершина не может заниматься одновременно двумя или более сообщениями. В [1] доказана теорема, обобщением которой является теорема 3 настоящей статьи. Кроме того, в [1] показано, что если граф является деревом, то для мультираскраски

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (проект 04–77–7173).

его рёбер достаточно $\Delta + w_1 - 1$ цветов, где Δ — максимальная взвешенная степень вершины, а w_1 — максимальный вес ребра.

Аналогичную интерпретацию имеет и задача тотальной мультираскраски мультиграфа, в котором и вершины и рёбра имеют веса.

В настоящей статье мы будем заниматься только мультираскраской вершин.

1. Мультихроматическое число

Не определяемые в статье понятия теории графов можно найти в [4].

Под *взвешенным графом* $G = (V, W, E)$ понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных рёбер, в котором V — множество вершин, E — множество рёбер , W — функция: $V \to Z^+$; если $W(v) = w$, то w — вес вершины $v \in V$. Граф G называется *обыкновенным*, если веса всех его вершин равны 1.

Будем считать, что цвета — это натуральные числа. Под интервалом $[a, b]$, где a, b цвета и $a \leqslant b$, понимается множество цветов c, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant c \leqslant b$; число $b - a + 1$ называется *длиной* интервала.

Введём понятие мультираскраски вершин графа. *Мультираскраска* φ — это функция, ставящая в соответствие каждой вершине интервал, длина которого равна весу вершины; этот интервал называется *мультицветом*, в который окрашена вершина. Число цветов, входящих в мультицвет, называется мощностью мультицвета. Наименьший (наибольший) цвет, принадлежащий мультицвету вершины, называется *наименьшим* (*наибольшим*) цветом вершины. Мультираскраска называется *правильной*, если мультицвета смежных вершин не пересекаются. *Мультихроматическим числом* $\mu(G)$ взвешенного графа G называется наименьшее число цветов, необходимое для правильной мультираскраски всех вершин графа G. Правильную мультираскраску всех вершин графа G с помощью $\mu(G)$ цветов будем называть минимальной мультираскраской вершин графа G.

Ясно, что если G — обыкновенный граф, то $\mu(G) = \chi(G)$, где $\chi(G)$ — хроматическое число графа G.

По известной теореме Витавера [2] хроматическое число графа — это наименьшее натуральное k такое, что существует бесконтурная ориентация рёбер графа, при которой длина наибольшего простого пути равна $k - 1$. Этот результат можно обобщить на мультираскраски.

Введём необходимые понятия. Пусть H — бесконтурный ориентированный граф, вершины которого имеют веса. Рассмотрим какой-либо путь в H. *Весом пути* назовём суммарный вес его вершин. *Высотой*

$t(x)$ вершины x назовём наибольший вес пути, конечной вершиной которого является x, а *высотой* $T(H)$ *орграфа* H — наибольшую высоту его вершины.

Пусть теперь G — взвешенный неориентированный граф. Назовём *оптимальной* такую бесконтурную ориентацию графа G, при которой высота взвешенного орграфа является наименьшей. Высоту взвешенного орграфа при оптимальной ориентации графа G будем называть *высотой взвешенного графа* G и обозначать через $\tau(G)$.

Нам потребуется ещё один вид бесконтурной ориентации графа, называемой *хроматической ориентацией*. Пусть имеется правильная мультираскраска графа G. При хроматической ориентации рёбра ориентируются следующим образом. Пусть $e = uv$ — произвольное ребро, причём вершина u окрашена в мультицвет $[a^{'}, b^{'}]$, вершина v — в мультицвет $[a^{''}, b^{''}]$. Так как вершины u и v смежны, то их мультицвета не пересекаются. Ориентируем ребро e от u к v, если $b^{'} < a^{''}$, и от v к u, если $b^{''} < a^{'}$.

Теорема 1. *Пусть* $G = (V, W, E)$ *— взвешенный граф. Тогда* $\mu(G) = \tau(G)$.

Доказательство. Сначала докажем, что $\tau(G) \leqslant \mu(G)$. Рассмотрим минимальную мультираскраску вершин графа G. Построим хроматическую ориентацию графа G; полученный орграф обозначим через $G^{'}$. Рассмотрим путь наибольшего веса в орграфе $G^{'}$. Вес любой вершины этого пути равен мощности её мультицвета, а так как мультицвета различных вершин пути не пересекаются (так как наименьший цвет последующей вершины больше наибольшего цвета предыдущей) и включаются в $[1, \mu(G)]$, то вес пути не больше $\mu(G)$. Следовательно, $\tau(G) \leqslant T(G^{'}) \leqslant \mu(G)$.

Теперь докажем обратное неравенство $\mu(G) \leqslant \tau(G)$. Построим оптимальную ориентацию G; полученный орграф обозначим через $G^{''}$. Осуществляем мультираскраску всех вершин графа G следующим образом. Пусть v — произвольная вершина веса w, которая в орграфе $G^{''}$ имеет высоту $t(v)$. Окрашиваем v в мультицвет $[t(v)-w+1, t(v)]$. Тогда мультицвета всех вершин включаются в $[1, \tau(G)]$. Покажем, что мультицвета любых двух смежных вершин графа G не пересекаются. Пусть (x, y) — произвольная дуга в $G^{''}$. Тогда $t(y) \geqslant t(x) + W(y)$ или $t(y) - W(y) + 1 > t(x)$. Но вершина x окрашена в мультицвет $[t(x) - W(x) + 1, t(x)]$, а вершина y — в мультицвет $[t(y) - W(y) + 1, t(y)]$. Так как $t(y) - W(y) + 1 > t(x)$, то мультицвета вершин x и y не пересекаются. Таким образом, полученная мультираскраска с помощью цветов из $[1, \tau(G)]$ является правильной. Следовательно, $\mu(G) \leqslant \tau(G)$. Теорема 1 доказана.

Введём понятие взвешенной плотности графа. Пусть G — взвешенный граф. *Взвешенная плотность* $\omega(G)$ — это наибольший суммарный вес вершин, который может иметь полный подграф графа G. Так как мультихроматическое число полного графа равно сумме весов его вершин, то справедлива

Теорема 2. *Пусть G — взвешенный граф. Тогда $\mu(G) \geqslant \omega(G)$.*

Следствие 1. *Пусть G — взвешенный двудольный граф. Тогда $\mu(G) = \omega(G)$.*

Доказательство. Если в G нет ни одного ребра, то его взвешенная плотность и мультихроматическое число графа G равны максимальному весу вершины. Если в G есть рёбра, то ориентируем их так, что начало каждой дуги принадлежит первой доле, а конец — второй доле. Высота получившегося орграфа $G^{'}$ равна $\omega(G)$. В силу теорем 1 и 2 имеем $\omega(G) \leqslant \mu(G) = \tau(G) \leqslant T(G^{'}) = \omega(G)$. Отсюда следует, что $\mu(G) = \omega(G)$. Следствие 1 доказано.

Аналогично доказывается

Следствие 2. *Если G — взвешенный полный k-дольный граф, то $\mu(G) = \omega(G)$.*

Введём понятие *веса окрестности вершины*. Пусть $G = (V, W, E)$ — взвешенный граф. Окрестностью вершины v называется подмножество вершин, состоящее из вершины v и всех смежных с ней вершин. Через $p(v)$ будем обозначать вес окрестности вершины v, т. е. суммарный вес вершин, принадлежащих окрестности вершины v. *Максимальный вес окрестности вершины* в графе G будем обозначать через $P(G)$. Очевидно, что если H — полный взвешенный граф, то вес окрестности любой его вершины равен $P(H) = \omega(H)$. Поэтому для любого взвешенного графа G имеет место неравенство $P(G) \geqslant \omega(G)$.

Следствие 3. *Пусть $G = (V, W, E)$ — взвешенный граф, являющийся простым циклом нечётной длины. Тогда $\mu(G) = \max\{\omega(G), p_0\}$, где p_0 — минимальный вес окрестности вершины в графе G.*

Доказательство. Обозначим для краткости $a = \max\{\omega(G)\ , p_0\}$. В силу теоремы 1 достаточно доказать, что $\tau(G) = a$. Сначала установим, что $\tau(G) \geqslant a$. Неравенство $\tau(G) \geqslant \omega(G)$ следует из теорем 1 и 2. Покажем, что $\tau(G) \geqslant p_0$. Рассмотрим оптимальную ориентацию графа G. Пусть $G^{'}$ — орграф, полученный в результате этой ориентации. В силу нечётности цикла в $G^{'}$ существует путь, длина которого не меньше 2. Если v — вершина в таком пути, отличная от начальной и конечной, то $T(G') \geqslant p(v) \geqslant p_0$. Таким образом, $\tau(G) \geqslant a$.

Пусть теперь v_0 — вершина G, для которой $p(v) = p_0$. Рассмотрим такую бесконтурную ориентацию графа G, в результате которой получается орграф G'', один путь которого, содержащий вершину v_0 в качестве «внутренней», имеет длину 2, а все остальные пути имеют длину 1. Легко видеть, что $T(G'') = a$. Так как по доказанному выше $\tau(G) \geqslant a$, то рассмотренная ориентация является оптимальной. Поэтому $\tau(G) = a$. Следствие 3 доказано.

Легко видеть, что если G является простым циклом нечётной длины и p_0 — минимальный вес окрестности вершины, то равенство $P(G) = \max\{\omega(G), p_0\}$ выполняется тогда и только тогда, когда $p_0 = P(G)$. Поэтому из следствия 3 вытекает

Следствие 4. *Пусть $G = (V, W, E)$ — взвешенный граф, являющийся простым циклом нечётной длины. Равенство $\mu(G) = P(G)$ выполняется тогда и только тогда, когда все вершины имеют одинаковый вес окрестности, равный $P(G)$.*

2. Верхняя оценка мультихроматического числа

Теорема 3. *Пусть $G = (V, W, E)$ — взвешенный граф. Существует правильная мультираскраска всех вершин графа, при которой мультицвет каждой вершины v принадлежит интервалу $[1, p(v)]$.*

Доказательство. Опишем алгоритм построения требуемой мультираскраски. Сначала определимся с терминологией. Предположим, что окрашено некоторое подмножество (возможно, пустое) вершин графа, и пусть u — неокрашенная вершина. Цвет называется *свободным* для вершины u, если он не принадлежит ни одному мультицвету вершин, смежных с u; в противном случае цвет называется *занятым* для вершины u.

Алгоритм работает до тех пор, пока все вершины не окажутся окрашенными. Общий шаг алгоритма состоит в следующем. Рассмотрим неокрашенную вершину с наименьшим свободным цветом. Если это цвет c, а вершина имеет вес w, то окрашиваем вершину в мультицвет $[c, c+w-1]$.

Покажем, что алгоритм строит правильную мультираскраску вершин. Пусть x и y — произвольные смежные вершины, веса которых равны w' и w'' соответственно. Предположим, что алгоритм раньше раскрасил вершину x в мультицвет $[a, a+w'-1]$, а потом вершину y в мультицвет $[b, b + w'' - 1]$. Перед окраской вершины x цвет a являлся наименьшим свободным цветом для всех ещё неокрашенных вершин; поэтому минимальный свободный для вершины y цвет перед окраской вершины x был не меньше a. После окраски вершины x минимальный свободный для y цвет стал больше $a + w' - 1$. Следовательно, $b > a + w' - 1$. Значит, мультицвета вершин x и y не пересекаются. Так что алгоритм строит правильную мультираскраску всех вершин графа G.

Пусть теперь v — произвольная вершина; обозначим $w = W(v)$. Рассмотрим интервал $[1, p(v)]$. Так как сумма весов смежных с v вершин равна $p(v) - w$, то когда алгоритм приступит к окраске вершины v, интервалу $[1, p(v)]$ будет принадлежать не больше $p(v) - w$ цветов, занятых для вершины v. Поэтому минимальный свободный для v цвет c будет удовлетворять неравенству $c \leqslant p(v) - w + 1$. Вершина v будет окрашена в мультицвет $[c, c + w - 1]$. Но $c + w - 1 \leqslant p(v)$, т. е. мультицвет вершины v включается в интервал $[1, p(v)]$. Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 5. *Для любого взвешенного графа G справедливо неравенство*

$$\mu(G) \leqslant P(G). \tag{1}$$

Заметим, что если G — обыкновенный граф, то $P(G) = \Delta(G) + 1$, где $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины графа G. Поэтому в случае обыкновенного графа неравенство (1) превращается в неравенство

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1. \tag{2}$$

Известная теорема Брукса [5] утверждает, что верхняя оценка (2) для хроматического числа в случае связных графов достигается тогда и только тогда, когда граф является либо полным, либо простым циклом нечётной длины. Что касается мультихроматического числа, то верхняя оценка (1), очевидно, достигается в случае полных взвешенных графов. В следствии 4 приведено условие, при котором оценка (1) достигается в случае простых циклов нечётной длины. Однако исчерпывающее описание связных взвешенных графов, для которых достигается оценка (1), автору неизвестно.

Замечание 1. Как отметил рецензент, дословный аналог теоремы Брукса для мультираскрасок не имеет места. Действительно, рассмотрим цикл длины 5, веса вершин которого (в порядке обхода) таковы: $2, 1, 2, 2, 1$. Возьмём три копии такого цикла и теугольник с весами $1, 1, 1$. Соединим ребром первую вершину каждого 5-цикла с одной вершиной треугольника так, чтобы в результате каждая вершина тереугольника имела степень 3. Получится связный граф, отличный от полного графа и простого цикла нечётной длины, для которого $\mu(G) = P(G) = 5$.

3. Мультихроматическое число объединения графов

Пусть $G_1 = (V, W, E_1)$ и $G_2 = (V, W, E_2)$ — взвешенные графы с одним и тем же множеством вершин. Граф $G_1 \cup G_2 = (V, W, E_1 \cup E_2)$ называется их *объединением*.

Теорема 4. *Пусть $G_1 = (V, W, E_1)$, $G_2 = (V, W, E_2)$ — взвешенные графы, w_0 — минимальный вес вершины. Тогда*

$$\mu(G_1 \cup G_2) \leqslant \mu(G_1) \cdot \mu(G_2)/w_0. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим: $H = G_1 \cup G_2$, $E = E_1 \cup E_2$, $\mu_1 = \mu(G_1)$, $\mu_2 = \mu(G_2)$, $q = \lfloor \mu_1/\omega_0 \rfloor$. Построим минимальную мультираскраску вершин графа G_1. Множество вершин V разобьём на классы $V_1, V_2, \ldots, V_q$, относя к классу V_i вершины, наименьший цвет которых принадлежит интервалу $[(i-1)w_0 + 1, iw_0]$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Вершины одного класса попарно не смежны в G_1, так как их мультицвета пересекаются. Построим оптимальную ориентацию рёбер графа G_2, полученный орграф обозначим через $G_2^{'}$. Затем построим бесконтурную ориентацию графа H, руководствуясь следующим правилом. Пусть $e = xy \in E$. Если вершины x и y принадлежат одному классу V_j, $1 \leqslant j \leqslant q$, то $e \in E_2$, и ребру e придаём ту же ориентацию, которую оно получило при оптимальной ориентации графа G_2. Если же x и y принадлежат разным классам V_i, то e ориентируем так, чтобы получившаяся дуга исходила из вершины, лежащей в классе с меньшим индексом. Получившийся в результате указанной ориентации бесконтурный орграф обозначим через $H^{'}$. Покажем, что $T(H^{'}) \leqslant q \cdot \mu_2$. Рассмотрим произвольный путь в $H^{'}$. Разобьём его на участки, каждый из которых состоит из вершин, принадлежащих одному классу V_i. Вес каждого участка не больше $\tau(G_2)$, так как граф G_2 был ориентирован оптимальным образом. А так как число участков не больше q, то вес всего пути не больше $\tau(G_2) \cdot q$. Значит, $\tau(H) \leqslant T(H^{'}) \leqslant \tau(G_2) \cdot q$. Но по теореме 1 имеем $\tau(G_2) = \mu(G_2)$, $\tau(H) = \mu(H)$. Следовательно,

$$\mu(H) \leqslant \mu(G_2) \cdot q = \mu(G_2) \cdot \lfloor \mu(G_1)/w_0 \rfloor. \tag{4}$$

Отсюда следует (3). Теорема 4 доказана.

Теорема 4 является обобщением теоремы Зыкова [3] о хроматическом числе объединения обыкновенных графов.

Замечание 2. Из формулы (4) видно, что неравенство (3) можно заменить неравенством

$$\mu(G_1 \bigcup G_2) \leqslant \min\{\mu(G_2)\lfloor \mu(G_1)/w_0 \rfloor, \mu(G_1)\lfloor \mu(G_2)/w_0 \rfloor\}.$$

4. О мультихроматических числах дополнительных графов

Е. Нордхауз и Дж. Гаддум [6] получили оценки для суммы и произведения хроматических чисел обыкновенного графа и его дополнения. Если G — обыкновенный n-вершинный граф, $\overline{G}$ — его дополнение, то неравенства Нордхауза и Гаддума имеют вид: $2\sqrt{n} \leqslant \chi(G)+\chi(\overline{G}) \leqslant n+1$; $n \leqslant \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leqslant ((n+1)/2)^2$.

Аналогичные неравенства для мультихроматических чисел содержит

Теорема 5. *Пусть $G = (V, W, E)$ — взвешенный граф, w_1 — максимальный, а w_0 — минимальный вес вершины и $S(G)$ — суммарный вес вершин. Тогда*

$$2\sqrt{\omega_0 S(G)} \leqslant \mu(G) + \mu(\overline{G}) \leqslant S(G) + w_1, \tag{5}$$

$$w_0 S(G) \leqslant \mu(G)\mu(\overline{G}) \leqslant ((S(G) + w_1)/2)^2. \tag{6}$$

Доказательство. Так как граф $G \bigcup \overline{G}$ полный, то $\mu(G \bigcup \overline{G}) = S(G)$. В силу теоремы 4 имеем $S(G) = \mu(G \bigcup \overline{G}) \leqslant \mu(G) \cdot \mu(\overline{G})/w_0$. Поэтому $w_0 \cdot S(G) \leqslant \mu(G) \cdot \mu(\overline{G})$. Но среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического, поэтому

$$2\sqrt{\omega_0 \cdot S(G)} \leqslant \mu(G) + \mu(\overline{G}).$$

Следовательно, нижние оценки в (5) и (6) доказаны. Докажем теперь верхнюю оценку в (5), т. е. неравенство

$$\mu(G) + \mu(\overline{G}) \leqslant S(G) + w_1. \tag{7}$$

Пусть граф G имеет n вершин. При $n = 1$ в (7), очевидно, достигается равенство. Пусть $n \geqslant 2$. Пронумеруем вершины в порядке невозрастания их весов; обозначим $w_i = W(v_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Имеем $w_1 \geqslant w_2 \geqslant \ldots \geqslant w_n = w_0$. Построим правильную раскраску (не мультираскраску!) вершин графов G и $\overline{G}$ с помощью следующего алгоритма.

Первый шаг. Вершину v_1 как в графе G, так и в графе $\overline{G}$, окрашиваем в цвет 1. В обоих графах вершину v_1 будем называть главной вершиной цвета 1.

k-й шаг $(2 \leqslant k \leqslant n)$. Рассматриваем вершину v_k. Предположим, что в графах G и $\overline{G}$ уже окрашены вершины $v_1, \ldots, v_{k-1}$ и для их раскраски использованы цвета из интервалов $[1, r'_{k-1}]$ и $[1, r''_{k-1}]$ соответственно. Если в графе G для вершины v_k найдётся свободный цвет из $[1, r'_{k-1}]$, то v_k

окрашиваем в этот свободный цвет и называем v_k второстепенной вершиной этого цвета в графе G; в графе $\overline{G}$ вершину v_k окрашиваем в цвет $r''_{k-1}+1$ и называем главной вершиной цвета $r''_{k-1}+1$ в графе $\overline{G}$. Если в графе G все цвета из $[1, r'_{k-1}]$ окажутся занятыми для вершины v_k, то v_k окрашиваем в цвет $r'_{k-1}+1$ и называем главной вершиной цвета $r'_{k-1}+1$ в графе G; в графе $\overline{G}$ вершину v_k окрашиваем в тот цвет из $[1, r''_{k-1}]$, который является свободным для неё в $\overline{G}$, и называем второстепенной вершиной этого цвета в графе $\overline{G}$ (то, что такой свободный цвет найдётся, показывается ниже).

Алгоритм останавливается после выполнения n шагов. Покажем, что после выполнения k шагов ($2 \leqslant k \leqslant n$) алгоритм правильно раскрашивает вершины v_1, v_2, …, v_k в графах G и $\overline{G}$ с соблюдением следующих условий:

а) в каждом графе среди вершин одного и того же цвета есть одна вершина, называемая главной, вес которой не меньше весов остальных вершин этого цвета, называемых второстепенными;

б) вершина v_1 является главной вершиной цвета 1 в обоих графах; каждая из остальных вершин является главной вершиной только в одном из графов G или $\overline{G}$;

в) цвета, использованные на раскраску вершин в каждом из графов, образуют интервал с левым концом 1.

Докажем это индукцией по k.

Случай 1. $k = 2$. После выполнения первого шага, состоящего в окраске вершины v_1 в цвет 1 и объявления её главной вершиной цвета 1 в обоих графах, алгоритм приступает к окраске вершины v_2. Вершина v_2 смежна с вершиной v_1 только в одном из графов G или $\overline{G}$. В соответствии с алгоритмом в таком графе она окрашивается в цвет 2 и объявляется главной вершиной цвета 2; в другом графе она окрашивается в цвет 1 и объявляется второстепенной вершиной цвета 1. Так как вершины пронумерованы в порядке невозрастания их весов, то условия а), б) и в) выполняются.

Случай 2. $k > 2$. По предположению индукции в результате $k-1$ шага алгоритма вершины v_1, v_2,…, v_{k-1} правильно окрашены в графах G или $\overline{G}$ с соблюдением условий а), б) и в), при этом для окраски вершин графов G и $\overline{G}$ использованы цвета из интервалов $[1, r'_{k-1}]$ и $[1, r_{k-1}]$ соответственно. Так как вершина v_1 является главной в обоих графах, а каждая из остальных вершин — только в одном из них, то

$$r'_{k-1} + r'_{k-1} = k. \tag{8}$$

Пусть $d^{'}$ и $d^{''}$ — степени вершины v_k в графах G и $\overline{G}$ соответственно. Имеет место равенство

$$d^{'} + d^{''} = k - 1. \tag{9}$$

Из (8) и (9) вытекает, что справедливо по меньшей мере одно из неравенств $d^{'} < r^{'}_{k-1}$ или $d^{''} < r^{''}_{k-1}$. Если $d^{'} < r^{'}_{k-1}$, то в G найдётся цвет, свободный для вершины v_k. Алгоритм окрашивает v_k в этот свободный цвет и объявляет v_k второстепенной вершиной этого цвета в графе G. Вершина v_k становится главной вершиной цвета $r_{k-1}+1$ в графе $\overline{G}$. Если в G нет свободного цвета для v_k, то это означает, что $d^{'} \geqslant r^{'}_{k-1}$. Поэтому $d^{''} < r^{''}_{k-1}$ и в графе $\overline{G}$ есть свободный цвет для вершины v_k. Алгоритм окрашивает вершину v_k в графе G в цвет $r^{'}_{k-1}+1$, делая её главной вершиной цвета $r^{'}_{k-1}+1$ в графе G; в графе $\overline{G}$ вершина v_k окрашивается в свободный цвет и объявляется второстепенной. Очевидно, что свойства а), б) и в) выполняются.

После указанной правильной раскраски вершин графов G и $\overline{G}$ сориентируем каждое ребро этих графов так, чтобы получившаяся дуга исходила из вершины меньшего цвета и заходила в вершину большего цвета. Получим бесконтурные орграфы $G^{'}$ и $\overline{G}^{'}$. Вес любого пути в каждом таком графе не больше суммы весов всех главных вершин этого графа. Так как только вершина v_1 является главной вершиной в обоих графах, то $T(G') + T(\overline{G}') \leqslant S(G) + w_1$. Отсюда и из теоремы 1 получаем, что $\mu(G) + \mu(\overline{G}) = \tau(G) + \tau(\overline{G}) \leqslant T(G^{'}) + T(\overline{G}^{'}) \leqslant S(G) + w_1$. Неравенство (7), а значит, и верхняя оценка в (5) доказаны. А так как среднее геометрическое двух положительных чисел не больше их среднего арифметического, то $\mu(G) \cdot \mu(\overline{G}) \leqslant \xi((S(G) + w_1)/2)^2$. Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Об одном обобщении задачи раскраски рёбер мультиграфа // Доклады Одесского семинара по дискретной математике. 2007. № 5. С. 4–6.
2. **Витавер Л. М.** Нахождение минимальных раскрасок вершин графа с помощью булевых степеней матрицы смежности // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 4. С. 758–759.
3. **Зыков А. А.** О некоторых свойствах линейных комплексов // Матем. сборник. 1949. Т. 24, № 2. С. 163–188.
4. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004.
5. **Brooks R. L.** On colouring the nodes of a network //Proc. Cambridge Philos. Soc. 1941. V. 37. P. 194–197.

6. **Nordhaus E. A., Gaddum J. W.** On complementary graphs // Amer. Math. Monthly. 1966. V. 63. P. 175–177.

Адрес автора:

ул. Варненская, 18/2, кв. 26,
65070 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
22 июня 2007 г.

Переработанный вариант —
3 сентября 2007 г.