ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2007. Серия 1. Том 14, № 4. 27–42

УДК 519.858

СОГЛАСОВАННОСТЬ И РАВНОВЕСИЕ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

А. Н. Ляпунов

Результаты статьи носят промежуточный характер между теорией оптимизации и теорией игр. Вводится новое понятие одноточечного решения для задач многокритериальной оптимизации, использующее теоретико-игровые принципы согласованности и равновесия. Выводятся уравнения для этого решения и устанавливаются условия, при которых это решение оптимально по Парето. Устанавливается также, что это решение обладает свойством ковариантности относительно преобразований множества задания критериев. Изложение сопровождается примерами.

Введение

Известно, что любое решение многокритериальной задачи является оптимальным по Парето (эффективным). Это значит, что улучшение такого решения по одному из критериев сопровождается его ухудшением по какому-либо другому критерию. Систематическое исследование Парето-оптимальных решений многокритериальных задач и методы их нахождения содержатся в монографии [7]. Одним из таких методов нахождения решения является свертывание критериев, в частности, максимизация неотрицательной линейной комбинации критериев. Этот подход содержится также в [11, 12]. Другой подход к решению многокритериальных задач состоит в ранжировании критериев. Этому подходу посвящена монография [6], а также работы [8,10].

В [2–5] предложено понятие решения многокритериальной задачи, основанное на теоретико-игровых принципах оптимальности: согласованности и равновесии. Настоящая статья носит промежуточный характер между теорией оптимизации и теорией игр. В статье предлагается обобщение понятия решения, введенного в [2–5] и исследуются его свойства, в частности, устанавливается, что это решение ковариантно относительно преобразования области задания критериев. Принцип согласованности давно используется в математике — достаточно вспомнить согласованную систему мер в теории вероятностей. Принцип согласованности состоит в следующем: задача погружается в класс задач, зависящих от

параметра, после чего постулируется вид зависимости решения от этого параметра. На этом принципе основано динамическое программирование, а также многие принципы оптимальности в кооперативных играх. В нашем случае (п. 2.1) принцип согласованности сводится к непрерывной зависимости решения для отрезка от угла поворота.

Принцип равновесия (лучше было бы говорить об устойчивости) состоит в следующем. Определяется класс возможных отклонений от решения. Решение удовлетворяет принципу равновесия, если при любом возможном отклонении нарушается принцип согласованности. В нашем случае (п. 3.1) принцип равновесия сводится к тому. что принцип согласованности должен выполняться по каждой из переменных.

Прослеживается аналогия с классической оптимизацией: подобно тому, как равенство нулю производной функции является лишь необходимым условием экстремума, решение выведенных в пп. 2.2 и 3.1 уравнений может быть не оптимальным по Парето. Поэтому в п. 2.5 приводится условие оптимальности решения по Парето.

Кроме того, предложенный подход связан с «задачей переговоров» (bargainings) (см. [8, 14, 15]).

В разделе 2 из условия согласованности выводятся уравнения для многокритериальной задачи с одной переменной, устанавливаются условия оптимальности решения в смысле Парето и доказывается, что решение обладает свойством ковариантности относительно преобразования области задания критериев.

В разделе 3 принцип равновесия используется для вывода уравнений для случая нескольких переменных из уравнений для задачи с одной переменной, устанавливаются условия оптимальности решения в смысле Парето и доказывается, что решение обладает свойством ковариантности относительно преобразования области задания критериев. Изложение сопровождается примерами.

1. Предварительные сведения

Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ будем писать $x \geq y$, если $x_j \geqslant y_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — множество.

Определение 1. Точка $x \in X$ называется *оптимальной по Парето* или *Парето-оптимальной*, или *эффективной* в множестве X, если не существует такой точки $y \in X$, что $y \geqslant x$ и $y \neq x$.

Множество Парето-оптимальных точек множества X будем обозначать через $\mathcal{E}(X)$. Если все точки множества X Парето-оптимальны, то будем говорить, что множество X *Парето-оптимально*.

Определение 2. Пусть $f : X \to \mathbb{R}^m$, где $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ — набор критериев. Совокупность $\mathcal{P} = (X, f)$ будем называть *многокритериальной задачей* или просто *задачей*.

Определение 3. Точка $x \in X$ называется *Парето-оптимальной* или *эффективной* для задачи $\mathcal{P}$, если не существует такой точки $y \in X$, что $f(y) \geqslant f(x)$, $f(y) \neq f(x)$. Множество Парето-оптимальных точек в задаче $\mathcal{P}$ будем обозначать через $\mathcal{E}(\mathcal{P}) = \mathcal{E}(X, f)$.

Очевидно, что $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X, f)$, если $f(x) = x$.

Определение 4. *Решением* задачи $\mathcal{P}$ называется отображение s, которое каждой задаче $\mathcal{P}$ из некоторого класса задач ставит в соответствие точку $s = s(\mathcal{P}) \in X$; при этом вектор $v = f(s)$ называется *вектором значений задачи* $\mathcal{P}$ или просто *значением задачи* $\mathcal{P}$.

Решение должно быть Парето-оптимальным, т. е. должна выполняться аксиома:

A1. $s(\mathcal{P}) \in \mathcal{E}(\mathcal{P})$.

Можно требовать выполнения более сильной аксиомы, состоящей в том, что решение должно зависеть только от Парето-оптимального множества задачи. Точнее, пусть дана задача $\mathcal{P} = (X, f)$. Рассмотрим задачу $\widehat{\mathcal{P}} = (\mathcal{E}(\mathcal{P}), \hat{f})$, где $\hat{f}$ — сужение функции f на множество $\mathcal{E}(\mathcal{P})$. Очевидно, что $\mathcal{E}(\widehat{\mathcal{P}}) = \mathcal{E}(\mathcal{P})$. Тогда аксиома состоит в следующем:

A2. $s(\mathcal{P}) = s(\widehat{\mathcal{P}})$.

Статья посвящена последовательному построению решения с использованием принципа согласованности сначала для отрезка, затем для ломаной и, наконец, для произвольной кривой. Тем самым построено решение для задач с одной переменной. Далее, используя принцип равновесия, это решение распространяется на случай функций от многих переменных.

2. Случай одной переменной (решение для кривой)

2.1. Решение для отрезка

Определим решение для линейной задачи от одной переменной. Геометрически это означает, что мы определяем решение для отрезка.

Определение 5. *Отрезком* $[a, b]$ в $\mathbb{R}^m$ называется множество

$$[a, b] = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = a(1-\lambda) + b\lambda,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}, \text{где } a, b \in \mathbb{R}^m.$$

Пусть $n = 1$, $X = [0, 1]$, $f(x) = a(1-x) + bx$, где $a, b \in \mathbb{R}^m$ — заданные векторы. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{P} = ([0, 1],\ a(1-x) + bx). \tag{1}$$

Для $y \in \mathbb{R}^m$ через y^+ будем обозначать вектор, полученный из вектора y заменой отрицательных компонент нулями, и введём функцию

$$\varphi(y) = \frac{\|y^+\|}{\|y\|}, \tag{2}$$

где $\|\cdot\|$ — произвольная фиксированная норма в $\mathbb{R}^m$.

В норме l_2 функция φ равна косинусу угла между вектором y и положительным ортантом.

Функция φ обладает следующими свойствами:

F1. Функция φ определена и непрерывна для всех $y \in \mathbb{R}^m$, $y \neq 0$.

F2. $0 \leqslant \varphi(y) \leqslant 1$ для всех $y \in \mathbb{R}^m$, $\varphi(y) = 1$ для $y \in \mathbb{R}^m_+$, $\varphi(y) = 0$ для $y \in \mathbb{R}^m_-$.

F3. Для любой перестановки ρ чисел $\{1, \ldots, m\}$ $\varphi(\rho y) = \varphi(y)$, где ρy — вектор, полученный из вектора y перестановкой ρ его компонент.

F4. Для $\lambda > 0 \quad \varphi(\lambda y) = \varphi(y)$.

Пусть $s = s(a, b)$ — решение задачи (1). Потребуем, чтобы оно удовлетворяло следующей аксиоме:

A3 (аксиома согласованности).

$$s(a, b) = a + \varphi(b - a)(b - a), \tag{3}$$

где φ — функция (2).

Решение (3) обладает следующими свойствами:

S1. Функция s непрерывна на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

S2. $s(a, b) \in [a, b]$.

S3. Если $a \geqslant b$, то $s(a, b) = a$, если $a \leqslant b$, то $s(a, b) = b$.

S4. $\|s(a, b) - a\| = \|(b - a)^+\|$.

S5. Решение $s(a, b)$ Парето-оптимально для всех $a, b \in \mathbb{R}^m$.

Пример 1. Пусть в задаче (1) $m = 2$, $a = 0$, $b = (b_1, b_2)$, причём $b_1 \geqslant 0$, $b_2 \leqslant 0$, $\|b\| = 1$. Пусть вектор b вращается по часовой стрелке, находясь в четвертом квадранте. Найдём траекторию решения $s = s(b)$. Ввиду условий, наложенных на вектор b, $\varphi(b) = b_1$. Поэтому $s = b_1 b$, или

$$s_1 = b_1^2, \quad s_2 = b_1 b_2, \quad \|b\| = 1. \tag{4}$$

В норме l_1 справедливо равенство $\|b\| = b_1 - b_2$ и из уравнения (4) следует, что в четвертом квадранте точка $s = s(b)$ описывает часть параболы, задаваемой уравнением

$$s_2 = s_1 - \sqrt{s_1}, \quad 0 \leqslant s_1 \leqslant 1.$$

В норме l_2 справедливо равенство $\|b\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ и из уравнения (4) следует, что точка $s = s(b)$ описывает часть окружности, задаваемой уравнением

$$s_1^2 + s_2^2 - s_1 = 0, \quad 0 \leqslant s_1 \leqslant 1.$$

2.2. Решение для кривой

Пусть $X = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ — отрезок, $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$ — набор критериев. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{P} = ([\alpha, \beta],\, f). \tag{5}$$

С задачей (5) свяжем кривую L:

$$L = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x),\, \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}. \tag{6}$$

Пусть $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$. Через $L(\alpha', \beta')$ будем обозначать часть кривой (6), соответствующую этому отрезку, т. е.

$$L(\alpha', \beta') = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x),\, \alpha' \leqslant x \leqslant \beta'\}. \tag{7}$$

Через $l(\alpha', \beta')$ будем обозначать длину кривой $L(\alpha', \beta')$. Известно, что

$$l(\alpha', \beta') = \int\limits_{\alpha'}^{\beta'} \|f'(x)\|\, dx. \tag{8}$$

Пусть $s(\alpha', \beta') = f(x^*)$, $\alpha' \leqslant x^* \leqslant \beta'$ — решение для кривой (7). Потребуем, чтобы решение удовлетворяло следующей аксиоме.

A4 (аксиома аддитивности). *Для любых $\alpha \leqslant \alpha' \leqslant \gamma \leqslant \beta' \leqslant \beta$ должно выполняться равенство*

$$l(\alpha', s(\alpha', \beta')) = l(\alpha', s(\alpha', \gamma)) + l(\gamma, s(\gamma, \beta')). \tag{9}$$

Замечание 1. Равенство (9) означает аддитивность длины кривой от начала до решения.

Замечание 2. Для отрезка равенство (9) выполняется ввиду (3), свойства F4 функции φ и свойства S4 решения.

Пусть $x_0 = \alpha \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_k = \beta$ — разбиение промежутка $[\alpha, \beta]$, и пусть L^k — ломаная, вписанная в кривую L в соответствии с этим разбиением, т. е.

$$L^k = [f(x_0), f(x_1)] \cup \ldots \cup [f(x_{k-1}), f(x_k)]$$

Из аксиомы аддитивности и свойства S4 решения следует, что если s^k — решение для ломаной L^k, а $l^k(s^k)$ — длина участка ломаной L^k от $f(\alpha)$ до s^k, то выполнено равенство

$$l^k(s^k) = \sum_{i=1}^{k} \|\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)^+\|. \tag{10}$$

Пусть s — решение для кривой (6), $l(s)$ — длина участка кривой L от $f(\alpha)$ до s, а точка $x^* \in [\alpha, \beta]$ определена условием $s = f(x^*)$. Переходя к пределу в (10) и учитывая (8), получаем формулу для определения x^*:

$$\int\limits_{\alpha}^{x*} \|f'(x)\|\, dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \|\big(f'(x)\big)^+\|\, dx, \tag{11}$$

где f' — производная функции f.

Замечание 3. Формула (11) является обобщением свойства S4 решения для отрезка.

Пример 2. Рассмотрим задачу (5), в которой $m = 2$, $\alpha = 0$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $f(0) = (0, c)$. Будем предполагать, что $f_1'(x) > 0$, $f_2'(x) < 0$. Очевидно, все точки этой кривой Парето-оптимальны. Уравнение (11) в норме l_1 сводится к уравнению

$$f_1(x^*) - f_2(x^*) = f_1(\beta) - c, \tag{12}$$

а в норме l_2 — к уравнению

$$\int\limits_{0}^{x^*} \sqrt{(f_1'(x))^2 + (f_2'(x))^2}\, dx = f_1(\beta). \tag{13}$$

Пусть $f_1(x) = x$, $f_2(x) = c - \frac{1}{2}x^2$. Из уравнения (12) получаем $x^* = \sqrt{2\beta + 1} - 1$, а из уравнения (13) получаем следующее уравнение для x^*:

$$x^* \sqrt{1 + x^{*2}} + \ln\big(x^* + \sqrt{1 + x^{*2}}\,\big) = 2\beta.$$

. **2.3. Функция Ляпунова**

Пусть дана задача (5) и $s = (x^*, f(x^*))$ — её решение, определяемое формулой (11). Введём функцию

$$F(x) = \int\limits_{\alpha}^{x} (x - t)\|f'(t)\|\, dt - (x - \alpha) \int\limits_{\alpha}^{\beta} \|\big(f'(t)\big)^+\|\, dt. \tag{14}$$

Легко видеть, что уравнение $F'(x^*) = 0$ есть уравнение (11). Кроме того, $F''(x) = \|f'(x)\| > 0$. Таким образом, функция (14) строго выпукла и достигает минимума в точке x^*, т. е. является функцией Ляпунова [12] для задачи (5).

Пример 3. Для задачи (1) (т. е. для отрезка $[a, b]$) из (14) следует, что функция Ляпунова имеет вид

$$F(x) = \|b - a\| \left(\frac{x^2}{2} - \varphi(b - a)x\right).$$

2.4. Свойство ковариантности решения

Теорема 1. *Пусть $\omega : [\gamma, \delta] \to [\alpha, \beta]$ — строго возрастающее отображение, причём $\omega(\gamma) = \alpha$, $\omega(\delta) = \beta$, а функция $g : [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}^m$ определена равенством $g(y) = f(\omega(y))$, где $y \in [\gamma, \delta]$. Пусть $\mathcal{P}_1 = ([\alpha, \beta], f)$ и $\mathcal{P}_2 = ([\gamma, \delta], g)$ — две задачи, и пусть $x^* = s(\mathcal{P}_1)$ и $y^* = s(\mathcal{P}_2)$ — решения этих задач. Тогда эти решения связаны соотношением $x^* = \omega(y^*)$.*

Доказательство. Согласно (11) решение y^* определяется из уравнения

$$\int\limits_{\gamma}^{y*} \|g'(y)\|\, dy = \int\limits_{\gamma}^{\delta} \|(g'(y))^+\|\, dy.$$

Теорема следует из правила замены переменной под интегралом. Полагая $y = \omega(x)$, имеем

$$\int\limits_{\gamma}^{y^*} \|g'(y)\|\, dy = \int\limits_{\alpha}^{x^*} \|f'(x)\|\, dx, \quad \int\limits_{\gamma}^{\delta} \|(g'(y))^+\|\, dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \|(f'(x))^+\|\, dx.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\omega'(y) > 0$ и $\varphi(\lambda x) = \varphi(x)$ для $\lambda > 0$. Теорема 1 доказана.

2.5. Условия Парето-оптимальности решения

Рассмотрим задачу (5). Будем предполагать, что все функции f_i, $i = 1, \ldots, m$, строго вогнуты на $[\alpha, \beta]$. Пусть, далее, точки x_i определены условием

$$f_i(x_i) = \max_{x \in [\alpha, \beta]} f_i(x). \tag{15}$$

Не умаляя общности можно считать, что функции f_i перенумерованы так, что выполнено условие

$$\alpha \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_m \leqslant \beta. \tag{16}$$

Утверждение. $\mathcal{E}(\mathcal{P}) = [x_1, x_m]$.

Доказательство. Ввиду (15) и (16) на интервале $[x_1, x_m]$ функция f_1 убывает, а функция f_m возрастает. Поэтому векторы $f(x')$ и $f(x'')$ не сравнимы ни для каких $x', x'' \in [x_1, x_m]$. В то же время если $x' \in [\alpha, x_1)$, то $f(x') < f(x_1)$, и значит, $x' \notin \mathcal{E}(\mathcal{P})$. Аналогично, если $x'' \in (x_m, \beta]$, то $x'' \notin \mathcal{E}(\mathcal{P})$. Утверждение доказано.

Теорема 2. *Если функции f_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, строго вогнуты, то решение x^*, определяемое формулой* (11), *удовлетворяет аксиоме* A2.

Доказательство. Из строгой вогнутости функций f_i, $i = 1, \ldots, m$, и неравенств (16) следует, что $f'(x) > 0$ при $x \in [\alpha, x_1)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_m, \beta]$. Поэтому уравнение (11) сводится к уравнению

$$\int\limits_{x_1}^{x^*} \|f'(x)\|\, dx = \int\limits_{x_1}^{x_m} \|(f'(x))^+\|\, dx.$$

Теорема 2 следует из утверждения.

3. Общий случай

3.1. Основное уравнение

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый телесный компакт, $f : X \to \mathbb{R}^m$ — набор критериев, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Будем рассматривать задачу $\mathcal{P} = (X, f)$.

Для $x \in \mathbb{R}^n$ будем писать $x = (x_j, x_{-j})$, где x_j — j-я компонента x, а x_{-j} — совокупность остальных компонент. Для $x \in X$ положим

$$a_j(x_{-j}) = \min\{x_j \mid (x_j, x_{-j}) \in X\},$$
$$b_j(x_{-j}) = \max\{x_j \mid (x_j, x_{-j}) \in X\}. \quad (17)$$

Заметим, что ввиду сделанных предположений относительно множества X функции (17) непрерывны, причём $a_j(x_{-j}) < b_j(x_{-j})$ для почти всех $x \in X$.

Возьмём произвольную точку $\hat{x} \in X$, выберем j и зафиксируем $\hat{x}_{-j}$. Рассмотрим задачу с одной переменной

$$\mathcal{P}_j(\hat{x}_{-j}) = ([a_j(\hat{x}_{-j}),\, b_j(\hat{x}_{-j})],\, f(\cdot,\, \hat{x}_{-j})). \quad (18)$$

Потребуем, чтобы решение задачи $\mathcal{P}$ удовлетворяло следующей аксиоме.

A5 (аксиома равновесия). Точка $x^* = s(\mathcal{P})$ есть *решение* задачи $\mathcal{P}$, если $x_j^* = s(\mathcal{P}_j(x_{-j}^*))$ для всех $j = 1, \ldots, n$, т. е. x_j^* есть решение задачи (18), удовлетворяющее аксиомам A3 и A4.

Из формулы (11) и аксиом A3, A4, A5 получаем следующую систему для нахождения решения:

$$\int\limits_{a_j(x_{-j}^*)}^{x_j^*} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j, x_{-j}^*) \right\| dx_j = \int\limits_{a_j(x_{-j}^*)}^{b_j(x_{-j}^*)} \left\| \Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j, x_{-j}) \Big)^+ \right\| dx_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

3.2. Теорема существования

Теорема 3. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый телесный компакт, а функции f непрерывно дифференцируемы. Тогда система* (19) *имеет решение $x^* \in X$.*

Докажем сначала следующую лемму. Для $x \in X$ положим

$$Q(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid a_j(x_{-j}) \leqslant y_j \leqslant b_j(x_{-j}) \quad j = 1, \ldots, n\}, \tag{20}$$

где $a_j(x_{-j})$ и $b_j(x_{-j})$, $1 \leqslant j \leqslant n$, определены формулами (17) и пусть

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leqslant x \leqslant b\} \tag{21}$$

—минимальный параллелепипед, содержащий множество X.

Лемма. *Пусть $\Phi : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ — многозначное отображение, удовлетворяющее следующим условиям*:

1. *Отображение Φ полунепрерывно сверху.*
2. *Множество $\Phi(x)$ выпукло для всех $x \in X$.*
3. *$\Phi(x) \subset Q(x)$ для всех $x \in X$.*

Тогда отображение Φ имеет в X неподвижную точку $x^* : x^* \in \Phi(x^*)$.

Доказательство. Пусть π — оператор проектирования на множество X. Определим отображение $\Psi : Q \to 2^Q$, где Q — параллелепипед (21), равенством $\Psi = \Phi\pi$. Очевидно, отображение Ψ удовлетворяет условиям 1 и 2 леммы и, следовательно, имеет в Q неподвижную точку $x^* \in Q$: $x^* \in \Psi(x^*)$. Покажем, что $x^* \in X$. Предположим противное: $x^* \notin X$. Тогда $c = \pi(x^*) - x^* \neq 0$. Рассмотрим гиперплоскость $cx = c\pi(x^*)$.

Мы имеем $cx^* < c\pi(x^*)$ и для всех $x \in X$

$$cx \geqslant c\pi(x^*). \tag{22}$$

Покажем, что неравенства (22) выполнены для всех $x \in Q(\pi(x^*))$. Так как это противоречит условию 3, лемма будет доказана.

Так как $\pi(x^*)$ есть решение задачи $\|x - x^*\| \to \min\limits_{x \in X}$, для всех $x \in X$ выполнены неравенства $c(x - x^*) \geqslant \|c\|^2$. Из этих неравенств, а также из (20) следует, что для $j = 1, \ldots, n$ выполнены условия

$$\pi_j(x^*) = \begin{cases} a_j(\pi_{-j}(x^*)), \text{ если } c_j > 0, \\ b_j(\pi_{-j}(x^*)), \text{ если } c_j < 0, \end{cases}$$
$$a_j(\pi_{-j}(x^*)) \leqslant \pi_j(x^*) \leqslant b_j(\pi_{-j}(x^*)), \text{ если } c_j = 0.$$

Из этих условий вытекает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим непрерывное отображение $\Phi : X \to \mathbb{R}^n$, где $y = \Phi(x)$ определяется из системы

$$\int\limits_{a_j(x_{-j})}^{y_j} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j, x_{-j}) \right\| dx_j = \int\limits_{a_j(x_{-j})}^{b_j(x_{-j})} \left\| \Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j, x_{-j}) \Big)^+ \right\| dx_j, \; j = 1, \ldots, n.$$

Очевидно, отображение Φ удовлетворяет условиям леммы и, следовательно, имеет неподвижную точку x^*, которая является решением системы (19). Теорема 3 доказана.

3.3. Задача с линейными критериями

Пусть $f(x) = Cx = \sum\limits_{j=1}^{n} c^j x_j$, где C — матрица размера $m \times n$, а $c^j = (c_{1j}, \ldots, c_{mj})$, $1 \leqslant j \leqslant n$, — её столбцы. Так как $\partial f / \partial x_j = c^j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, система (19) сводится к системе

$$x_j = a_j(x_{-j})(1 - \varphi(c^j)) + b_j(x_{-j})\varphi(c^j), \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{23}$$

Теорема 4. *Если существует такой вектор* $p \in \mathbb{R}^m$, $p > 0$, *что* $pC = 0$, *то решение* (23) *Парето-оптимально.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $pf(x) = 0$ при любом x из $\mathbb{R}^n$, так что увеличение одного критерия влечет уменьшение какого-либо другого, так что все точки $x \in \mathbb{R}^n$ Парето-оптимальны. Теорема 4 доказана.

Если $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_j \leqslant x_j \leqslant \beta_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$ — параллелепипед, то из (23) следует, что решение выражается в явном виде:

$$x_j = \alpha_j(1 - \varphi(c^j)) + \beta_j\varphi(c^j), \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{24}$$

Если X — единичный куб, т. е. $\alpha_j = 0$, $\beta_j = 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то равенства (24) переходят в равенства $x_j = \varphi(c^j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Полагая в (3) $a = 0$, $b = c^j$, для значения задачи получаем выражение

$$v = \sum_{j=1}^{n} c^j\varphi(c^j) = \sum_{j=1}^{n} s(c^j). \tag{25}$$

Равенство (25) означает, что значение задачи равно сумме значений для составляющих её векторов c^j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Пример 4. Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ — прямоугольник на плоскости с вершинами $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$, на котором заданы два критерия:

$$f_1(x) = x_1 + x_2, \quad f_2(x) = -x_1 - x_2.$$

Возьмём норму в l_1. Так как $c^1 = c^2 = (1,-1)$, из (2) следует, что $\varphi(c^1) = \varphi(c^2) = 1/2$. Согласно (23) имеем

$$x_1 = \frac{1}{2}(a_1(x_2) + b_1(x_2)), \quad x_2 = \frac{1}{2}(a_2(x_1) + b_2(x_1)),$$

где $a_i(\cdot)$, $b_i(\cdot)$, $i = 1,2$, определены в (17).

Очевидно, этому условию удовлетворяют все точки отрезка с концами $(1,1)$, $(2,2)$. Обозначим этот отрезок через L. Мы получили новую задачу (L,f). Положим $y = x_1 + x_2$, где $x = (x_1,x_2) \in L$. Тогда $2 \leqslant y \leqslant 4$, $\hat{f}_1(y) = y$, $\hat{f}_2(y) = -y$. Решая задачу $([2,4],\hat{f})$ по формуле (23) (или по формуле (3) для отрезка $[(2,-2),(4,-4)]$), получаем $y = 3$, $v = (3,-3)$, $x_1 = x_2 = 3/2$.

Пример 5. Пусть

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{d_j} \leqslant 1\},$$

где $d_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $f(x) = Cx$. Согласно (17) имеем

$$a_j(x_{-j}) = 0, \quad b_j(x_{-j}) = d_j\Big(1 - \sum_{k \neq j} \frac{x_k}{d_k}\Big), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Из системы (23) получаем

$$x_j = \varphi(c^j)d_j\Big(1 - \sum_{k\neq j} \frac{x_k}{d_k}\Big), \quad j = 1, \dots, n. \tag{26}$$

Положим $A = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{d_k}$. Тогда систему (26) можно записать следующим образом:

$$(1 - \varphi(c^j))\frac{x_j}{d_j} = \varphi(c^j)A, \quad j = 1, \dots, n. \tag{27}$$

1-*й случай.* Существует такое j, что $\varphi(c^j) = 1$. В этом случае, очевидно, $A = 0$, т. е. $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j}{d_j} = 1$. Пусть $\varphi(c^j) = 1$ для $j = 1, \dots, k$ и $\varphi(c^j) < 1$ для $j = k + 1, \dots, n$, причём $k \geqslant 1$. Тогда из уравнений (27) следует, что

$$x_j = 0 \quad \text{при любом} \quad j = k + 1, \dots, n. \tag{28}$$

и

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{d_j} = 1. \tag{29}$$

Пусть $k > 1$. Мы получили новую задачу $(\hat{X}, \hat{f})$, где ввиду (28) и (29)

$$\hat{X} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{d_j} = 1\}, \quad \hat{f}(x) = \sum_{j=1}^{k} c^j x_j. \tag{30}$$

Составим функцию Лагранжа для задачи (30):

$$l(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{k} \Big(c^j - e\frac{\lambda}{d_j}\Big)x_j + \lambda e,$$

где $e \in \mathbb{R}^k$, $e = (1, \dots, 1)$. Положим

$$K = \{x \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leqslant x_j \leqslant d_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant k\}$$

и рассмотрим задачу $(K, l(\cdot, \lambda))$, считая λ параметром. Решая её по формуле (24), получим

$$x_j = d_j\varphi\Big(c^j - e\frac{\lambda}{d_j}\Big). \tag{31}$$

Ввиду свойства F4 функции φ уравнение (31) можно переписать в виде

$$x_j = d_j\varphi(c^j d_j - \lambda e), \tag{32}$$

где λ определяется из условия (29):

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi(c^j d_j - \lambda e) = 1. \tag{33}$$

Легко видеть, что если c^j, $1 \leqslant j \leqslant n$, — числа, то уравнения (28), (32) и (33) дают решение скалярной задачи. Действительно, пусть

$$\theta_1 = \max_j c^j d_j, \quad \theta_2 = \max_{j: c^j d_j < \theta_1} c^j d_j, \quad J = \{1 \leqslant j \leqslant k \mid c^j d_j = \theta_1\}.$$

Не умаляя общности можно считать, что множество J состоит из одного элемента j_0. Тогда из уравнений (32), (33) следует, что $\theta_2 \leqslant \lambda < \theta_1$ и $x_{j_0} = d_{j_0}$, $x_j = 0$ при $j \neq j_0$.

2-й случай. Для всех $j = 1, \ldots, n$ справедливо неравенство $\varphi(c^j) < 1$. Учитывая определение величины A, из (27) получаем

$$x_j = \frac{\varphi(c^j) d_j}{1 - \varphi(c^j)} A, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

где A определяется из условия $A\Bigl(1 + \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\varphi(c^j)}{1 - \varphi(c^j)}\Bigr) = 1.$

3.4. Бескоалиционная игра

В п. 2.3 для задачи с одной переменной была построена функция Ляпунова. В общем случае можно построить бескоалиционную игру n лиц, эквивалентную задаче $\mathcal{P}$ в том смысле, что множество ситуаций равновесия в этой игре совпадает с множеством решений системы (19). Основы теории бескоалиционных игр см. в [1].

По аналогии с функцией (14) введём функции

$$F_j(x) = \int\limits_{a_j(x_{-j})}^{x_j} (x_j - t) \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x_{-j}) \right\| dt \\ - \bigl(x_j - a_j(x_{-j})\bigr) \int\limits_{a_j(x_{-j})}^{b_j(x_{-j})} \left\| \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x_{-j}) \Bigr)^+ \right\| dt, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{34}$$

и рассмотрим бескоалиционную игру

$$\Gamma = \langle J,\ X,\ \{F_j \mid j \in J\} \rangle, \tag{35}$$

где $J = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков, X — множество допустимых ситуаций, а F_j — функция выигрыша игрока $j \in J$.

Теорема 5. 1. *Игра* (35) *с функциями выигрыша* (34) *имеет ситуацию равновесия в* X.

2. *Множество ситуаций равновесия игры* (35) *совпадает с множеством решений системы* (19). (*Ситуация равновесия в игре* (35) *понимается в смысле минимизации.*)

Доказательство. 1. Легко видеть, что

$$\frac{\partial^2 F_j}{\partial x_j^2}(x) = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right\| \geqslant 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Поэтому функция F_j выпукла по x_j при любом $1 \leqslant j \leqslant n$. Положим

$$\psi_j(x_{-j}) = \arg \min_{x_j \in [a_j(x_{-j}), b_j(x_{-j})]} F_j(x_j, x_{-j}), \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

и определим многозначное отображение $\Phi : X \to 2^{\mathbb{R}^n}$ равенством

$$\Phi(x) = \prod_{j=1}^{n} \psi_j(x_{-j}).$$

Очевидно, отображение Φ удовлетворяет условиям леммы и, следовательно, имеет в X неподвижную точку $x^* = \Phi(x^*)$, которая по определению отображения Φ удовлетворяет условиям

$$F_j(x_j^*, x_{-j}^*) = \min_{x_j : (x_j, x_{-j}^*) \in X} F_j(x_j, x_{-j}^*), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Следовательно, точка x^* является точкой равновесия в игре (35).

2. Ввиду выпуклости функций F_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, любая точка равновесия x^* удовлетворяет системе уравнений $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_j}(x^*) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, которая, очевидно, есть система (19). Теорема 5 доказана.

4. Заключение

Отметим некоторые черты предлагаемого решения.

1. Решение не всегда Парето-оптимально. Возможны два подхода: а) установить условия, при которых решение уравнений (19) Парето-оптимально; б) ограничиться рассмотрением только Парето-оптимальных задач.

2. Система (19) может иметь много решений. В таких случаях возможно многократное применение системы (19) с использованием функции Лагранжа, как показано п. 3.3.

3. Вместо функции (2) можно использовать другие функции с аналогичными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воробьев Н. Н.** Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985.
2. **Ляпунов А. Н.** Согласованность и равновесие в многокритериальных задачах // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2005. Т. 12, № 1. С. 163–164.
3. **Ляпунов А. Н.** Равновесные решения в многокритериальных задачах // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2005., Т. 12, № 4. С. 863–864.
4. **Ляпунов А. Н.** Согласованность и равновесие в многокритериальных задачах //Экономико-математические исследования. Математические модели и информационные технологии. IV, ч. I. СПб: СПбЭМИ РАН, 2005. С. 92–110.
5. **Ляпунов А. Н.** Согласованность и равновесие в многокритериальных задачах // http://emi.nw.ru.
6. **Ногин В. Д.** Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002.
7. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 1982.
8. **Abhinay M.** Bargaining. Theory with applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
9. **Angilella S., Greco S., Lamantia F., Matarazzo B.** Assessing non-additive utility for multicriteria decision aid // European J. Oper. Res. 2004. V. 158, N 3. P. 734–744.
10. **Doumpos M., Zopounidis C.** A multicriteria classification approach based on pairwise comparisons // European J. Oper. Res. 2004. V. 158, N 2. P. 378–389.
11. **Kostreva M. M., Ogryczak W., Wierrbicki A.** Equitable aggregations and multiple criteria analysis // European J. Oper. Res. 2004. V. 158, N 2. P. 362–377.
12. **Leskinen P., Kangas A. S., Kangas J.** Rank-based modelling of preference in multi-criteria decision making // Eroupean J. Oper. Res. 2004. V. 158, N 3. P. 721– 733.
13. **Liapunov A. M.** Problème génćeral de la stabilité du movement // Ann. de la Faculté des science de l'Univ. de Toulouse, 2e série, 1907, t.IX, pp. 203–474.
14. **Rubinstein A., Osborne M. J.** Bargaining and markets // San Diego, CA: Academic Press, 1990.

15. **Thomson W.** Cooperative models of bargaining // Handbook of game theory with economic applications. V. II. Amsterdam: North-Holland, 1994. P. 1237–1284.

Адрес автора:

Санкт-Петербургский
Экономико-математический институт РАН,
ул. Чайковского, 1,
191187 Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: anlyapunov@yandex.ru

Статья поступила
20 мая 2007 г.

Переработанный вариант —
18 сентября 2007 г.