ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2007. Серия 1. Том 14, № 4. 43–56

УДК 519.176

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГРАФА С ЗАДАННЫМИ ДИАМЕТРОМ, ЧИСЛОМ ВЕРШИННОЙ СВЯЗНОСТИ И ВЕКТОРОМ РАЗНООБРАЗИЯ ШАРОВ*)

К. Л. Рычков

Доказано, что для любых целых $d \geq 2$ и $\varkappa \geqslant 1$ и любого целочисленного набора $\overline{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_d)$ такого, что $\tau_0 \geqslant \tau_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_d = 1$ и $\tau_{d-1} \geqslant d^2\varkappa + 3$, существует граф диаметра d с числом вершинной связности $\varkappa$, вектором разнообразия шаров которого является $\overline{\tau}$. Вместе с тем доказано несуществование графа диаметра d с числом вершинной связности $\varkappa$ и вектором разнообразия шаров $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_d)$, в котором $\tau_0 < (d-1)\varkappa + 2$.

Введение

Рассматриваются обыкновенные связные графы $G(V, E)$ с множеством вершин V, множеством рёбер E, конечного диаметра $d(G)$ и с обычным расстоянием $\rho_G(x, y) = \min |P(x, y)|$, где минимум берётся по всевозможным простым цепям $P(x, y)$ между вершинами x и y в графе G, а $|P|$ — длина цепи P. Шар радиуса i с центром в вершине v будем обозначать через $S_i(v)$. Графу G диаметра d поставим в соответствие набор $\overline{\tau}(G) = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_d)$, где τ_i — число несовпадающих шаров радиуса i в G. Набор $\overline{\tau}(G)$ называется *вектором разнообразия шаров* в графе G [5]. Ясно, что компоненты вектора $\overline{\tau}(G)$ связаны соотношениями

$$|V(G)| = \tau_0 \geqslant \tau_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_d = 1.$$

Через M_d обозначим множество таких целочисленных векторов $\overline{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_d)$, что $c_0 \geqslant c_1 \geqslant \ldots \geqslant c_d = 1$. Как обычно, под числом вершинной связности графа понимается наименьшее число вершин, после удаления которых получается несвязный или одновершинный граф. Через $\Gamma(d, \varkappa)$ обозначим класс графов диаметра d, число вершинной связности которых равно $\varkappa$. Будем говорить, что вектор $\overline{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_d)$ реализуется

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00364).

в классе графов $\Gamma(d,\varkappa)$, если существует такой граф $G \in \Gamma(d,\varkappa)$, что $\overline{c} = \overline{\tau}(G)$. Через $M_d(n)$ обозначим множество векторов из M_d таких, что $c_0 \leqslant n$. Через $R_{d,\varkappa}(n)$ обозначим множество тех векторов из $M_d(n)$, которые реализуются в классе графов $\Gamma(d,\varkappa)$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|R_{d,\varkappa}(n)|}{|M_d(n)|} = 1$, то будем говорить, что почти все векторы из множества M_d реализуются в классе графов $\Gamma(d,\varkappa)$. Через $m(d,\varkappa)$ обозначим минимальное натуральное число l, которое удовлетворяет следующему условию: любой вектор $\overline{c} \in M_d$ такой, что $c_{d-1} \geqslant l$, реализуется в классе графов $\Gamma(d,\varkappa)$. Если для d и $\varkappa$ такого l не существует, то считаем, что $m(d,\varkappa) = \infty$.

В [2, 3] рассматривался подход к исследованию метрической структуры графов на основе изучения разнообразия и пересекаемости шаров в графе. Характеризация векторов разнообразия шаров в графах — одна из задач, возникающая при таком подходе. В [4] показано, что почти все векторы из множества M_d реализуются в классе графов диаметра d. В настоящей статье получены следующие результаты.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения*:
1) *если* $d = 1$ *и* $\varkappa \geqslant 1$, *то* $m(d,\varkappa) = \infty$;
2) *если* $d \geqslant 2$ *и* $\varkappa \geqslant 1$, *то* $(d-1)\varkappa + 2 \leqslant m(d,\varkappa) \leqslant d^2\varkappa + 3$.

Теорема 2. *При любых целых* $d \geqslant 2$ *и* $\varkappa \geqslant 1$ *почти все векторы из множества* M_d *реализуются в классе графов* $\Gamma(d,\varkappa)$.

§ 1. Доказательство теоремы 1

Первое утверждение теоремы 1 является следствием следующих двух фактов: класс графов $\Gamma(1,\varkappa)$ состоит из одного графа $K_{\varkappa+1}$ (полного $(\varkappa+1)$–вершинного графа); при $d = 1$ и при любом натуральном l множество векторов $\overline{c} \in M_d$, у которых $c_{d-1} \geqslant l$, бесконечно. Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Второе утверждение теоремы 1 является следствием следующих семи лемм.

Лемма 1. *Если* $d \geqslant 2$ *и* $\varkappa \geqslant 1$, *то* $m(d,\varkappa) \geqslant (d-1)\varkappa + 2$.

Доказательство. Достаточно показать, что при любых $d \geqslant 2$ и $\varkappa \geqslant 1$ в классе графов $\Gamma(d,\varkappa)$ не существует графа G, вектор разнообразия шаров которого $\overline{\tau}(G) = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_d)$ удовлетворяет условию $\tau_0 < (d-1)\varkappa + 2$. Предположим, что для некоторых d и $\varkappa$ такой граф G существует. Пусть u, v — вершины в G, расстояние между которыми равно d. По теореме Менгера [1] в G существует $\varkappa$ независимых (u,v)–путей. Эти $\varkappa$ путей в совокупности содержат не менее $(d-1)\varkappa + 2$ вершин, что противоречит неравенству $\tau_0 < (d-1)\varkappa + 2$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если $d = 2$ и $\varkappa = 1$, то $m(d, \varkappa) \leqslant 3$.*

Доказательство. Пусть $(c_0, c_1, 1)$ — произвольный вектор из M_2 такой, что $c_1 \geqslant 3$. Построим граф $G \in \Gamma(2, 1)$ с $\overline{\tau}(G) = (c_0, c_1, 1)$. Для этого рассмотрим полный двудольный граф K_{1,c_1-1}. Ясно, что $\overline{\tau}(K_{1,c_1-1}) = (c_1, c_1, 1)$. Заменим в K_{1,c_1-1} какую-нибудь висячую вершину x на полный граф $K_{c_0-c_1+1}$, т. е. удалим из K_{1,c_1-1} вершину x и каждую вершину графа $K_{c_0-c_1+1}$ соединим рёбрами с теми вершинами графа K_{1,c_1-1}, которые были смежны с x. При этом мы считаем, что графы K_{1,c_1-1}, $K_{c_0-c_1+1}$ не имеют общих вершин. Полученный граф возьмём в качестве графа G. Очевидно, что $G \in \Gamma(2, 1)$ и $\overline{\tau}(G) = (c_0, c_1, 1)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если $d = 2$ и $\varkappa = 2$, то $m(d, \varkappa) \leqslant 4$.*

Доказательство. Пусть $(c_0, c_1, 1)$ — произвольный вектор из M_2 такой, что $c_1 \geqslant 4$. Построим граф $G \in \Gamma(2, 2)$ с $\overline{\tau}(G) = (c_0, c_1, 1)$. Пусть C_4 — простой цикл с четырьмя вершинами, a, b — вершины в C_4, расстояние между которыми равно 2. К графу C_4 добавим $c_1 - 4$ новых вершин и соединим каждую из них рёбрами с вершинами a и b. Полученный граф обозначим через A. Ясно, что $\overline{\tau}(A) = (c_1, c_1, 1)$. Заменим в A какую-нибудь вершину на полный граф $K_{c_0-c_1+1}$. Полученный граф возьмём в качестве графа G. Очевидно, что $G \in \Gamma(2, 2)$ и $\overline{\tau}(G) = (c_0, c_1, 1)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если $d \geqslant 3$ и $\varkappa = 1$, то $m(d, \varkappa) \leqslant d^2 + 1$.*

Доказательство. Пусть $d \geqslant 3$ и $\overline{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{d-1}, 1)$ — произвольный вектор из M_d такой, что $c_{d-1} \geqslant d^2 + 1$. Построим граф $G \in \Gamma(d, 1)$ с $\overline{\tau}(G) = \overline{c}$. Сначала с помощью процедуры, описанной в доказательстве леммы 2 из [4], построим такой граф A диаметра d, что $\overline{\tau}(A) = (c_0 - 1, c_1 - 1, \ldots, c_{d-1} - 1, 1)$. При этом мы несколько изменим последний шаг этой процедуры (шаг d). А именно, на шаге d заменим на граф $K_{\Delta+1}$ не вершину a графа A, а какую–нибудь другую вершину этого графа. Далее к графу A добавим новую вершину x и соединим её ребром с вершиной a. Полученный граф возьмём в качестве графа G. Покажем, что $G \in \Gamma(d, 1)$. Граф G имеет диаметр d, поскольку граф A имеет диаметр d и шар $S_{d-1}(a)$ графа A содержит все вершины графа A (это отмечено в утверждении 1 из [4]). Число вершинной связности графа G равно 2, потому что G связен и вершина a является точкой сочленения в G. Докажем, что $\overline{\tau}(G) = \overline{c}$. Из построения графов A, G и утверждений 1, 2 из [4] следует, что для любых вершин u, v графа A и любого r шары $S_r(u)$, $S_r(v)$ графа G совпадают тогда и только тогда, когда совпадают шары $S_r(u)$ и $S_r(v)$ графа A. Кроме того, для любой вершины v графа A и любого r, $0 \leqslant r \leqslant d-1$, шары $S_r(x)$, $S_r(v)$ графа G не совпадают. Это следует из того, что шар $S_{d-1}(x)$ графа G не содержит вершин с уровня $L_{2(d-1)}$, а шар $S_{d-1}(v)$ графа G содержит хотя бы одну вершину с этого уровня. Поэтому равенство $\overline{\tau}(G) = (c_0, c_1, \ldots, c_{d-1}, 1)$ является следствием равенства $\overline{\tau}(A) = (c_0 - 1, c_1 - 1, \ldots, c_{d-1} - 1, 1)$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если $d \geqslant 3$ и $\varkappa = 2$, то $m(d, \varkappa) \leqslant d^2$.*

Доказательство. Пусть $d \geqslant 3$ и $\overline{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{d-1}, 1)$ — произвольный вектор из M_d такой, что $c_{d-1} \geqslant d^2$. С помощью процедуры, описанной в доказательстве леммы 2 из [4], построим такой граф G диаметра d, что $\overline{\tau}(G) = (c_0, c_1 \ldots, c_{d-1}, 1)$. Покажем, что $G \in \Gamma(d, 2)$, т. е. число вершинной связности графа G равно 2. Как известно [1], граф двусвязен тогда и только тогда, когда он может быть построен из цикла последовательным добавлением H-путей к уже построенному графу H. Из описания процедуры построения графа G следует, что он может быть построен именно таким образом. Кроме того, в G обязательно имеются вершины степени 2. Поэтому число вершинной связности графа G равно 2. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Если $d \geqslant 3$ и $\varkappa \geqslant 3$, то $m(d, \varkappa) \leqslant ((2d-3)(\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1) + 2)(\varkappa - 1)$.*

Доказательство. Пусть $d \geqslant 3$, $\varkappa \geqslant 3$ и $\overline{c} = (c_0, c_1 \ldots, c_{d-1}, 1)$ — произвольный вектор из M_d такой, что $c_{d-1} \geqslant ((2d-3)(\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1) + 2)(\varkappa - 1)$. Построим граф $G \in \Gamma(d, \varkappa)$, с $\overline{\tau}(G) = \overline{c}$. Для этого сначала определим отображение $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$, которое каждому набору $(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ целых неотрицательных чисел ставит в соответствие пару $\langle A, \varphi_A \rangle$, где A — некоторый граф, φ_A — некоторая раскраска вершин графа A в $\varkappa - 1$ цвет (отметим, что раскраска φ_A вводится исключительно с целью классификации вершин графа). Если $(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ — конкретный набор чисел, то значение $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ будем называть графом, имея в виду граф A.

Введём необходимые понятия и определения. Простую (незамкнутую) цепь $P(V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$, будем обозначать через $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ и для краткости называть цепью. По определению длина цепи — это число рёбер в ней; цепь $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ соединяет вершины v_1, v_n, которые называются концами цепи; вершины $v_2, \ldots, v_{n-1}$ называются внутренними. Пусть даны k попарно не пересекающихся цепей

$$(v_1^1, v_2^1, \ldots, v_{l+1}^1),\ (v_1^2, v_2^2, \ldots, v_{l+1}^2), \ldots,\ (v_1^k, v_2^k, \ldots, v_{l+1}^k)$$

длины l. Определим граф $M(V,E)$, который будем называть *обычной мультицепью* длины l и толщины k. Множество V по определению состоит из всех вершин v_i^j, где $1 \leqslant i \leqslant l+1$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Множество E содержит все рёбра указанных цепей, а также все рёбра (v_i^j, v_i^t), где $1 \leqslant i \leqslant l+1$, $1 \leqslant j < t \leqslant k$. Других рёбер в E нет. Цепь $(v_1^j, v_2^j, \ldots, v_{l+1}^j)$, где $1 \leqslant j \leqslant k$, будем называть j-й цепью обычной мультицепи M. Множество вершин $\{v_i^1, v_i^2, \ldots, v_i^k\}$, где $1 \leqslant i \leqslant l+1$, будем называть *$i$-м срезом* обычной мультицепи M. Первый срез и $(l+1)$-й срез будем называть *концевыми срезами*, остальные срезы — *внутренними срезами*. Вершины концевых срезов будем называть *концевыми вершинами* обычной мультицепи M, а вершины внутренних срезов — *внутренними вершинами* обычной мультицепи M. Если X, Y — два концевых среза обычной мультицепи M, то будем говорить, что *обычная мультицепь M соединяет множество вершин X с множеством вершин Y*. При построении отображения $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ каждому рассматриваемому графу G будем ставить в соответствие некоторую раскраску вершин φ_G. В частности, считаем, что вершины обычной мультицепи M толщины k раскрашены в k цветов. При этом раскраска $\varphi_M : VM \to \{1, 2, \ldots, k\}$ определяется следующим образом: все вершины j-й цепи, $1 \leqslant j \leqslant k$, обычной мультицепи M имеют цвет j.

Пусть M — обычная мультицепь длины l и толщины k; $C_1, C_2, \ldots, C_{l+1}$ — срезы обычной мультицепи M с номерами соответственно $1, 2, \ldots, l+1$. Через $M^{i,j}$, где $1 \leqslant i < j \leqslant l+1$, обозначим подграф графа M, порождённый множеством вершин $C_i \cup C_{i+1} \cup \ldots \cup C_j$. По определению раскраска $\varphi_{M^{i,j}}$ — это сужение φ_M на множество $C_i \cup C_{i+1} \cup \ldots \cup C_j$. Отметим, что граф $M^{i,j}$ — это обычная мультицепь длины $j-i$ и толщины k.

Пусть k и m — такие целые числа, что $k > m \geqslant 1$; M' — обычная мультицепь длины 2 и толщины m; C_1', C_2', C_3' — соответственно первый, второй и третий срезы мультицепи M'; C_1'' и C_3'' — такие множества вершин мощности $k-m$ каждое, что $C_1'' \cap C_3'' = C_1'' \cap VM' = C_3'' \cap VM' = \varnothing$, и в каждом из множеств C_1'', C_3'' вершины занумерованы числами от $m+1$ до k. Граф $M(V,E)$, заданный равенствами $V = VM' \cup C_1'' \cup C_3''$, $E = EM'$, будем называть *неполной мультицепью* мощности m и толщины k. По определению первым срезом неполной мультицепи M является множество $C_1 = C_1' \cup C_1''$, вторым срезом — множество $C_2 = C_2'$, третьим срезом — множество $C_3 = C_3' \cup C_3''$. Срезы C_1, C_3 будем называть концевыми срезами неполной мультицепи M, срез C_2 — внутренним; вершины концевых срезов неполной мультицепи M — концевыми вершинами неполной мультицепи M, вершины внутреннего среза — внутренними. По определению неполная мультицепь M соединяет концевые срезы C_1 и C_3. Раскраска φ_M неполной мультицепи M определяется следующим образом: если $v \in VM'$, то $\varphi_M(v) = \varphi_{M'}(v)$; если $v \in C_1'' \cup C_3''$, то $\varphi_M(v)$ равно номеру вершины v.

Пусть M — обычная мультицепь длины l и толщины k (или неполная мультицепь мощности m и толщины k); C_1, C_2 — первый и второй срезы мультицепи M. Через $\widehat{M}(V, E)$ обозначим граф, определённый равенствами $V = VM$, $E = EM \cup (C_1 \times C_2)$. Этот граф будем называть *расширенной мультицепью* длины l и толщины k (соответственно *расширенной неполной мультицепью* мощности m и толщины k). По определению раскраска $\varphi_{\widehat{M}}$ совпадает с φ_M; концевые и внутренние срезы расширенной (расширенной неполной) мультицепи $\widehat{M}$ — это соответственно концевые и внутренние срезы обычной (неполной) мультицепи M; расширенная (расширенная неполная) мультицепь $\widehat{M}$ соединяет свои концевые срезы.

Граф M будем называть *мультицепью*, если M либо обычная мультицепь, либо неполная мультицепь, либо расширенная мультицепь, либо расширенная неполная мультицепь.

Пусть A — некоторый граф с раскраской вершин $\varphi_A : VA \to \{1, 2, \ldots, k\}$; $M_1, \ldots, M_p$ — мультицепи толщины k. Будем говорить, что *граф G получен из графа A добавлением p мультицепей $M_1, \ldots, M_p$*, если выполнены следующие условия:

1) $G = A \cup M_1 \cup \ldots \cup M_p$;

2) концевые вершины мультицепей $M_1, \ldots, M_p$ принадлежат A;

3) внутренние вершины мультицепей $M_1, \ldots, M_p$ не принадлежат A;

4) общими вершинами мультицепей $M_1, \ldots, M_p$ могут быть только их концевые вершины;

5) для каждой концевой вершины v мультицепи M_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, выполнено равенство $\varphi_A(v) = \varphi_{M_j}(v)$.

Если граф G получен из графа A добавлением p мультицепей $M_1, \ldots, M_p$, то раскраска φ_G вершин графа G определяется следующим образом: если $v \in VA$, то $\varphi_G(v) = \varphi_A(v)$; если $v \in VM_j$, где $1 \leqslant j \leqslant p$, то $\varphi_G(v) = \varphi_{M_j}(v)$.

Для большей наглядности и с целью классификации вершин граф $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ будем строить на плоскости. Для этого на евклидовой плоскости T зафиксируем прямоугольную систему координат XOY. Для каждого целого z прямую, проходящую через точку с координатами $(0, z)$ параллельно оси OX, обозначим через L_z и будем называть её *уровнем* с номером z (или уровнем L_z). Отметим, что вершины графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ будут располагаться только на уровнях $L_0, L_1, \ldots, L_{2(d-1)}$.

Будем говорить, что *граф A расположен на плоскости*, если каждая вершина этого графа принадлежит некоторому уровню L_z евклидовой плоскости T.

Граф $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ будет строится следующим образом. К некоторому расположенному на плоскости графу будем добавлять расположенные на плоскости мультицепи. При этом все добавляемые мультицепи будут расположены на плоскости вполне определённым образом. Все вершины одного и того же среза мультицепи будут располагаться на одном уровне, вершины разных срезов — на разных уровнях.

Расположенную на плоскости мультицепь M будем называть *основной мультицепью*, если выполнены следующие условия: M — обычная мультицепь; все срезы мультицепи M расположены на чётных уровнях; номер уровня, на котором расположен i-й срез, равен $2z + 2i$, где z — некоторое целое число, зависящее только от мультицепи M.

Расположенную на плоскости мультицепь M длины l, где $l \geqslant 2$, будем называть *вспомогательной мультицепью*, если выполнены следующие условия: M — расширенная мультицепь; концевые срезы мультицепи M расположены на чётных уровнях, внутренние — на нечётных. Номер уровня, на котором расположен i-й срез, определяется следующим образом: если $i = 1$, то номер равен $2z$; если $2 \leqslant i \leqslant l$, то номер равен $2z-1+2(i-1)$; если $i = l+1$, то номер равен $2z+2(l-1)$ (z — некоторое целое число, зависящее только от мультицепи M).

Расположенную на плоскости мультицепь M будем называть *вспомогательной неполной мультицепью*, если выполнены следующие условия: M — неполная мультицепь; концевые срезы мультицепи M расположены на чётных уровнях, внутренний — на нечётном. Номер уровня, на котором расположен i-й срез, определяется следующим образом: если $i = 1$, то номер равен $2z$; если $i = 2$, то номер равен $2z + 1$; если $i = 3$, то номер равен $2z + 2$ (z — некоторое целое число, зависящее только от мультицепи M).

Приступим к определению отображения $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$. Для этого сначала определим граф $F_{d,\varkappa}(0, \ldots, 0)$. Пусть M_0 — основная мультицепь длины $d-1$ и толщины $\varkappa - 1$, первый срез которой расположен на уровне L_0, последний срез (срез с номером d) — на уровне $L_{2(d-1)}$. Обозначим через $A_{d,\varkappa}$ граф, полученный из M_0 добавлением $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ мультицепей $M_1, M_2, \ldots, M_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}$, где $M_1, M_2, \ldots, M_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}$ — основные мультицепи длины $d-1$ и толщины $\varkappa - 1$, соединяющие первый и последний срезы мультицепи M_0. Рассмотрим $1+2\lfloor(d-1)/2\rfloor$ мультицепей

$$M_0^{1,d}, M_1^{1,2}, M_1^{2,d}, \ldots, M_i^{1,i+1}, M_i^{i+1,d}, \ldots, M_{\lfloor(d-1)/2\rfloor}^{1,\lfloor(d-1)/2\rfloor+1}, M_{\lfloor(d-1)/2\rfloor}^{\lfloor(d-1)/2\rfloor+1,d}.$$

При чётном d обозначим их соответственно через

$$D_{d-1}, D_1, D_{d-2}, \ldots, D_i, D_{d-1-i}, \ldots, D_{\lfloor(d-1)/2\rfloor}, D_{d-1-\lfloor(d-1)/2\rfloor}.$$

Если d нечётно, то первые $d-1$ мультицепей

$$M_0^{1,d}, M_1^{1,2}, M_1^{2,d}, \ldots, M_i^{1,i+1}, M_i^{i+1,d}, \ldots, M_{(d-1)/2}^{1,(d-1)/2+1}$$

обозначим соответственно через

$$D_{d-1}, D_1, D_{d-2}, \ldots, D_i, D_{d-1-i}, \ldots, D_{(d-1)/2},$$

последнюю мультицепь $M_{(d-1)/2}^{(d-1)/2+1,d}$ обозначим через $D'_{(d-1)/2}$. Отметим, что мультицепи $D_1, D_2, \ldots, D_{d-1}$ — это основные мультицепи толщины $\varkappa-1$, длины которых равны соответственно $1, 2, \ldots, d-1$; если d нечётно, то $D'_{(d-1)/2}$ — основная мультицепь толщины $\varkappa-1$ и длины $(d-1)/2$.

В качестве графа $F_{d,\varkappa}(0,\ldots,0)$ при чётном d возьмём граф, полученный из графа $A_{d,\varkappa}$ добавлением $d-1$ мультицепей $P_1, \ldots, P_{d-1}$, а при нечётном d — граф, полученный из графа $A_{d,\varkappa}$ добавлением $d-1$ мультицепей $P_1, \ldots, P_{d-1}$ и одной мультицепи $P'_{(d-1)/2}$. Здесь $P_1, \ldots, P_{d-1}$ — вспомогательные мультицепи толщины $\varkappa-1$, которые соответственно соединяют первый и последний срезы мультицепей $D_1, \ldots, D_{d-1}$; если d нечётно, то $P'_{(d-1)/2}$ — вспомогательная мультицепь толщины $\varkappa-1$, соединяющая первый и последний срезы мультицепи $D'_{(d-1)/2}$. Отметим, что длина мультицепи P_i, где $1 \leqslant i \leqslant d-1$, равна $i+1$, а при нечётном d длина мультицепи $P'_{(d-1)/2}$ равна $(d-1)/2+1$. Граф $F_{d,\varkappa}(0,\ldots,0)$ изображён на рис. 1.

Пусть a и b — произвольные целые числа. Через $r(a,b)$ обозначим остаток от деления a на b, пусть $q(a,b) = \lfloor a/b \rfloor$. Через $\delta(z)$ обозначим функцию, заданную на множестве целых чисел, значения которой определяются следующим образом: $\delta(z)=0$ при $z=0$ и $\delta(z)=1$ при $z \neq 0$.

Пусть $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{d-1})$ — произвольный набор целых неотрицательных чисел. Определим граф $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$. Через q_i, l_i, m_i, где $1 \leqslant i \leqslant d-1$, обозначим соответственно числа

$$q(\Delta_i, (\varkappa-1)i), \quad q(r(\Delta_i, (\varkappa-1)i), \varkappa-1), \quad r(r(\Delta_i, (\varkappa-1)i), \varkappa-1).$$

Отметим, что при любом i, $1 \leqslant i \leqslant d-1$, справедливы соотношения

$$\Delta_i = q_i(\varkappa - 1)i + l_i(\varkappa - 1) + m_i, \quad i > l_i \geqslant 0, \quad \varkappa - 1 > m_i \geqslant 0.$$

В качестве графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ возьмём граф, полученный из графа $F_{d,\varkappa}(0, \ldots, 0)$ добавлением $\sum\limits_{i=1}^{d-1}(q_i + \delta(l_i) + \delta(m_i))$ мультицепей, среди которых для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant d-1$, имеется: q_i вспомогательных мультицепей длины $i+1$ и толщины $\varkappa - 1$, соединяющих первый и последний срезы мультицепи D_i; $\delta(l_i)$ вспомогательных мультицепей длины $l_i + 1$ и толщины $\varkappa - 1$, соединяющих первый и $(l_i + 1)$-й срезы мультицепи D_i; $\delta(m_i)$ вспомогательных неполных мультицепей мощности m_i и толщины $\varkappa - 1$, соединяющих $(l_i + 1)$-й и $(l_i + 2)$-й срезы мультицепи D_i. На рис. 2 изображён граф $F_{5,3}(0, 0, 9, 0)$.

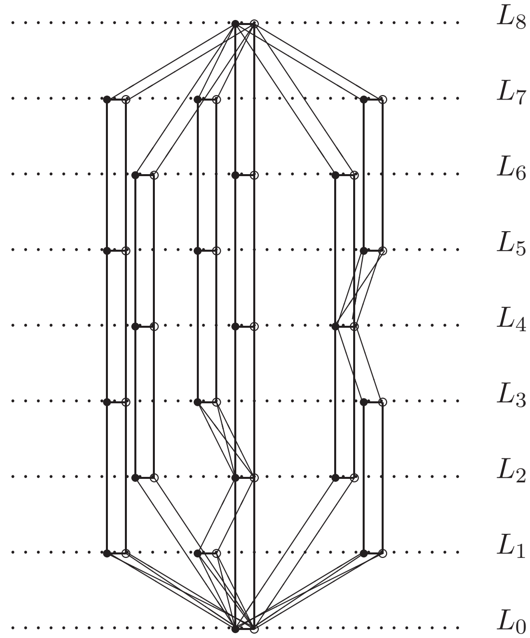

Рис. 1. Граф $F_{5,3}(0, 0, 0, 0)$

Через H_i, где $1 \leqslant i \leqslant d-1$, обозначим подграф графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$, являющийся объединением мультицепей D_i и P_i и $q_i + \delta(l_i) + \delta(m_i)$ мультицепей, добавленных к графу $F_{d,\varkappa}(0, \ldots, 0)$, которые соединяют некоторые срезы мультицепи D_i. Граф H_i, $1 \leqslant i \leqslant d-1$, будем называть *$i$-м фрагментом* графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$. Если d нечётно, через $H'_{(d-1)/2}$

обозначим подграф $D'_{(d-1)/2} \cup P'_{(d-1)/2}$ графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$. Граф $H'_{(d-1)/2}$ также будем называть фрагментом графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$.

Через B_i, где $1 \leqslant i < (d-1)/2$, обозначим подграф $H_i \cup H_{d-1-i}$ графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ и будем называть его *i-й полосой* графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$. Если d нечётно, через $B_{(d-1)/2}$ обозначим подграф $H_{(d-1)/2} \cup H'_{(d-1)/2}$ графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ и будем называть его *$(d-1)/2$-й полосой* графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$. Через B_0 обозначим подграф H_{d-1} графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ и будем называть его *нулевой полосой* графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$.

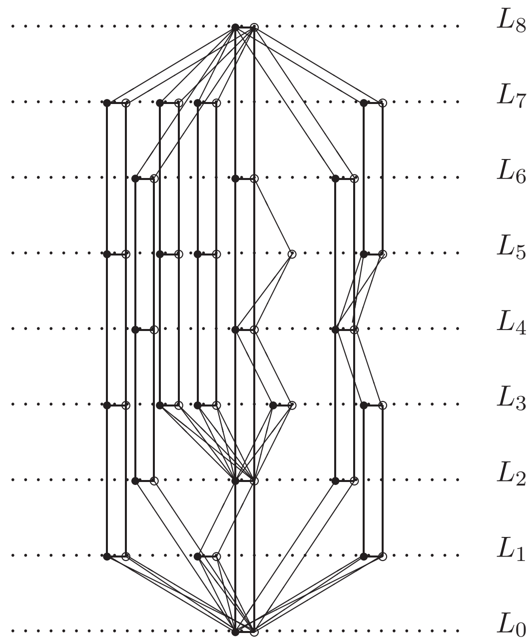

Рис. 2. Граф $F_{5,3}(0, 0, 9, 0)$

Утверждение 1. *Число вершинной связности графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ равно $\varkappa$.*

Доказательство. Справедливость утверждения 1 следует из следующего очевидного утверждения: если число вершинной связности графа A равно $\varkappa$ и граф G получен из графа A добавлением мультицепей длины не менее 2 и толщины $\varkappa - 1$, то число вершинной связности графа G равно $\varkappa$. Заметим, что процедура построения графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ допускает именно такое описание. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Диаметр графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ равен d.*

Доказательство. Сначала докажем, что диаметр $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ не больше d. Пусть u и v — произвольные вершины графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$. Покажем, что $\rho(u, v) \leqslant d$. Рассмотрим два возможных случая.

1) Вершины u и v принадлежат чётным уровням. Обозначим через S, N соответственно первый и последний срезы мультицепи M_0. Подграфы графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$, порождённые множеством вершин S и множеством вершин N, полные. Поэтому справедливо неравенство

$$\rho(u, v) \leqslant \min\{\rho(u, S) + \rho(S, v) + 1,\ \rho(u, N) + \rho(N, v) + 1\}.$$

Предположим, что $\rho(u, S) + \rho(S, v) + 1 \geqslant d$. Докажем, что тогда

$$\rho(u, N) + \rho(N, v) + 1 \leqslant d.$$

Так как вершины u, v принадлежат чётным уровням, справедливы равенства $\rho(S, u) + \rho(u, N) = d - 1$ и $\rho(S, v) + \rho(v, N) = d - 1$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\rho(u, N) + \rho(N, v) + 1 \\
&\quad = (\rho(S, u) + \rho(u, N) + \rho(S, v) + \rho(v, N)) - (\rho(u, S) + \rho(S, v) + 1) + 2 \\
&\quad \leqslant 2(d - 1) - d + 2 = d.
\end{aligned}$$

2) Вершина u принадлежит нечётному уровню. В этом случае справедливо неравенство

$$\rho(u, v) \leqslant \min\{\rho(u, S) + \rho(S, v),\ \rho(u, N) + \rho(N, v) + 1\}.$$

Предположим, что $\rho(u, S) + \rho(S, v) > d$. Докажем, что тогда $\rho(u, N) + \rho(N, v) + 1 \leqslant d$. Поскольку вершина u принадлежит нечётному уровню, справедливы соотношения $\rho(S, u) + \rho(u, N) = d$ и $\rho(S, v) + \rho(v, N) \leqslant d$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\rho(u, N) + \rho(N, v) + 1 \\
&\quad = (\rho(S, u) + \rho(u, N) + \rho(S, v) + \rho(v, N)) - (\rho(u, S) + \rho(S, v)) + 1 \\
&\quad < 2d - d + 1 = d + 1.
\end{aligned}$$

Теперь докажем, что диаметр графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ равен d. Рассмотрим такие вершины u, v в графе $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$, что $u \in H_{d-1} \cap L_1$, $v \in H_{d-1} \cap L_{2(d-1)}$ и цвета вершин u, v не совпадают. Очевидно, что $\rho(u, v) = d$. Утверждение 2 доказано.

Будем говорить, что *вершины u, v графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ принадлежат разным фрагментам графа* $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$, если среди фрагментов графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ не существует такого фрагмента H, что

$\{u, v\} \subseteq VH$.

Утверждение 3. *Если вершины u, v графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ принадлежат разным фрагментам графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$, или разным уровням, или имеют разные цвета, то в графе $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ при каждом r, $0 \leqslant r \leqslant d-1$, шары $S_r(u)$, $S_r(v)$ не совпадают.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $S_{d-1}(u) \neq S_{d-1}(v)$. Рассмотрим три возможных случая.

1) Вершины u, v принадлежат разным уровням. Справедливость неравенства $S_{d-1}(u) \neq S_{d-1}(v)$ следует из следующего факта: если вершина x графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ принадлежит уровню L_0, то дополнение шара $S_{d-1}(x)$ имеет непустое пересечение только с уровнем $L_{2(d-1)}$; если $x \in L_{2k}$, $1 \leqslant k \leqslant d-2$, то дополнение $S_{d-1}(x)$ имеет непустое пересечение только с уровнем $L_{2(d-1)+1-2k}$; если $x \in L_{2(d-1)}$, то дополнение $S_{d-1}(x)$ имеет непустое пересечение только с уровнями L_0, L_1; если $x \in L_1$, то дополнение $S_{d-1}(x)$ имеет непустое пересечение только с уровнями $L_{2(d-1)-1}$, $L_{2(d-1)}$; если $x \in L_{2k-1}$, $2 \leqslant k \leqslant d-1$, то дополнение $S_{d-1}(x)$ имеет непустое пересечение только с уровнями $L_{2(d-1)+1-2k}$, $L_{2(d-1)+2-2k}$, $L_{2(d-1)+3-2k}$.

2) Вершины u, v принадлежат одному уровню, но разным фрагментам графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$. Через i, j обозначим соответственно номера полос графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$, которым принадлежат вершины u, v. Без ограничения общности будем считать, что $i < j$. Справедливость неравенства $S_{d-1}(u) \neq S_{d-1}(v)$ следует из следующих очевидных соотношений: $B_j \subseteq S_{d-1}(v)$, $B_j \nsubseteq S_{d-1}(u)$.

3) Вершины u, v принадлежат одному уровню и одному фрагменту, но имеют разные цвета. Пусть i — номер уровня, которому принадлежат вершины u, v. Рассмотрим вершину x графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$, которая удовлетворяет следующим трём условиям:

a) цвета вершин x, v совпадают;

b) если $i = 0$, то $x \in L_{2(d-1)}$; если $1 \leqslant i \leqslant 2(d-1)$, то $x \in L_{2(d-1)+1-i}$;

c) если $2 \leqslant i \leqslant 2(d-1)-1$, то вершины x, u принадлежат разным полосам графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$.

Справедливость неравенства $S_{d-1}(u) \neq S_{d-1}(v)$ следует из следующих очевидных соотношений: $x \in S_{d-1}(v)$, $\{x\} \cap S_{d-1}(u) = \varnothing$. Утверждение 3 доказано.

Используя аналогичные соображения, получаем следующее

Утверждение 4. *Пусть вершины u и v графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ лежат на одном уровне, имеют одинаковые цвета и принадлежат j-му* *фрагменту, $1 \leqslant j \leqslant d-1$, графа $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $0 \leqslant r \leqslant j$, то в графе $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ шары $S_r(u)$ и $S_r(v)$ не совпадают*;

2) *если $r > j$, то в графе $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ шары $S_r(u)$ и $S_r(v)$ совпадают.*

Утверждение 5. *Для компонент вектора $\overline{\tau}(F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})) = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{d-1}, 1)$ справедливы следующие равенства*:

$\tau_0 - \tau_1 = 0$;

$\tau_i - \tau_{i+1} = \Delta_i,\ 1 \leqslant i \leqslant d-2$;

$\tau_{d-1} - ((2d-3)(\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1) + 2)(\varkappa - 1) = \Delta_{d-1}$.

Доказательство. Из определения отображения $F_{d,\varkappa}$ следует, что число вершин в графе $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$ равно

$$((2d-3)(\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1) + 2)(\varkappa - 1) + \sum_{j=1}^{d-1} \Delta_j.$$

Из утверждений 3 и 4 следует, что компонента τ_i, $1 \leqslant i \leqslant d-1$, вектора $\overline{\tau}(F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1}))$ равна числу вершин в графе $F_{d,\varkappa}(0, \ldots, 0, \Delta_i, \Delta_{i+1}, \ldots, \Delta_{d-1})$. Поэтому для компонент вектора $\overline{\tau}(F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1}))$ выполнены следующие равенства:

$$\tau_0 = ((2d-3)(\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1) + 2)(\varkappa - 1) + \sum_{j=1}^{d-1} \Delta_j;$$

$$\tau_i = ((2d-3)(\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1) + 2)(\varkappa - 1) + \sum_{j=i}^{d-1} \Delta_j,\ 1 \leqslant i \leqslant d-1.$$

Утверждение 5 является непосредственным следствием этих равенств. Утверждение 5 доказано.

Вернёмся к построению графа $G \in \Gamma(d, \varkappa)$ такого, что $\overline{\tau}(G) = \overline{c}$. Граф G построим следующим образом: в графе $F_{d,\varkappa}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-1})$, где $\Delta_i = c_i - c_{i+1}$ при $1 \leqslant i \leqslant d-2$ и $\Delta_{d-1} = c_{d-1} - ((2d-3)(\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1) + 2)(\varkappa - 1)$, произвольную вершину x заменим на полный граф $K_{c_0 - c_1 + 1}$. Из утверждений 1 и 2 следует, что $G \in \Gamma(d, \varkappa)$. Пользуясь утверждением 5, получаем, что $\overline{\tau}(G) = \overline{c}$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если $d = 2$ и $\varkappa \geqslant 3$, то $m(d, \varkappa) \leqslant 3(\varkappa - 1) + 1$.*

Доказательство. Отметим, что при $d = 2$ справедливо равенство

$$((2d-3)(\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1) + 2)(\varkappa - 1) = 3(\varkappa - 1).$$

Доказательство леммы 7 дословно совпадает с доказательством леммы 6 с учётом того, что $d = 2$. «Ухудшение» на единицу правой части неравенства в лемме 6 объясняется тем, что утверждения 1–5 остаются верными для графа $F_{2,\varkappa}(\Delta_1)$ только при $\Delta_1 \geqslant 1$. Утверждения 3 и 5 для графа $F_{2,\varkappa}(0)$ не верны. Лемма 7 доказана.

Теорема 1 доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Пусть $d \geqslant 2$, $\varkappa \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ — произвольные целые числа и $\overline{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_d) \in M_d(n)$. Обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ соответственно число единиц, число двоек и т. д. в последовательности $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{d-1}$. Ясно, что мощность множества $M_d(n)$ совпадает с числом решений в целых неотрицательных числах уравнения $x_1 + \ldots + x_n = d$, которое, как известно [6], равно $\binom{n-1+d}{d}$. Кроме того, из теоремы 1 следует, что мощность множества $R_d(n)$ не меньше числа решений в целых неотрицательных числах уравнения $x_{d^2\varkappa+3} + x_{d^2\varkappa+4} + \ldots + x_n = d$. Это число равно $\binom{n-(d^2\varkappa+3)+d}{d}$. Поэтому для любых $d \geqslant 2$ и $\varkappa \geqslant 1$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|R_{d,\varkappa}(n)|}{|M_d(n)|} = 1$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дистель Р.** Теория графов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002.
2. **Евдокимов А. А.** Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сибирский журнал исследования операций. 1994. Т. 1, № 1. С. 5–12.
3. **Евдокимов А. А.** Кодирование структурированной информации и вложения дискретных пространств // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 48–58.
4. **Рычков К. Л.** О достаточных условиях существования графа с заданным разнообразием шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 1. С. 99–108.
5. **Федоряева Т. И.** Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, № 3. С. 74–84.
6. **Холл М.** Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
Россия.
E-mail: rychkov@math.nsc.ru

Статья поступила
14 марта 2007 г.