ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2007. Серия 2. Том 14, № 1. 59–71

УДК 519.8

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ МОДУЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ*)

Е. Е. Гуревский, В. А. Емеличев

Рассматривается многокритериальная лексикографическая булева задача минимизации абсолютных отклонений от нуля линейных функций. Исследуется тот тип устойчивости задачи, который является дискретным аналогом свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу многозначного оптимального отображения, задающего лексикографическую функцию выбора. Получены нижняя и верхняя достижимые оценки для радиуса устойчивости задачи. Приводятся некоторые качественные результаты.

Введение

Практически любая задача, относящаяся к проблемам проектирования, планирования и управления в технических и организационных системах, носит ярко выраженный многокритериальный характер. Во многих случаях возникающие при этом многоцелевые модели сводятся к выбору лучших в каком-то смысле значений параметров из некоторой дискретной совокупности заданных величин. Поэтому интерес к векторным задачам дискретной оптимизации не ослабевает, что подтверждается частым появлением новых публикаций в этой области (см., например, библиографию [18], содержащую 234 наименования). Одно из направлений исследования таких задач — анализ устойчивости решений относительно возмущений исходных данных задачи. Разнообразные постановки проблем корректности и устойчивости как скалярных, так и векторных задач дискретной оптимизации порождают многочисленные теоретические исследования. Не задерживаясь на описании всего спектра вопросов, возникающих в этой области, отсылаем читателя к обширной библиографии [20], а также к монографиям [13–15] и обзорам [8, 9, 19, 21]. Уместно

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Межвузовской программы Республики Беларусь «Фундаментальные и прикладные исследования» (грант 492/28).

упомянуть также недавно появившееся направление, связанное с исследованием устойчивости алгоритмов решения задач дискретной оптимизации [10, 11, 17].

Настоящая статья лежит в русле направления, связанного с конструктивным подходом к проблеме устойчивости, состоящим в получении количественных характеристик устойчивости. Как правило, такой характеристикой выступает радиус устойчивости задачи, определяемый как предельный уровень возмущений исходных данных задачи, сохраняющих некоторое наперёд заданное свойство множества оптимальных решений. Продолжая цикл исследований, посвящённый проблемам устойчивости векторных задач дискретной оптимизации и отраженный в [2, 3, 6, 7, 8, 19], рассмотрим многокритериальную булеву задачу минимизации абсолютных отклонений от нуля линейных функций с лексикографическим принципом оптимальности и проведём анализ дискретного аналога полунепрерывности сверху по Хаусдорфу лексикографически оптимального отображения для получения нижней и верхней достижимых оценок радиуса устойчивости задачи в метрике l_∞. Отметим, что ранее подобные результаты были получены в [5] (см. также [8]) для векторных лексикографических задач целочисленного линейного программирования.

1. Основные определения и обозначения

Пусть m — число критериев, n — число переменных, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbb{E}^n = \{0,1\}^n$, $|X| \geqslant 2$, A_i — i-я строка матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ с элементами из $\mathbb{R}$, $m \geqslant 1$, $n \geqslant 2$, $i \in N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$. На множестве решений X зададим векторную функцию $f(x, A, b) = (|A_1x + b_1|, |A_2x + b_2|, \ldots, |A_mx + b_m|)$.

В критериальном пространстве $\mathbb{R}^m$ введём бинарное отношение *лексикографического порядка* $\prec$ между различными векторами $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ и $y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)$, полагая $y \prec y' \iff y_k < y'_k$, где $k = \min\{i \in N_m : \ y_i \neq y'_i\}$.

Под *m-критериальной* (векторной) *лексикографической задачей булева программирования* $Z^m(A, b)$: $\operatorname{lex}\ \min\{f(x, A, b) \mid x \in X\}$ будем понимать задачу поиска *лексикографического множества*

$$L^m(A, b) = \{x \in X \mid \forall\, x' \in X \quad \big(f(x', A, b) \mathrel{\overline{\prec}} f(x, A, b)\big)\},$$

где $\overline{\prec}$ — отрицание лексикографического отношения $\prec$. Очевидно, что множество $L^m(A, b)$ не пусто при любых матрице A и векторе b. Элементы множества $L^m(A, b)$ будем называть *лексикографическими оптимумами.*

Тем самым, все частные критерии упорядочены по важности так, что несущественные улучшения более важного критерия значительнее сколь угодно больших потерь по всем остальным — менее важным. Такое упорядочение частных критериев по степени предпочтения даёт возможность расположить все решения подобно тому, как располагаются слова в словаре. Поэтому указанное отношение предпочтения часто называют лексикографическим, а многокритериальные задачи со строго линейно упорядоченными критериями — задачами лексикографической (или иначе, последовательной) оптимизации [12, 16].

Отметим, что векторная функция $f(x, A, b)$ характеризует меру несовместности (абсолютных отклонений) следующей системы линейных булевых уравнений

$$Ax + b = \mathbf{0}_{(m)}, \quad x \in X, \tag{1}$$

где $\mathbf{0}_{(m)} = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^m$.

Поэтому задача $Z^m(A, b)$ является задачей отыскания множества всех решений системы (1) при условии, что эта система совместна. Нетрудно видеть, что система уравнений (1) совместна тогда и только тогда, когда множество $\{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x, A, b),\ x \in L^m(A, b)\} = \{\mathbf{0}^T_{(m)}\}$.

Следующие свойства очевидны.

Свойство 1. *Решение $x^0 \in X$ является лексикографическим оптимумом задачи $Z^m(A, b)$, если для любого решения $x \neq x^0$ выполняется неравенство $|A_1 x + b_1| > |A_1 x^0 + b_1|$.*

Свойство 2. *Решение x не является лексикографическим оптимумом задачи $Z^m(A, b)$, если существует такое решение $x^0 \in X$, что*

$$|A_1 x + b_1| > |A_1 x^0 + b_1|.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ произвольной размерности $k \in \mathbb{N}$ зададим две метрики l_1 и l_∞, т. е. под нормами вектора $z = (z_1, z_2, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k$ будем понимать соответственно числа $||z||_1 = \sum\limits_{j \in N_k} |z_j|$ и $||z||_\infty = \max\limits_{j \in N_k} |z_j|$, а под нормой матрицы — норму вектора, составленного из её элементов.

Для любого числа $\varepsilon > 0$ введём *множество возмущающих пар*:

$$\Omega(\varepsilon) = \{(A', b') \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \mid \max\{||A'||_\infty, ||b'||_\infty\} < \varepsilon\}.$$

Задачу $Z^m(A + A', b + b')$, где $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, будем называть *возмущённой.*

Следуя [4, 5, 8, 19], задачу $Z^m(A, b)$ назовём *устойчивой*, если

$$\Xi := \{\varepsilon > 0 \mid \forall\ (A', b') \in \Omega(\varepsilon)\ (L^m(A + A', b + b') \subseteq L^m(A, b))\} \neq \varnothing.$$

Тем самым, устойчивость задачи $Z^m(A,b)$ является дискретным аналогом свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу в точке (A,b) многозначного оптимального отображения (см., например, [1, 13])

$$L^m: \ \mathbb{R}^{m\times(n+1)} \to 2^X,$$

т. е. точечно-множественного отображения, которое каждому набору параметров задачи $Z^m(A,b)$ ставит в соответствие лексикографическое множество $L^m(A,b)$.

Радиусом устойчивости задачи $Z^m(A,b)$ называется число

$$\rho^m(A,b) = \begin{cases} \sup\ \Xi, & \text{если } \Xi \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \Xi = \varnothing. \end{cases}$$

Таким образом, радиус устойчивости задачи $Z^m(A,b)$ задаёт предел возмущений элементов пары (A,b) в пространстве $\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ с метрикой l_∞, при которых не возникает новых лексикографических оптимумов.

Очевидно, что в случае, когда $L^m(A,b) = X$, радиус устойчивости $\rho^m(A,b)$ равен бесконечности. Поэтому этот случай будем исключать из рассмотрения, а задачу $Z^m(A,b)$, для которой множество $\overline{L}^m(A,b) = X \setminus L^m(A,b)$ не пусто, назовём *нетривиальной*.

В дальнейшем будем использовать обозначения $Q = \{-1, 1\}$,

$$\text{sg}\ t = \begin{cases} \ \ 1, & \text{если } t \geqslant 0, \\ -1, & \text{если } t < 0 \end{cases}$$

и импликацию

$$(\exists q \in Q \ \ \forall q' \in Q \ \ (qt > q't')) \Rightarrow |t| > |t'|, \tag{2}$$

которая с очевидностью выполняется для чисел $t,\ t' \in \mathbb{R}$.

2. Оценки радиуса устойчивости

Положим

$$\varphi^m(A,b) = \min_{x\in\overline{L}^m(A,b)} \ \max_{x'\in L^m(A,b)} \ \min_{q\in Q} \ \frac{|A_1(x+qx') + b_1(1+q)|}{||x+qx'||_1 + 1 + q}. \tag{3}$$

Теорема. *Для радиуса устойчивости $\rho^m(A,b)$ нетривиальной задачи $Z^m(A,b),\ m \geqslant 1$, справедливы оценки*

$$\varphi^m(A,b) \leqslant \rho^m(A,b) \leqslant \max\{||A_1||_\infty, |b_1|\},$$

причём $\rho^m(A, b) = \varphi^m(A, b)$, *если* $|L^m(A, b)| = 1$.

Доказательство. Легко видеть, что $\varphi := \varphi^m(A, b) \geqslant 0$.

Сначала докажем неравенство $\rho^m(A, b) \geqslant \varphi$. Не уменьшая общности, считаем, что $\varphi > 0$ (в противном случае неравенство $\rho^m(A, b) \geqslant \varphi$ очевидно). Пусть возмущающая пара $(A', b') \in \Omega(\varphi)$. Тогда в соответствии с определением (3) числа φ при любом решении $x \in \overline{L}^m(A, b)$ существует такой лексикографический оптимум $x^0 \in L^m(A, b)$, что для любого $q \in Q$ выполняются неравенства

$$\psi < \varphi \leqslant \alpha(x, x^0, q), \tag{4}$$

где $\alpha(x, x^0, q) = \dfrac{|A_1(x + qx^0) + (1 + q)b_1|}{||x + qx^0||_1 + 1 + q}$, $\psi = \max\{||A'||_\infty, ||b'||_\infty\}$. Это значит, что

$$|A_1(x + qx^0) + (1 + q)b_1| > 0,\ q \in Q.$$

Поэтому ввиду $x^0 \in L^m(A, b)$ получаем $|A_1x + b_1| > |A_1x^0 + b_1|$. Отсюда, полагая $\sigma = \mathrm{sg}\ (A_1x + b_1)$, получаем

$$\beta(q) := A_1(\sigma x + qx^0) + b_1(\sigma + q) > 0,\ q \in Q.$$

Поэтому в силу (4) имеем

$$\begin{aligned}\sigma((A_1 + A_1')x + b_1 + b_1') + q((A_1 + A_1')x^0 + b_1 + b_1') = \beta(q)\\ + \sigma(A_1'(x + \sigma qx^0) + (1 + \sigma q)b_1') \geqslant \beta(q) - (||A'||_\infty ||x + \sigma qx^0||_1\\ + ||b'||_\infty(1 + \sigma q)) \geqslant \beta(q) - \psi(||x + \sigma qx^0||_1 + 1 + \sigma q) > |A_1(x + \sigma qx^0)\\ + (1 + \sigma q)b_1| - \alpha(x, x^0, \sigma q) \cdot (||x + \sigma qx^0||_1 + 1 + \sigma q) = 0,\ q \in Q.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma((A_1 + A_1')x + b_1 + b_1') > q((A_1 + A_1')x^0 + b_1 + b_1'),\ q \in Q.$$

Пользуясь этим фактом и импликацией (2), получаем

$$|(A_1 + A_1')x + b_1 + b_1'| > |(A_1 + A_1')x^0 + b_1 + b_1'|.$$

В силу свойства 2 из этого неравенства следует, что решение x не является лексикографическим оптимумом возмущенной задачи $Z^m(A + A', b + b')$. Поэтому для любой пары $(A', b') \in \Omega(\varphi)$ верно включение

$$L^m(A + A', b + b') \subseteq L^m(A, b),$$

из которого следует неравенство $\rho^m(A, b) \geqslant \varphi$.

Докажем справедливость верхней оценки:

$$\rho^m(A, b) \leqslant \zeta := \max\{||A_1||_\infty, |b_1|\}. \tag{5}$$

Пусть $\varepsilon > \zeta$ и решение $x^0 \in \overline{L}^m(A, b)$. Существование таких решений гарантируется нетривиальностью задачи $Z^m(A, b)$. Для доказательства неравенства (5) достаточно указать такую возмущающую пару $(A^*, b^*) \in \Omega(\varepsilon)$, что решение x^0 становится лексикографическим оптимумом возмущённой задачи $Z^m(A + A^*, b + b^*)$.

Покажем, что такой парой является возмущающая пара (A^*, b^*) с элементами, задаваемыми по правилу

$$a^*_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} + \delta, & \text{если } i = 1,\ x^0 = \mathbf{0}_{(n)},\ j \in N_n, \\ -a_{ij} - \frac{\delta}{||x^0||_1}, & \text{если } i = 1,\ x^0 \neq \mathbf{0}_{(n)},\ x^0_j = 1, \\ -a_{ij} + \delta, & \text{если } i = 1,\ x^0 \neq \mathbf{0}_{(n)},\ x^0_j = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$b^*_i = \begin{cases} -b_i, & \text{если } i = 1,\ x^0 = \mathbf{0}_{(n)}, \\ -b_i + \delta, & \text{если } i = 1,\ x^0 \neq \mathbf{0}_{(n)}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 < \delta < \varepsilon - \zeta$.

Тогда нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$(A_1 + A^*_1)x^0 + (b_1 + b^*_1) = 0, \quad (A^*, b^*) \in \Omega(\varepsilon). \tag{6}$$

Покажем, что для любого решения $x \neq x^0$ выполнено неравенство

$$|(A_1 + A^*_1)x + b_1 + b^*_1| > 0. \tag{7}$$

Для этого введём обозначения:

$$N(x, x^0) = |\{j \in N_n \mid x_j = 1 \ \text{ и } \ x^0_j = 0\}|,$$
$$M(x, x^0) = |\{j \in N_n \mid x_j = 1 \ \text{ и } \ x^0_j = 1\}|.$$

Легко видеть, что

$$M(x, x^0) \leqslant ||x^0||_1. \tag{8}$$

Для любого решения $x \in X\backslash\{x^0\}$ рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $x = \mathbf{0}_{(n)}$. Тогда $x^0 \neq \mathbf{0}_{(n)}$. Поэтому

$$(A_1 + A^*_1)x + b_1 + b^*_1 = b_1 + b^*_1 = \delta > 0.$$

Случай 2. $x \neq \mathbf{0}_{(n)}$. Рассмотрим два возможных подслучая.

2.1. $x^0 = \mathbf{0}_{(n)}$. Тогда имеем

$$(A_1 + A_1^*)x + b_1 + b_1^* = (A_1 + A_1^*)x = ||x||_1 \cdot \delta > 0.$$

2.2. $x^0 \neq \mathbf{0}_{(n)}$. В этом подслучае получаем

$$(A_1 + A_1^*)x + b_1 + b_1^* = (A_1 + A_1^*)x + \delta = N(x, x^0) \cdot \delta - M(x, x^0) \cdot \frac{\delta}{||x^0||_1} + \delta.$$

Правую часть последних равенств обозначим через ω. Если $N(x, x^0) \neq 0$ то учитывая (8), находим, что $\omega \geqslant N(x, x^0) \cdot \delta > 0$. Если $N(x, x^0) = 0$, то нетрудно видеть, что $M(x, x^0) < ||x^0||_1$. Поэтому $\omega > 0$.

Резюмируя сказанное выше, заключаем, что верно (7). Поэтому, учитывая (6), находим, что для любого решения $x \neq x^0$

$$|(A_1 + A_1^*)x + b_1 + b_1^*| > |(A_1 + A_1^*)x^0 + b_1 + b_1^*|.$$

Отсюда и из свойства 1 следует, что решение x^0 является лексикографическим оптимумом возмущённой задачи $Z^m(A + A', b + b')$. Таким образом, для любого $\varepsilon > \zeta$ существует такая пара $(A^*, b^*) \in \Omega(\varepsilon)$, что

$$L^m(A + A^*, b + b^*) \not\subseteq L^m(A, b).$$

Следовательно, $\rho^m(A, b) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > \zeta$, т. е. верно неравенство (5).

Наконец, рассмотрим случай, когда множество $L^m(A, b)$ состоит из единственного решения x^*. Докажем, что тогда $\rho^m(A, b) = \varphi^m(A, b)$. В этом случае

$$\varphi^m(A, b) = \min_{x \in X \setminus \{x^*\}} \gamma(x, x^*), \tag{9}$$

где $\gamma(x, x^*) = \min\{\alpha(x, x^*, q) \mid q \in Q\}$.

Поэтому с учётом неравенства $\rho^m(A, b) \geqslant \varphi$ для завершения доказательства теоремы осталось показать, что $\rho^m(A, b) \leqslant \xi$, где ξ — правая часть равенства (9). Очевидно, что для этого достаточно доказать справедливость формулы

$$\forall\, \varepsilon > \xi \;\; \exists\, (A', b') \in \Omega(\varepsilon) \;\; \exists\, x' \in X \setminus \{x^*\} \;\; (x' \in L^m(A + A', b + b')). \tag{10}$$

Согласно определению числа ξ найдется такое решение $x^0 \in X \setminus \{x^*\}$, что

$$\gamma(x^0, x^*) = \xi. \tag{11}$$

Далее будем использовать обозначения

$$\sigma^* = \mathrm{sg}\ (A_1x^* + b_1), \quad \sigma^0 = \mathrm{sg}\ (A_1x^0 + b_1).$$

Легко видеть, что хотя бы одно из чисел $N(x^0, x^*)$ или $N(x^*, x^0)$ положительно и

$$\max\{N(x^*, x^0),\ N(x^0, x^*)\} \leqslant ||x^0 + x^*||_1, \tag{12}$$

$$N(x^*, x^0) + N(x^0, x^*) = ||x^0 - x^*||_1. \tag{13}$$

Для построения необходимой возмущающей пары $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, $\varepsilon > \xi$, рассмотрим три возможных случая.

Случай 1. $\alpha(x^0, x^*, -1) < \alpha(x^0, x^*, 1)$. Тогда

$$0 < \alpha(x^0, x^*, 1) \leqslant \frac{|A_1x^* + b_1| + |A_1x^0 + b_1|}{||x^* + x^0||_1 + 2} \tag{14}$$

и согласно (11) существует такое число $\delta < \varepsilon$, что

$$0 \leqslant \alpha(x^0, x^*, -1) = \xi < \delta < \alpha(x^0, x^*, 1). \tag{15}$$

Отсюда, задавая элементы возмущающей пары (A', b') по правилам

$$a'_{ij} = \begin{cases} \sigma^*\delta, & \text{если } i = 1,\ x^*_j = 1,\ x^0_j = 0, \\ -\sigma^0\delta, & \text{если } i = 1,\ x^*_j = 0,\ x^0_j = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad b' = \mathbf{0}_{(m)} \tag{16}$$

и учитывая (13), имеем

$$\sigma^*((A_1 + A'_1)x^* + b_1 + b'_1) - \sigma^0((A_1 + A'_1)x^0 + b_1 + b'_1) = |A_1x^* + b_1|$$
$$- |A_1x^0 + b_1| + \delta(N(x^0, x^*) + N(x^*, x^0)) \geqslant -|A_1(x^0 - x^*)| + \delta||x^0 - x^*||_1$$
$$> -|A_1(x^0 - x^*)| + \alpha(x^0, x^*, -1)||x^0 - x^*||_1 = 0, \tag{17}$$

$$\sigma^*((A_1 + A'_1)x^* + b_1 + b'_1) + \sigma^0((A_1 + A'_1)x^0 + b_1 + b'_1)$$
$$= |A_1x^* + b_1| + |A_1x^0 + b_1| + \delta(N(x^*, x^0) - N(x^0, x^*)). \tag{18}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\max\{||A'||_\infty, ||b'||_\infty\} = \delta, \tag{19}$$

т. е. $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$.

Правую часть равенства (18) обозначим через η. Если $N(x^0, x^*) = 0$, то ввиду (14) имеем $\eta > 0$. Если $N(x^0, x^*) > 0$, то, используя (12), (14)

и (15), получаем $\delta N(x^0, x^*) < |A_1x^* + b_1| + |A_1x^0 + b_1|$. Отсюда следует, что $\eta > \delta N(x^*, x^0) \geqslant 0$. Итак, $\eta > 0$. Следовательно,

$$\sigma^*((A_1 + A_1')x^* + b_1 + b_1') > \sigma^0 q((A_1 + A_1')x^0 + b_1 + b_1'),\ \ q \in Q.$$

Поэтому, используя (2), получаем

$$|(A_1 + A_1')x^* + b_1 + b_1'| > |(A_1 + A_1')x^0 + b_1 + b_1'|. \tag{20}$$

Случай 2. $\alpha(x^0, x^*, -1) > \alpha(x^0, x^*, 1)$. Тогда согласно (11) найдётся такое число $\delta < \varepsilon$, что справедливы неравенства

$$0 \leqslant \alpha(x^0, x^*, 1) = \xi < \delta < \alpha(x^0, x^*, -1).$$

Отсюда, определяя элементы возмущающей пары (A', b') по формулам

$$a'_{ij} = \begin{cases} -\sigma^0\delta, & \text{если } i = 1,\ j \in N_n, \\ 0, & \text{если } i \neq 1,\ j \in N_n, \end{cases} \qquad b'_i = \begin{cases} -\sigma^0\delta, & \text{если } i = 1, \\ 0, & \text{если } i \neq 1, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{gathered} -\sigma^0((A_1{+}A_1')x^*{+}b_1{+}b_1'){-}\sigma^0((A_1{+}A_1')x^0{+}b_1{+}b_1'){=}{-}\sigma^0(A_1(x^0{+}x^*){+}2b_1) \\ +\delta(||x^*||_1{+}||x^0||_1{+}2) > -|A_1(x^0{+}x^*){+}2b_1|{+}\alpha(x^0, x^*, 1)(||x^0{+}x^*||_1{+}2) = 0, \\ -\sigma^0((A_1 + A_1')x^* + b_1 + b_1') + \sigma^0((A_1 + A_1')x^0 + b_1 + b_1') = \sigma^0 A_1(x^0 - x^*) \\ - \delta(||x^0||_1 - ||x^*||_1) = |A_1(x^0 - x^*)| - \delta(||x^0||_1 - ||x^*||_1) \\ > |A_1(x^0 - x^*)| - \alpha(x^0, x^*, -1)||x^0 - x^*||_1 = 0. \end{gathered}$$

Кроме того, справедливо равенство (19), т. е. $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$. Поэтому имеют место неравенства

$$-\sigma^0((A_1 + A_1')x^* + b_1 + b_1') > \sigma^0 q((A_1 + A_1')x^0 + b_1 + b_1'),\ \ q \in Q.$$

Отсюда с использованием (2) получаем неравенство (20).

Случай 3. $\alpha := \alpha(x^0, x^*, -1) = \alpha(x^0, x^*, 1) = \gamma(x^0, x^*)$. Тогда

$$\alpha \leqslant \frac{|A_1x^* + b_1| + |A_1x^0 + b_1|}{||x^* + x^0||_1 + 2}. \tag{21}$$

Рассмотрим два возможных варианта. Сначала пусть $\alpha = 0$. Тогда

$$A_1x^0 + b_1 = A_1x^* + b_1 = 0. \tag{22}$$

Если $N(x^*, x^0) > 0$, то, задавая элементы возмущающей пары (A', b') по формулам

$$a'_{ij} = \begin{cases} \delta, \text{ если } i = 1,\ x_j^* = 1,\ x_j^0 = 0, \\ 0 \ \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \qquad b' = \mathbf{0}_{(m)},$$

где $0 \leqslant \xi < \delta < \varepsilon$, убеждаемся, что верно равенство (19), а также согласно (22) — и неравенство (20).

Если же $N(x^*, x^0) = 0$, то $N(x^0, x^*) > 0$, т. е. существует такой индекс $p \in N_n$, что $x_p^0 = 1$ и $x_p^* = 0$. Тогда, задавая элементы пары (A', b') формулами

$$a'_{ij} = \begin{cases} -\delta/2, & \text{если } (i,j) = (1,p), \\ 0, & \text{если } (i,j) \neq (1,p), \end{cases} \qquad b'_i = \begin{cases} \delta, & \text{если } i = 1, \\ 0, & \text{если } i \neq 1, \end{cases}$$

где $0 \leqslant \xi < \delta < \varepsilon$, с использованием (22) вновь убеждаемся в справедливости (20), причём $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$.

Пусть теперь $\alpha > 0$. Полагая

$$\alpha = \xi < \delta < \varepsilon, \tag{23}$$

построим возмущающую пару (A', b') по формулам (16). Тогда верны соотношения (17), (18) и (19). Как и в случае 1, покажем, что $\eta > 0$. Если $N(x^0, x^*) = 0$, то $\eta > 0$ согласно (21). Если $N(x^0, x^*) > 0$, то, учитывая (12) и (21), на число δ можно дополнительно к условию (23) наложить требование: $\delta N(x^0, x^*) < |A_1 x^* + b_1| + |A_1 x^0 + b_1|$. Поэтому (см. случай 1) $\eta > \delta N(x^*, x^0) \geqslant 0$. Следовательно, и в этом случае справедливо неравенство (20).

Итак, в каждом из трёх рассмотренных случаев построена такая возмущающая пара $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, что справедливо неравенство (20). Это неравенство в силу свойства 2 свидетельствует о том, что решение x^* не является лексикографическим оптимумом возмущённой задачи $Z^m(A + A', b + b')$. Так как $L^m(A + A', b + b') \neq \varnothing$, то существует такое решение $x' \neq x^*$, что $x' \in L^m(A + A', b + b')$.

Резюмируя, заключаем, что верна формула (10). Поэтому $\rho^m(A, b) \leqslant \xi$. Следовательно, радиус устойчивости задачи $Z^m(A, b)$ в случае, когда $|L^m(A, b)| = 1$, равен $\varphi^m(A, b)$. Теорема доказана.

Замечание. Итак, доказано, что нижняя оценка $\varphi^m(A, b)$ радиуса устойчивости нетривиальной задачи $Z^m(A, b)$, $m \geqslant 1$, достижима. Кроме того, легко видеть, что и верхняя оценка достижима. Действительно, полагая $x^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, $x^{(2)} = (1, 1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$,

$A_1 = (1, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $b_1 = 1$ и выбирая при $m \geqslant 2$ остальные элементы пары (A, b) произвольно, убеждаемся, что $\varphi^m(A, b) = 1$. Поэтому по теореме имеем $\rho^m(A, b) = 1 = \max\{||A_1||_\infty, |b_1|\}$.

3. Условия устойчивости

Из теоремы вытекает ряд следствий. Введём множество

$$S^m(A, b) = \{x \in X \mid \forall\, x' \in X \quad (|A_1 x + b_1| \leqslant |A_1 x' + b_1|)\}. \qquad (24)$$

Очевидно, что включение $L^m(A, b) \subseteq S^m(A, b)$ справедливо для любых параметров $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Следствие 1. *Если*

$$L^m(A, b) = S^m(A, b), \qquad (25)$$

то задача $Z^m(A, b)$ устойчива.

Доказательство. Очевидно, что для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда задача $Z^m(A, b)$ нетривиальна. Пусть выполнено равенство (25). Тогда ввиду (24) для всякого решения $x \in \overline{L}^m(A, b)$ существует такой лексикографический оптимум $x' \in L^m(A, b)$, что выполняется неравенство $|A_1 x + b_1| > |A_1 x' + b_1|$. Поэтому для любых $q \in Q$ и $x \in \overline{L}^m(A, b)$ существует такое решение $x' \in L^m(A, b)$, что

$$|A_1(x + qx') + b_1(1 + q)| \geqslant |A_1 x + b_1| - |A_1 x' + b_1| > 0,$$
$$||x + qx'||_1 + 1 + q > 0.$$

Следовательно, $\varphi^m(A, b) > 0$, а значит в силу теоремы задача $Z^m(A, b)$ устойчива. Следствие 1 доказано.

Так как $L^1(A, b) = S^1(A, b)$, то из следствие 1 получаем

Следствие 2. *Скалярная* (*однокритериальная*) *задача $Z^1(A, b)$ устойчива при любых $A \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.*

Следствие 3. *Если $L^m(A, b) = \{x^0\}$, то задача $Z^m(A, b)$ устойчива в том и только том случае, когда $S^m(A, b) = \{x^0\}$.*

Доказательство. Достаточность вытекает из следствия 1. Необходимость докажем методом от противного. Пусть $S^m(A, b) \neq \{x^0\}$. Тогда существует решение x^*, принадлежащее множеству $S^m(A, b) \backslash \{x^0\}$. Нетрудно видеть, что в этом случае справедливо равенство

$$|A_1 x^0 + b_1| = |A_1 x^* + b_1|.$$

Поэтому существует такое число $q \in Q$, что $A_1(x^*+qx^0)+b_1(1+q) = 0$. Отсюда в силу теоремы (ввиду (9)) заключаем, что $\rho^m(A,b) = \varphi^m(A,b) = 0$. Последнее равенство противоречит устойчивости задачи $Z^m(A,b)$. Следствие 3 доказано.

В результате проведённых исследований удалось не только получить нижнюю и верхнюю достижимые оценки для радиуса устойчивости лексикографической булевой задачи минимизации модулей линейных функций, но и указать просто формулируемое достаточное условие, а в случае, когда множество лексикографических оптимумов одноэлементно, и критерий устойчивости задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Белоусов Е. Г., Андронов В. Г.** Разрешимость и устойчивость задач полиномиального программирования. М.: Изд-во МГУ, 1993.
2. **Бухтояров С. Е., Емеличев В. А.** Параметризация принципа оптимальности («от Парето до Слейтера») и устойчивость многокритериальных траекторных задач // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2003. Т. 10, № 2. С. 3–18.
3. **Бухтояров С. Е., Емеличев В. А., Степанишина Ю. В.** Вопросы устойчивости векторных дискретных задач с параметрическим принципом оптимальности // Кибернетика и системный анализ. 2003. № 4. С. 155–166.
4. **Емеличев В. А., Бердышева Р. А.** О радиусе устойчивости, квазиустойчивости и стабильности векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации // Дискретная математика. 1998. Т. 10, вып. 1. С. 20–27.
5. **Емеличев В. А., Бердышева Р. А.** О мере устойчивости задачи целочисленной векторной лексикографической оптимизации // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1999. № 4. С. 119–124.
6. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Леонович А. М.** Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 79–92.
7. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** О количественной мере устойчивости векторной задачи целочисленного программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1998. Т. 38, № 11. С. 1801–1805.
8. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8, № 1. С. 47–69.
9. **Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко И. В.** Исследование устойчивости задач дискретной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 1993. № 3. С. 78–93.
10. **Колоколов А. А., Девятерикова М. В.** Анализ устойчивости L-разбиения множеств в конечномерном пространстве // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7, № 2. С. 47–53.

11. **Колоколов А. А., Девятерикова М. В.** Анализ устойчивости некоторых алгоритмов дискретной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 48–54.
12. **Подиновский В. В., Гаврилов В. М.** Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. радио, 1975.
13. **Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т.** Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наукова думка, 1995.
14. **Сергиенко И. В., Шило В. П.** Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наукова думка, 2003.
15. **Сотсков Ю. Н., Сотскова Н. Ю.** Теория расписаний. Системы с неопределёнными числовыми параметрами. Минск: НАН Беларуси, 2004.
16. **Червак Ю. Ю.** Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород: Ужгородський Національний університет, 2002.
17. **Devyaterikova M. V., Kolokolov A. A.** Analysis of L-structure stability of convex integer programming problems // Operations Research Proceedings, Springer. 2000. P. 49–54.
18. **Ehrgott M., Gandibleux X.** A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization // OR Spectrum. 2000. V. 22, N 4. P. 425–460.
19. **Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P.** Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. 2002. V. 51, N 4. P. 645–676.
20. **Greenberg H. J.** An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer programming and combinatorial optimization // Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming and Heuristic Search. Boston, MA: Kluwer Acad. Publ., 1998. P. 97–148.
21. **Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N.** Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. 1995. V. 58, N 2. P. 169–190.

Адреса авторов:

Белорусский гос. университет,
пр. Независимости, 4,
Минск, 220030,
Республика Беларусь.
E-mail: emelichev@bsu.by,
eugen_eugen@tut.by

Статья поступила
14 июля 2006 г.

Переработанный вариант —
10 апреля 2007 г.