ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2007. Серия 2. Том 14, № 1. 72–99

УДК 519.874

О СВОДИМОСТИ ЗАДАЧ ДВУХУРОВНЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К ЗАДАЧАМ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ*)

Д. С. Иваненко, А. В. Плясунов

Исследуется сводимость задачи двухуровневого программирования к задаче векторной (многокритериальной) оптимизации. Предлагается общий принцип построения таких сводимостей. Рассматриваются частные случаи двухуровневых задач.

Введение

В последние 10–15 лет возникла необходимость в расширении и развитии основных концепций математического программирования с тем, чтобы получить алгоритмический аппарат для решения оптимизационных задач с экстремальными ограничениями [1, 5, 14]. Классическая теория экстремальных задач более или менее адекватна в ситуациях, где с множеством альтернатив оперирует только одно лицо, принимающее решение. В ситуациях, где есть несколько лиц, принимающих решения, каждое из которых имеет собственные множества альтернатив и предпочтений, классические рецепты оказываются неприменимы. Возникает необходимость в рассмотрении разного рода равновесных моделей. Такие модели исследуются в задачах поиска седловых точек, в игровых задачах отыскания равновесия по Нэшу, в обратных задачах оптимизации, моделях экономического равновесия, в многоуровневом и многокритериальном программировании и т. д. [1, 5, 14, 19]. Наибольшие трудности, возникающие при исследовании равновесных моделей, связаны с разработкой алгоритмов их решения. Наиболее простой способ преодоления этих трудностей основан на сведéнии равновесных моделей к классическим одноуровневым задачам с последующим использованием имеющихся методов решения оптимизационных задач. Например, для двухуровневых задач и задач векторной оптимизации подобный подход был реализован в работах [7, 8, 10–12, 19, 20].

---

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–00075).

В данной статье предлагается альтернативный вариант исследования равновесных моделей, возникающих в двухуровневом программировании при поиске оптимистического равновесия [7, 19], основанный на их сводимости к задачам векторной оптимизации. При этом сводимость понимается в том смысле, который принят в комбинаторной оптимизации. По исходным данным исследуемой задачи указывается способ построения исходных данных такой задачи векторной оптимизации, оптимальное по Парето решение которой даёт оптимальное решение исходной задачи. Исследования таких сводимостей имеют достаточно богатую историю и ведутся с середины 80-х годов прошлого века [19]. Прежде всего были сделаны попытки свести двухуровневые задачи к двухкритериальным [15, 28, 29], которые, однако, ни к чему не привели. В [17, 18, 24, 25] были построены контрпримеры, которые свидетельствовали о некорректности предложенных подходов. Первый позитивный результат был получен в работе [22] (см. также [19]), в которой установлена сводимость линейных двухуровневых задач к линейным задачам векторной оптимизации. Недавний результат [21], в котором предлагалась сводимость произвольной задачи двухуровневого программирования к задаче векторной оптимизации в предположении, что ограничения верхнего уровня не зависят от переменных нижнего уровня, как показывает комментарий к следствию 2 данной работы, содержит ошибку.

В предлагаемом исследовании, в отличие от предшествующих работ, вопросы построения сводимости рассматриваются в более широком контексте. Основная цель работы — получить сводимость в общем виде, не требуя дополнительных свойств от оптимизационной задачи, т. е. от её целевой функции и ограничений. Формулировка сводимости в общей форме позволяет использовать её не только для задач линейного двухуровнего программирования, но также и для дискретных и нелинейных двухуровневых задач. Любая дополнительная информация о задаче может быть использована для модификации сводимости и уточнения вида векторной задачи. Кроме того, оцениваются возможности применения в построении нужных сводимостей таких стандартных инструментов теории экстремальных задач, как необходимые условия Куна–Таккера и теория двойственности в их разных вариантах и формах. Наконец, один из центральных аспектов статьи заключается в том, чтобы не только найти сводимость, но и научиться управлять сложностью представления множества допустимых решений и сложностью оптимизируемых критериев векторной задачи.

Содержательно полученные в статье результаты можно изложить

следующим образом. Для построения сводимости прежде всего выбирается эквивалентное представление задачи нижнего уровня в виде подходящей системы равенств и неравенств. В данном исследовании используется представление, основанное на параметризованной функции возмущения [19, 26] задачи нижнего уровня. Следующий шаг позволяет управлять сложностью представления множества допустимых решений и сложностью набора оптимизируемых критериев векторной задачи. Выбирая соответствующим образом множество допустимых решений и функцию критериев для задачи векторной оптимизации, с одной стороны, получим сводимость двухуровневых задач к одноуровневым задачам, которые являются тривиальным частным случаем векторных задач. У возникающих векторных задач самое сложное представление множества допустимых решений и самый простой набор оптимизируемых критериев, состоящий из одной функции — целевой функции задачи верхнего уровня. С другой стороны, возникают векторные задачи с самым простым представлением допустимых решений — с помощью ограничений нижнего уровня и самым сложным набором оптимизируемых критериев.

В предлагаемых сводимостях можно отказаться от функции возмущения, если использовать схему двойственности, которая применима к задачам математического программирования (линейным, нелинейным и/или дискретным) и гарантирует нулевой разрыв двойственности [23]. В качестве меры нарушения экстремального ограничения двухуровневой задачи можно взять разность целевых функций прямой и двойственной задач на нижнем уровне. Однако в этом случае придётся ввести дополнительные ограничения, связанные с определением двойственной задачи. Другой вариант элиминации функции возмущения связан с использованием необходимых условий оптимальности. Такой подход возможен, но он, с одной стороны, не упрощает доказательств, а, с другой стороны, сужает область применимости получаемых результатов. В частности, сводимость, основанная на необходимых условиях оптимальности, не применима к двухуровневым задачам, экстремальное ограничение которых задано с помощью дискретной экстремальной задачи. В качестве примера можно рассмотреть двухуровневую задачу с подзадачей о 0–1 рюкзаке на нижнем уровне, для которой использование необходимых условий оптимальности не позволяет построить нужную сводимость. В то же время функцию возмущения задачи о 0–1 рюкзаке можно построить за псевдополиномиальное время, если воспользоваться результатами из [19].

В статье также получены конструктивные версии сводимостей для некоторых классов двухуровневых задач, нетривиальных математически и важных в практическом отношении. Эти варианты сводимостей основываются на изложенных выше идеях и используют необходимые условия Куна–Таккера, элементы теории двойственности.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 приводятся основные определения, необходимые для понимания результатов. В разделе 2 приводится схема сводимости задачи двухуровнего программирования общего вида к задаче многокритериальной оптимизации. В разделе 3 рассматриваются частные случаи сводимости для задач выпуклого и линейного двухуровнего программирования. В разделе 4 обсуждается вариант сводимости для задачи двухуровнего программирования с дискретными переменными.

1. Основные определения

Под двухуровневой задачей (ВР) понимается следующая экстремальная задача с обычными ограничениями-неравенствами и одним экстремальным ограничением: найти

$$\inf \left\{ f^1(x^1, x^2) \right\}$$

при ограничениях $g^1(x^1, x^2) \leqslant b^1$, $x^2 \in \mathcal{F}^2(x^1)$, где $\mathcal{F}^2(x^1)$ — множество оптимальных решений оптимизационной задачи нижнего уровня: при фиксированном x^1 найти

$$\inf_{z^2} \{ f^2(x^1, z^2) |\, g^2(x^1, z^2) \leqslant b^2 \}.$$

Вектор-функции $g^1 = (g^1_1, g^1_2, \ldots, g^1_{m_1})$ и $g^2 = (g^2_1, g^2_2, \ldots, g^2_{m_2})$ представляют соответственно ограничения верхнего и нижнего уровней, а скалярные функции $f^1(x^1, x^2)$ и $f^2(x^1, x^2)$ — соответствующие целевые функции. Векторы переменных задачи x^1 и x^2 имеют размерность соответственно n_1 и n_2. Здесь и далее будем предполагать, что переменные задачи могут принимать любые вещественные значения.

Пусть $P = \left\{ (x^1, x^2) |\, g^1(x^1, x^2) \leqslant b^1, x^2 \in \mathcal{F}^2(x^1) \right\}$ — множество допустимых решений задачи ВР.

Определение 1. Допустимое решение (x^1, x^2) задачи ВР с минимальным значением целевой функции $f^1(x^1, x^2)$ будем называть *оптимальным* решением.

Множество всех оптимальных решений задачи ВР обозначим через P^*.

Экстремальное ограничение двухуровневой задачи можно представить в альтернативном виде, если использовать параметризованную функцию возмущения задачи нижнего уровня [19, 26]

$$\rho(x,y) = \inf_{z\in\mathbb{R}^{n_2}} \left\{ f^2(x,z) |\, g^2(x,z) \leqslant y \right\}.$$

В этом случае можно получить свед́ение задачи ВР к одноуровневой (однокритериальной) задаче следующего вида: найти

$$\inf \left\{ f^1(x^1,x^2) \right\}$$

при ограничениях $g^1(x^1,x^2) \leqslant b^1$, $g^2(x^1,x^2) \leqslant b^2$, $f^2(x^1,x^2) = \rho(x^1,b^2)$.

Эта сводимость является основой алгоритмов решения ряда задач двухуровневого программирования. Такие алгоритмы удаётся построить, если известна информация о структуре функции ρ. Например, если задача нижнего уровня является линейной, то функция возмущения является кусочно-линейной функцией. При этом каждый участок линейности функции ρ определяется подходящим оптимальным решением задачи, двойственной к задаче нижнего уровня. Алгоритмы, основанные на данной сводимости, были разработаны в [7, 10, 11]. Аналогичные результаты приводятся также в [19]. В общем случае, как правило, не удаётся получить ни аналитического, ни даже алгоритмического описания функции возмущения задачи нижнего уровня, что является существенным препятствием для построения подобных алгоритмов.

Приведём постановку задачи векторной оптимизации (VP) [12, 20]: найти $\min\limits_{x\in\mathcal{F}} f(x)$, где $\mathcal{F} = \{x |\, g(x) \leqslant b\}$. Вектор-функции $f = (f_1,\ldots,f_r)$ и $g = (g_1,\ldots,g_m)$ задают соответственно целевые функции, по которым находятся решения, и ограничения задачи.

Допустимое решение $x^* \in \mathcal{F}$ называется *оптимальным по Парето*, если не существует вектора $x \in \mathcal{F}$ такого, что $f_i(x) \leqslant f_i(x^*)$ при всех i и $f(x^*) \neq f(x)$. В этом случае вектор $f(x^*)$ называется *недоминируемым* в множестве $f(\mathcal{F})$.

Приведём более общую постановку векторной задачи. Пусть $K, F \subseteq R^r$. Определим бинарное отношение $<_K$ на множестве F следующим образом: $x <_K y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} y - x \in K$.

Вектор $x \in F$ называется *недоминируемым* в множестве F по отношению $<_K$, если не существует элемента $y \in F$ такого, что $y <_K x$ и $x \neq y$.

Пусть $F = f(\mathcal{F})$. Обозначим через $ND(F, <_K)$ множество всех недоминируемых точек множества F относительно отношения $<_K$. Тогда

множество оптимальных по Парето решений является прообразом множества $ND(F, <_K)$ относительно отображения f. Если $K = \mathbb{R}^r_+ \setminus \{0\}$, то получим исходную постановку задачи VP.

Хотя обычно предполагается, что отношение $<_K$ является частичным порядком, в данной статье рассматриваются произвольные множества K и, следовательно, произвольные бинарные отношения. В частности, бинарное отношение может быть получено как объединение двух и более бинарных отношений. Например, если заданы бинарные отношения $<_A$ и $<_B$, определённые на некотором множестве M, то можно рассмотреть объединённое бинарное отношение $<_A \cup <_B$, определяемое следующим образом [9]: $x <_A \cup <_B y \Longleftrightarrow (x <_A y) \vee (x <_B y)$. Тогда

$$ND(M, <_A \cup <_B) = ND(M, <_A) \cap ND(M, <_B).$$

2. Сводимость двухуровневой задачи к задаче векторной оптимизации

Приступим к построению сводимости задачи двухуровнего программирования общего вида к задаче векторной оптимизации. Идея предлагаемого подхода может быть описана следующим образом. В качестве допустимого множества векторной задачи рассмотрим допустимое множество двухуровневой задачи и определим на нём функцию критериев, совпадающую с целевой функцией исходной задачи двухуровнего программирования. Таким способом получим сведе́ние задачи двухуровневой оптимизации к обычной задаче одноуровневой (однокритериальной) оптимизации. Далее, релаксируя последовательно допустимое множество векторной задачи посредством замены групп ограничений некоторой подходящей функцией критериев, будем получать сведе́ния двухуровневой задачи к задачам векторной оптимизации с бо́льшим числом критериев, но с более простым по структуре допустимым множеством.

Для упрощения изложения введём ряд дополнительных обозначений. Там, где это не вызывает разночтений, решение (x^1, x^2) задачи BP будем обозначать символом x. Аналогично вместо $f^k(x^1, x^2)$ и $g^k(x^1, x^2)$, $k = 1, 2$, будем писать соответственно $f^k(x)$ и $g^k(x)$, $k = 1, 2$. Определим следующие множества: $P^1 = \{x | \, g^1(x) \leqslant b^1\}$, $P^2 = \{x | \, g^2(x) \leqslant b^2\}$, $\mathcal{F}^2 = \{(x^1, x^2) \in P^2 | \, x^2 \in \mathcal{F}^2(x^1)\}$. Используя введённые обозначения, множество P допустимых решений задачи BP можно представить в виде $P = P^1 \cap \mathcal{F}^2$.

Как уже упоминалось ранее, для сведе́ния задачи BP к некоторой подходящей задаче многокритериальной оптимизации требуется алгоритм, который по входным данным задачи BP находит исходные данные

задачи VP, и по любому её оптимальному по Парето решению позволяет получить некоторое оптимальное решение задачи BP.

Содержательно под оптимальным решением двухуровневой задачи понимается вектор $x = (x^1, x^2)$, для которого выполняются следующие условия:

1) вектор x удовлетворяет ограничениям нижнего уровня;

2) среди всех векторов вида (x^1, z^2), обладающих свойством 1, вектор x имеет минимальное значение целевой функции нижнего уровня;

3) вектор x не нарушает ограничений верхнего уровня;

4) среди всех векторов, удовлетворяющих условиям 1–3, вектор x имеет минимальное значение целевой функции верхнего уровня;

Все векторы, удовлетворяющие требованиям 1–3, образуют множество допустимых решений задачи BP.

Общая идея предлагаемых в статье сводимостей заключается в замене некоторой части условий 1–4, которым удовлетворяет вектор x, на свойство быть недоминируемым относительно подходящего бинарного отношения. Например, легко построить (сведе́ние) двухуровневой задачи к задаче однокритериальной оптимизации, если:

- в качестве допустимого множества $\mathcal{F}$ задачи VP рассмотреть множество P;
- функцию критериев f задачи VP задать равной целевой функции верхнего уровня f^1 задачи BP;
- задать на множестве $f(\mathcal{F})$ классическое бинарное отношение $<$.

В этом случае множество оптимальных по Парето решений построенной задачи векторной оптимизации совпадает с множеством P^*. Идя по пути одновременного усложнения бинарного отношения доминирования и релаксации допустимого множества задачи VP, можно получать различные варианты сведе́ния задачи BP к задаче VP.

Определим в $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ бинарное отношение $\prec_2$.

Определение 2. Вектор x доминирует вектор y в $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ по отношению $\prec_2$ тогда и только тогда, когда векторы x^1 и y^1 совпадают и $f^2(x) < f^2(y)$, т. е.

$$x \prec_2 y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} ((x^1 = y^1) \wedge (f^2(x) < f^2(y))).$$

Если рассмотреть сужение отношения $\prec_2$ на множество P^2, то можно заметить, что если для некоторого вектора $y \in P^2$ найдётся вектор

$x \in P^2$ такой, что $x \prec_2 y$, то $y^2 \notin \mathcal{F}^2(y^1)$. Другими словами, недоминируемость вектора y в множестве P^2 по отношению $\prec_2$ является необходимым условием для того, чтобы вектор y удовлетворял экстремальному ограничению задачи ВР. Верно и обратное.

Утверждение 1. $ND(P^2, \prec_2) = \mathcal{F}^2$.

Доказательство. Если множество $P^2 = \varnothing$, то $ND(P^2, \prec_2) = \varnothing$ и $\mathcal{F}^2 = \varnothing$. В случае, когда множество P^2 одноэлементное, справедливо равенство $P^2 = \{y\} = ND(P^2, \prec_2) = \mathcal{F}^2$.

Пусть $\left|P^2\right| > 1$. Покажем, что $y \in ND(P^2, \prec_2) \Longrightarrow y \in \mathcal{F}^2$. Предположим противное. Тогда найдётся вектор $x \in P^2$ такой, что

$$(x^1 = y^1) \wedge (f^2(x) < f^2(y)),$$

что противоречит условию $y \in ND(P^2, \prec_2)$. Обратно, если $y^2 \in \mathcal{F}^2(y^1)$, но $y \notin ND(P^2, \prec_2)$, то найдётся $z \in P^2$ такой, что $z \prec_2 y$. Тогда $y \notin \mathcal{F}^2$. Противоречие. Утверждение 1 доказано.

Далее рассмотрим индикаторную функцию

$$\sigma(x) = \operatorname{sign}\left(\sum_{k=1}^{m_1} \max\left\{g_k^1(x) - b_k^1, 0\right\}\right).$$

Функция $\sigma(x)$ принимает значение 0 для всех векторов $x \in P^1$ и значение 1 в случае $x \notin P^1$. Используя функцию σ, определим в $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ бинарное отношение $\prec_\sigma$.

Определение 3. Вектор x доминирует вектор y в $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ по отношению $\prec_\sigma$ тогда и только тогда, когда $\sigma(x) < \sigma(y)$:

$$x \prec_\sigma y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sigma(x) < \sigma(y).$$

По определению если система ограничений верхнего уровня $g^1(x) \leqslant b^1$ задачи ВР не имеет решений, то любой вектор из $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ будет недоминируем по отношению $\prec_\sigma$ в $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Когда система $g^1(x) \leqslant b^1$ совместна, все её решения будут недомирируемы в $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ по отношению $\prec_\sigma$. Таким образом, недоминируемость вектора y в $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ по отношению $\prec_\sigma$ является необходимым условием для того, чтобы вектор y удовлетворял ограничениям верхнего уровня задачи ВР.

Пусть $P^{1,2} = P^1 \cap P^2$. Рассмотрим сужение отношения $\prec_\sigma$ на множество P^2.

Замечание 1. Бинарное отношение $\prec_\sigma$ обладает следующим свойством:
$$ND(P^2, \prec_\sigma) = \begin{cases} P^{1,2}, & \text{если } P^{1,2} \neq \varnothing, \\ P^2 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Кроме того, если $P \neq \varnothing$, то $P^{1,2} \neq \varnothing$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Замечание 2. Условие $P^{1,2} \neq \varnothing$ не является достаточным для существования допустимых решений в задаче ВР даже в том случае, если множество $\mathcal{F}^2$ не является пустым.

Действительно, рассмотрим следующую задачу двухуровневого программирования: найти максимальное x^1 такое, что
$$x^1 + x^2 \leqslant 2,\ x^1 \geqslant 0,$$
где x^2 — оптимальное решение задачи: найти максимальное z такое, что
$$x^1 + z \leqslant 3,\ x^1 + z \geqslant 1,\ z \geqslant 0.$$
Очевидно, что множество
$$P^{1,2} = \bigl\{(x^1, x^2) |\, x^1 + x^2 \leqslant 2,\ x^1 + x^2 \geqslant 1,\ x^1 \geqslant 0,\ x^2 \geqslant 0\bigr\}$$
не является пустым. Для любых значений $x^1 \in [0, 3]$ задача нижнего уровня разрешима и максимум достигается на решении $x^2 = 3 - x^1$. Однако $(x^1, 3 - x^1) \notin P^1$. При $x^1 > 3$ задача нижнего уровня неразрешима. Таким образом, в приведённом примере не существует ни одного допустимого решения.

На множестве P^2 рассмотрим объединённое бинарное отношение $\prec_2 \cup \prec_\sigma$. Напомним, что вектор x доминирует вектор y по отношению $\prec_2 \cup \prec_\sigma$, если и только если x доминирует y хотя бы по одному из отношений $\prec_2$, $\prec_\sigma$.

Утверждение 2. *Если $P^{1,2} \neq \varnothing$, то $P = ND(P^2, \prec_2 \cup \prec_\sigma)$.*

Доказательство. Из условия $P^{1,2} \neq \varnothing$ и замечания 1 следует, что $ND(P^2, \prec_\sigma) = P^{1,2}$. По утверждению 1 множество $ND(P^2, \prec_2)$ совпадает с множеством $\mathcal{F}^2$. По определению имеем
$$ND(P^2, \prec_2 \cup \prec_\sigma) = ND(P^2, \prec_2) \cap ND(P^2, \prec_\sigma) = \mathcal{F}^2 \cap P^{1,2} = \mathcal{F}^2 \cap P^1 = P.$$
Утверждение 2 доказано.

Определение 4. Вектор x доминирует вектор y по отношению $\prec_1$ в

$\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

$$f^2(x) = \rho(x^1, b^2);\ f^2(y) = \rho(y^1, b^2);\ \sigma(x) = \sigma(y);\ f^1(x) < f^1(y).$$

В этом случае будем писать $x \prec_1 y$.

По определению функции возмущения ρ некоторый вектор $z \in P^2$ будет удовлетворять условию $f^2(z) = \rho(z^1, b^2)$ в том и только том случае, если $z^2 \in \mathcal{F}^2(z^1)$. Поэтому можно переписать определение отношения $\prec_1$ в эквивалентной форме:

$$x \prec_1 y \Longleftrightarrow (x^2 \in \mathcal{F}^2(x^1)) \wedge (y^2 \in \mathcal{F}^2(y^1)) \wedge (\sigma(x) - \sigma(y) = 0) \\ \wedge (f^1(x) < f^1(y)).$$

Для краткости введём следующие обозначения:

$$R_1 = \prec_1 \cup \prec_2, \quad R_2 = \prec_1 \cup \prec_\sigma, \quad R_3 = \prec_1 \cup \prec_\sigma \cup \prec_2 .$$

Теорема 1. *Справедливы следующие соотношения*:

(i) $P^* = ND(P, \prec_1)$;

(ii) *Если* $P \neq \varnothing$, *то* $P^* = ND(\mathcal{F}^2, R_2)$;

(iii) *Если* $P^{1,2} \neq \varnothing$, *то* $P^* = ND(P^2, R_3)$.

(iv) *Если для любого* $x \in P^{1,2}$ *либо* $x^2 \in \mathcal{F}^2(x^1)$, *либо имеется* $w \in P^{1,2}$ *такой, что* $w^1 = x^1$ *и* $f^2(w) < f^2(x)$, *то* $P^* = ND(P^{1,2}, R_1)$.

Доказательство. Равенство (i) является очевидным. Кроме того, из определений бинарных отношений $\prec_1$, $\prec_\sigma$ и $\prec_2$ непосредственно следует, что любое оптимальное решение задачи ВР принадлежит множествам $ND(P^2, R_3)$, $ND(\mathcal{F}^2, R_2)$ и $ND(P^{1,2}, R_1)$.

Покажем, что $P^* \supseteq ND(\mathcal{F}^2, R_2)$. Пусть $P \neq \varnothing$. Рассмотрим $y \in ND(\mathcal{F}^2, R_2)$ и предположим, что $y \notin P^*$. Так как $y \in \mathcal{F}^2$, то либо $y \notin P^1$, либо $y \in P$ и существует $x \in P$ такой, что $f^1(x) < f^1(y)$. В первом случае $\sigma(y) = 1$ и в силу $P \neq \varnothing$ найдётся $z \in \mathcal{F}^2$ такой, что $z \prec_\sigma y$, что противоречит недоминируемости вектора y. Во втором случае, очевидно, $x \prec_1 y$. Противоречие.

Для доказательства включения $P^* \supseteq ND(P^2, R_3)$ воспользуемся утверждением 2, из которого следует, что если $P^{1,2} \neq \varnothing$ и $y \in ND(P^2, R_3)$, то y — допустимое решение задачи ВР. Предположим, что $y \notin P^*$. Тогда найдётся $x \in P$ такой, что $f^1(x) < f^1(y)$, что противоречит недоминируемости вектора y по отношению $\prec_1$.

Теперь докажем, что $P^* \supseteq ND(P^{1,2}, R_1)$. Рассмотрим $y \in ND(P^{1,2}, R_1)$. Предположим, что вектор y не является оптимальным решением

задачи BP. Если y допустим в задаче BP, то из предположения $y \notin P^*$ следует, что найдётся вектор $x \in P$ такой, что $f^1(x) < f^2(y)$. Тогда $x \prec_1 y$ в $P^{1,2}$, что противоречит недоминируемости вектора y. Следовательно, y не может быть допустимым решением задачи BP. Так как $y \in P^{1,2}$, то, очевидно, y удовлетворяет одновременно ограничениям верхнего и нижнего уровней. Следовательно, $y^2 \notin \mathcal{F}^2(y^1)$. Тогда по условию теоремы найдётся $w \in P^{1,2}$ такой, что $w^1 = x^1$ и $f^2(w) < f^2(x)$. Очевидно, что $w \prec_2 y$. Противоречие. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством оптимальных решений двухуровневой задачи общего вида и совокупностью векторов, недоминируемых в некотором множестве по подходящему бинарному отношению. Это даёт способ построения сводимости задачи двухуровнего программирования к многокритериальной задаче. Приведём пример такого сведéния, основанного на равенстве (iii) из теоремы 1.

Для получения сведéния положим, что допустимое множество $\mathcal{F}$ задачи VP совпадает с множеством P^2. В качестве функции критериев f выберем тождественное отображение $f(x) \equiv x$. Наконец, на множестве $\mathcal{F}$ зададим бинарное отношение R_3. Легко видеть, что в этом случае задача VP имеет $n_1 + n_2$ критериев и по теореме 1 множество её оптимальных по Парето решений $f^{-1}(ND(f(\mathcal{F}), R_3)) = ND(\mathcal{F}, R_3)$ совпадает с множеством оптимальных решений исходной задачи BP.

Отметим, что для получения сведéния в данном случае необходимо гарантировать, что задача BP обладает свойством $P^{1,2} \neq \varnothing$. В противном случае полученная в результате сведéния задача VP может иметь оптимальные по Парето решения, которым не соответствует ни одно оптимальное решение задачи BP.

Действительно, если системы $g^1(x) \leqslant b^1$ и $g^2(x) \leqslant b^2$ имеют общие решения, то из теоремы 1 следует, что множество P^* совпадает с множеством оптимальных по Парето решений соответствующей задачи VP. Если $P^{1,2} = \varnothing$, то из замечания 1 следует, что $ND(P^2, \prec_\sigma) = P^2$. Кроме того, из определения отношения $\prec_1$ следует, что $ND(P^2, \prec_1) = P^2$. Тогда $ND(P^2, R_3) = \mathcal{F}^2$. В то же время задача BP неразрешима.

Следует отметить, что в описанном выше варианте сводимости размерность пространства критериев в получающейся многокритериальной задаче совпадает с числом переменных в исходной двухуровневой задаче. Число критериев в задаче VP можно уменьшить, если рассмотреть следующий вариант сведéния.

Определим семейство функций

$$\begin{aligned}
&\Theta_0(z) = (f^1(z)),\\
&\Theta_1(z) = (z^1, f^1(z), f^2(z), |f^2(z) - \rho(z^1, b^2)|),\\
&\Theta_2(z) = (f^1(z), \sigma(z)),\\
&\Theta_3(z) = (z^1, f^1(z), f^2(z), |f^2(z) - \rho(z^1, b^2)|, \sigma(z))
\end{aligned}$$

и семейство множеств

$$K_0 = \left\{v^1 | \, v^1 > 0\right\},$$

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left\{z^1, v^1, v^2, \Delta | \, ((\left\|z^1\right\| = 0) \wedge (v^2 > 0)) \vee ((\Delta = 0) \wedge (v^1 > 0))\right\},\\
K_2 &= \left\{v^1, r | \, (r > 0) \vee ((r = 0) \wedge (v^1 > 0))\right\},\\
K_3 &= \{z^1, v^1, v^2, \Delta, r | \, ((\left\|z^1\right\| = 0) \wedge (v^2 > 0)) \vee ((\Delta = 0) \wedge (r = 0)\\
&\qquad \wedge (v^1 > 0)) \vee (r > 0)\}.
\end{aligned}$$

Величина $\left|f^2(z) - \rho(z^1, b^2)\right|$ используется в функциях Θ_1 и Θ_3 в качестве меры нарушения экстремального ограничения двухуровневой задачи. Множества K_i, $i = 0, 1, 2, 3$, на множестве $\Theta(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ индуцируют бинарные отношения $<_{K_i}$ по следующему правилу:

$$\forall \, x, y \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \quad (\Theta(x) <_{K_i} \Theta(y) \Longleftrightarrow \Theta(y) - \Theta(x) \in K_i).$$

Теорема 2. *Имеют место следующие соотношения*:

(i) $y \in ND(P, \prec_1) \Longleftrightarrow \Theta_0(y) \in ND(\Theta_0(P), <_{K_0})$;

(ii) $y \in ND(\mathcal{F}^2, R_2) \Longleftrightarrow \Theta_2(y) \in ND(\Theta_2(\mathcal{F}^2), <_{K_2})$;

(iii) $y \in ND(P^2, R_3) \Longleftrightarrow \Theta_3(y) \in ND(\Theta_3(P^2), <_{K_3})$;

(iv) *если для всякого* $x \in P^{1,2}$ *либо* $x^2 \in \mathcal{F}^2(x^1)$, *либо найдётся вектор* $w \in P^{1,2}$ *такой, что* $w^1 = x^1$ *и* $f^2(w) < f^2(x)$, *то*

$$y \in ND(P^{1,2}, R_1) \Longleftrightarrow \Theta_1(y) \in ND(\Theta_1(P^{1,2}), <_{K_1}).$$

Доказательство. Соотношение (i) очевидно. Убедимся в справедливости соотношения (ii).

Пусть $y \in ND(\mathcal{F}^2, R_2)$. Предположим, что $\Theta_1(y) \notin ND(\Theta_2(\mathcal{F}^2), <_{K_2})$. Тогда найдётся $x \in \mathcal{F}^2$ такой, что $\sigma(y) - \sigma(x) > 0$ или

$$(\sigma(y) - \sigma(x) = 0) \wedge (f^1(y) - f^1(x) > 0).$$

В первом случае $x \prec_\sigma y$. Тогда $y \notin ND(\mathcal{F}^2, R_2)$. Так как $x \in \mathcal{F}^2$ и $y \in \mathcal{F}^2$, то во втором случае получим, что $x \prec_1 y$, что также противоречит недоминируемости вектора y. Следовательно, $\Theta_2(y) \in ND(\Theta_2(\mathcal{F}^2), <_{K_2})$.

Обратно, если $\Theta_2(y) \in ND(\Theta_2(\mathcal{F}^2), <_{K_2})$, но $y \notin ND(\mathcal{F}^2, R_2)$, то существует вектор $z \in \mathcal{F}^2$ такой, что $\sigma(z) < \sigma(y)$, либо

$$(\sigma(y) = \sigma(z)) \wedge (f^1(z) < f^1(y)).$$

Однако в этом случае $\Theta_2(y) - \Theta_2(z) \in K_2$, что приводит к противоречию.

Аналогично доказывается соотношение (iii). Пусть $y \in ND(P^2, R_3)$. Предположим, что существует $x \in P^2$ такой, что $\Theta_3(y) - \Theta_3(x) \in K_3$. Так как $y \in ND(P^2, R_3)$, то по утверждению 1 имеем $\left|f^2(y) - \rho(y^1, b^2)\right| = 0$. Следовательно, для любого $x \in P^2$ такого, что $x^1 = y^1$, выполняется неравенство $f^2(y) \leqslant f^2(x)$. Аналогично, из $y \in ND(P^2, R_3)$ следует, что $\sigma(y) \leqslant \sigma(x)$. Таким образом, $\Theta_3(y) - \Theta_3(x) \in K_3$ в силу выполнения условия

$$(f^1(y) - f^1(x) > 0) \wedge (\left|f^2(y) - \rho(y^1, b^2)\right| - \left|f^2(x) - \rho(x^1, b^2)\right| = 0) \\ \wedge (\sigma(y) - \sigma(x) = 0).$$

Следовательно, $\sigma(y) = \sigma(x)$ и $f^2(x) = \rho(x^1, b^2)$. Но тогда $x \prec_1 y$, что противоречит предположению, что $y \in ND(P^2, R_3)$.

Для доказательства достаточности рассмотрим $y \in P^2$ такой, что вектор $\Theta_3(y)$ недоминируем в множестве $\Theta_3(P^2)$ по отношению $<_{K_3}$, и предположим, что найдётся $x \in P^2$ такой, что xR_3y. Тогда либо $x \prec_2 y$, либо $x \prec_\sigma y$, либо $x \prec_1 y$. В первом случае $(x^1 = y^1) \wedge (f^2(x) < f^2(y))$. Тогда $\left\|y^1 - x^1\right\| = 0$ и $v^2 = f^2(y) - f^2(x) > 0$. Следовательно, $\Theta_3(y) - \Theta_3(x) \in K_3$, что противоречит предположению, что $\Theta_3(y) \in ND(\Theta_3(P^2), <_{K_3})$. Аналогично можно показать, что если $x \prec_\sigma y$, то вектор $\Theta_3(x)$ доминининирует вектор $\Theta_3(y)$ по отношению $<_{K_3}$ в множестве $\Theta_3(P^2)$. Таким образом, $x \prec_1 y$. По определению это означает, что

$$(f^2(x) = \rho(x^1, b^2)) \wedge (f^2(y) = \rho(y^1, b^2)) \wedge (\sigma(x) = \sigma(y)) \wedge (f^1(x) < f^1(y)).$$

Но тогда $\Theta_3(y) - \Theta_3(x) \in K_3$ и, следовательно, $\Theta_3(y) \notin ND(\Theta_3(P^2), <_{K_3})$. Получено противоречие.

Наконец, покажем, что справедливо (iv). Рассмотрим вектор $y \in ND(P^{1,2}, R_1)$ и предположим, что $\Theta_1(y) \notin ND(\Theta_1(P^{1,2}), <_{K_1})$. В этом случае существует вектор $x \in P^{1,2}$ такой, что $\Theta_1(y) - \Theta_1(x) \in K_1$. Это возможно в двух случаях: либо $(\left\|y^1 - x^1\right\| = 0) \wedge (f^2(y) - f^2(x) > 0)$, либо $(\left|f^2(y) - \rho(y^1, b^2)\right| - \left|f^2(x) - \rho(x^1, b^2)\right| = 0) \wedge (f^1(y) - f^1(x) > 0)$. В первом случае $x^1 = y^1$ и $f^2(x) < f^2(y)$. Поэтому $x \prec_2 y$ в $P^{1,2}$, что противоречит предположению $y \in ND(P^{1,2}, R_1)$. Рассмотрим второй случай. Так как $y \in P^{1,2}$ и $x \in P^{1,2}$, то $\sigma(y) = \sigma(x) = 0$. Покажем, что $f^2(y) = \rho(y^1, b^2)$. Если это не так, то по условию теоремы

найдётся $w \in P^{1,2}$ такой, что $w^1 = y^1$ и $f^2(w) < f^2(y)$. Следовательно, $w \prec_2 y$ в $P^{1,2}$, что противоречит предположению $y \in ND(P^{1,2}, R_1)$. Тогда в силу неотрицательности $|\cdot|$ получим $\left|f^2(x) - \rho(x^1, b^2)\right| = 0$ и $x \prec_1 y$. Противоречие с предположением $y \in ND(P^{1,2}, R_1)$. Таким образом, $\Theta_1(y) \in ND(\Theta_1(P^{1,2}), <_{K_1})$.

Покажем, что верно и обратное. Пусть $\Theta_1(y) \in ND(\Theta_1(P^{1,2}), <_{K_1})$ и $y \notin ND(P^{1,2}, R_1)$. В этом случае найдётся $z \in P^{1,2}$ такой, что $z \prec_1 y$ или $z \prec_2 y$. Следовательно,

$$(\left|f^2(y) - \rho(y^1, b^2)\right| - \left|f^2(z) - \rho(z^1, b^2)\right| = 0) \wedge (f^1(y) - f^1(z) > 0)$$

либо $(\left\|y^1 - z^1\right\| = 0) \wedge (f^2(y) - f^2(z) > 0)$. Это означает, что $\Theta_1(z) <_{K_1} \Theta_1(y)$. Получено противоречие. Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает ряд следствий, касающихся построения сводимостей в тех случаях, когда известна дополнительная информация о структуре допустимого множества задачи ВР. Для таких задач, как правило, удаётся получить более простые варианты сведе́ния.

Например, в [16] рассматривались задачи двухуровнего программирования, не имеющие ограничений на верхнем уровне. Тогда $P^1 = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $P^{1,2} = P^2$ и $P = \mathcal{F}^2$. В этом случае любой вектор x будет недоминируем в P^2 по отношению $\prec_\sigma$. Кроме того, из равенства $P^{1,2} = P^2$ следует, что для всякого $x \in P^{1,2}$ либо $x^2 \in \mathcal{F}^2(x^1)$, либо найдётся $w \in P^{1,2}$ такой, что $w^1 = x^1$ и $f^2(w) < f^2(x)$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Если задача* ВР *не имеет ограничений верхнего уровня, то* $P^* = \Theta_1^{-1}(ND(\Theta_1(P^2), <_{K_1}))$.

Рассмотрим ещё один частный случай задачи ВР, в котором можно упростить сведе́ние. Предположим, что ограничения верхнего уровня не зависят от переменных нижнего уровня. В этом случае если некоторый вектор x принадлежит множеству $P^{1,2}$, то множество векторов $\left\{z \middle| z \in P^2, z^1 = x^1\right\}$ целиком содержится в множестве $P^{1,2}$. В частности, если множество $\mathcal{F}^2(x^1)$ не является пустым, то любой вектор $z = (x^1, z^2)$, $z^2 \in \mathcal{F}^2(x^1)$ будет принадлежать множеству $P^{1,2}$.

Двухуровневые задачи, обладающие указанным свойством, рассматривались в [21], где для них была предпринята попытка получить сведе́ние к задачам векторной оптимизации. В частности, приводится без доказательства следующее

Утверждение [21]. *Если ограничения верхнего уровня задачи* ВР *не содержат переменных нижнего уровня, то вектор z будет её опти-*

мальным решением тогда и только тогда, когда z недоминируем по отношению $\prec_{FV}$ в множестве $\Omega = P^1 \times \mathbb{R}^{n_2}$, где бинарное отношение $\prec_{FV}$ определяется по правилу

$$x \prec_{FV} y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big[(x^1 = y^1) \wedge (f^2(x) < f^2(y))\big] \vee [(x^2 \in \mathcal{F}^2(x^1)) \\ \wedge (f^1(x) < f^1(y))].$$

Данное утверждение не является справедливым, что показывает следующий пример. Рассмотрим двухуровневую задачу следующего вида: найти

$$\min_{x_1,x_2} \{x_1 + 2x_2\}$$

при ограничениях $x_1 \leqslant 2$, $x_1 \geqslant 0$, где x_2 — оптимальное решение задачи нижнего уровня: найти

$$\min_{z} \{2x_1 + z\}$$

при ограничении $z + x \geqslant 3$.

Легко видеть, что вектор $\bar{x} = (2, 1)$ будет оптимальным решением данной задачи. Рассмотрим вектор $y = (2, 0)$. Очевидно, что y недопустим, поскольку $y^2 \notin \mathcal{F}^2(y^1)$. В то же время $y_1 = \bar{x}_1$ и $f^2(y) = 4 < 5 = f^2(\bar{x})$. Следовательно, $y \prec \bar{x}$.

Из теоремы 1 следует, что если в утверждении из [21] в качестве множества Ω рассмотреть множество $P^{1,2}$, то оно станет справедливым.

Следствие 2. *Если ограничения верхнего уровня задачи* BP *не зависят от переменных нижнего уровня, то множество P^* совпадает с прообразом множества $ND(\Theta_1(P^{1,2}), <_{K_1})$ относительно отображения Θ_1.*

3. Сводимости в частных случаях

Найденные в предыдущем разделе сводимости в общем случае не являются конструктивными. Это связано, в первую очередь, с тем, что для функции возмущения задачи на нижнем уровне невозможно получить аналитического или даже алгоритмического описания, если нет дополнительной информации о свойствах и структуре задачи. Если такая информация доступна, то в некоторых случаях требование $f^2(x) = \rho(x^1, b^2)$ можно заменить на более простые и эффективно проверяемые условия и получить конструктивную версию сводимости. Другой путь заключается в том, чтобы использовать необходимые условия оптимальности. Рассмотрим оба варианта.

3.1. Сводимости, использующие необходимые условия оптимальности

Предположим, что целевая функция f^2 и ограничения g_i^2, $i = 1, \ldots, m_2$ задачи нижнего уровня дифференцируемы и выпуклы по переменным x^2, и для любых значений x^1 допустимое множество задачи нижнего уровня удовлетворяет условиям регулярности по Слейтеру [2]. Тогда по теореме Куна–Таккера для задач выпуклого программирования условия $f^2(y^1, y^2) = \rho(y^1, b^2)$, $g^2(y) \leqslant b^2$ эквивалентны существованию множителей Лагранжа λ таких, что

$$
\begin{aligned}
&-\nabla_2 f^2(y) = \sum_{i=1}^{m_2} \lambda_i \nabla_2 g_i^2(y),\\
&g_i^2(y) \leqslant b_i^2,\ \lambda_i(b_i^2 - g_i^2(y)) = 0,\ \lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m_2,
\end{aligned}
$$

где $\nabla_2 f^2$ и $\nabla_2 g_i^2$ — градиенты функций f^2 и g_i^2, $i = 1, \ldots, m_2$, по переменным нижнего уровня [2]. Очевидно, что эта система уравнений эквивалентна следующей системе

$$
\begin{aligned}
&\nabla_2 f^2(y) + \sum_{i=1}^{m_2} \lambda_i \nabla_2 g_i^2(y) = 0,\\
&\sum_{i=1}^{m_2} \lambda_i(b_i^2 - g_i^2(y)) = 0,\\
&\lambda_i \geqslant 0,\ g_i^2(y) \leqslant b_i^2,\ i = i = 1, \ldots, m_2.
\end{aligned}
$$

Обозначим через Λ множество пар (y, λ), удовлетворяющих этой системе уравнений. Пусть

$$
\delta(y, \lambda) = \|\nabla_2 f^2(y) + \sum_{i=1}^{m_2} \lambda_i \nabla_2 g_i^2(y)\|, \quad \zeta(y, \lambda) = \sum_{i=1}^{m_2} \lambda_i(b_i^2 - g_i^2(y)).
$$

Определим следующие множества и функции:

$$
\begin{aligned}
&P_\lambda = \{(y, \lambda) \mid g^1(y) \leqslant b^1,\ (y, \lambda) \in \Lambda\},\\
&\mathcal{F}_\lambda^2 = \{(y, \lambda) \mid (y, \lambda) \in \Lambda\},\\
&P_\lambda^2 = \{(y, \lambda) \mid g^2(y) \leqslant b^2,\ \lambda \geqslant 0\},\\
&P_\lambda^{1,2} = \{(y, \lambda) \mid g^1(y) \leqslant b^1,\ (y, \lambda) \in P_\lambda^2\},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\Theta_0^\lambda(y,\lambda) = (f^1(y)),\\
&\Theta_1^\lambda(y,\lambda) = \big(y^1, f^1(y), f^2(y),\ \delta(y,\lambda)+\zeta(y,\lambda)\big),\\
&\Theta_2^\lambda(y,\lambda) = \big(f^1(y), \sigma(y)\big),\\
&\Theta_3^\lambda(y,\lambda) = \big(y^1, f^1(y), f^2(y), \delta(y,\lambda)+\zeta(y,\lambda), \sigma(z)\big).
\end{aligned}$$

Величина $\delta(y,\lambda)+\zeta(y,\lambda)$ используется в функциях Θ_1^λ и Θ_3^λ в качестве меры нарушения экстремального ограничения двухуровневой задачи. Множества K_i, $i=0,1,2,3$, индуцируют на множестве $\Theta_i^\lambda(\mathbb{R}^{n_1+n_2+m_2})$ бинарные отношения $<_{K_i}$ по следующему правилу:

$$\forall\, x,y\in\mathbb{R}^{n_1+n_2+m_2} \quad (\Theta_i^\lambda(x) <_{K_i} \Theta_i^\lambda(y) \Longleftrightarrow \Theta_i^\lambda(y)-\Theta_i^\lambda(x)\in K_i).$$

Теорема 3. *Справедливы следующие соотношения*:

(i) $y\in ND(P,\prec_1) \Longleftrightarrow \exists\,\lambda(\Theta_0^\lambda(y,\lambda)\in ND(\Theta_0^\lambda(P_\lambda), <_{K_0}))$,

(ii) $y\in ND(\mathcal{F}^2, R_2) \Longleftrightarrow \exists\,\lambda(\Theta_2^\lambda(y,\lambda)\in ND(\Theta_2^\lambda(\mathcal{F}_\lambda^2), <_{K_2}))$,

(iii) $y\in ND(P^2, R_3) \Longleftrightarrow \exists\,\lambda(\Theta_3^\lambda(y,\lambda)\in ND(\Theta_3^\lambda(P_\lambda^2), <_{K_3}))$.

(iv) *Если для любого $x\in P^{1,2}$ либо $x^2\in\mathcal{F}^2(x^1)$, либо имеется $w\in P^{1,2}$ такой, что $w^1=x^1$ и $f^2(w)<f^2(x)$, то*

$$y\in ND(P^{1,2}, R_1) \Longleftrightarrow \exists\,\lambda(\Theta_1^\lambda(y,\lambda)\in ND(\Theta_1^\lambda(P_\lambda^{1,2}), <_{K_1})).$$

Доказательство. Так как выполняются эквивалентности

$$z\in P \Longleftrightarrow \exists\,\lambda((z,\lambda)\in P_\lambda, z\in\mathcal{F}^2) \Longleftrightarrow \exists\,\lambda((z,\lambda)\in\mathcal{F}_\lambda^2)$$

и для любых пар (x,λ) и $(y,\bar\lambda)$ из $\mathbb{R}^{n_1+n_2+m_2}$ равенства

$$\Theta_i^\lambda(y,\bar\lambda)-\Theta_i^\lambda(x,\lambda)=\Theta_i(x)-\Theta_i(y), i=0,2,$$

то из теоремы 2 следует, что справедливы утверждения (i) и (ii).

Убедимся в справедливости утверждения (iii). Из определения функции Θ_3^λ следует, что её значение на паре (y,λ) может отличаться от значения функции Θ_3 на векторе y только в предпоследней компоненте. Поскольку по теореме Куна–Таккера для вектора y из множества P^2

$$\big|f^2(y)-\rho(y^1,b^2)\big|=0 \Longleftrightarrow \exists\,\lambda(\delta(y,\lambda)+\zeta(y,\lambda)=0),$$

то из теоремы 2 следует (iii). Аналогично доказывается утверждение (iv). Теорема 3 доказана.

Если ограничения $g^2(x)\leqslant b^2$ линейны, а функция f^1 является выпуклой, то можно отказаться от условий Слейтера в теореме 3 [2].

3.2. Случай линейной задачи нижнего уровня

Рассмотрим двухуровневую задачу следующего вида (BPL): найти

$$\inf f^1(x^1, x^2)$$

при ограничениях $g^1(x^1, x^2) \leqslant b^1$, $x^2 \in \mathcal{F}^2(x^1)$, где $\mathcal{F}^2(x^1)$ — множество оптимальных решений оптимизационной задачи нижнего уровня: найти

$$\max\{c^1x^1 + c^2x^2\}$$

при ограничениях $A^1x^1 + A^2x^2 \leqslant b^2$.

Как уже отмечалось выше, если функции f^2 и $g_i^2, i = 1, \ldots, m_2,$ — линейны, то функция возмущения ρ является кусочно-линейной. Пусть для некоторого вектора $\overline{x}^1$ задача нижнего уровня разрешима. Выпишем её двойственную задачу [2]: найти

$$\min_{u \geqslant 0}\{c^1\overline{x}^1 + (b^2 - A^1\overline{x}^1, u)\}$$

при условии $A^2 = c^2$.

Пусть $u^1, \ldots, u^p$ — все базисные допустимые решения этой задачи. Так как ограничения двойственной задачи не зависят от вектора $\overline{x}^1$, то её базисные допустимые решения также не зависят от $\overline{x}^1$. Её оптимальное значение равно $\min\limits_{t=\overline{1,p}}(b^2 - A^1\overline{x}^1, u^t)$ и в силу теоремы двойственности линейного программирования имеем равенство

$$\rho(\overline{x}^1, b^2) = c^1\overline{x}^1 + c^2\overline{x}^2 = c^1\overline{x}^1 + \min_{t=\overline{1,p}}(b^2 - A^1\overline{x}^1, u^t).$$

Следовательно, $\min\limits_{t=\overline{1,p}}(b^2 - A^1\overline{x}^1, u^t) = c^2\overline{x}^2$.

На множестве $P^2 = \left\{z | \, A^1z^1 + A^2z^2 \leqslant b^2\right\}$ вместо функции Θ_3 рассмотрим новую функцию $\widehat{\Theta}_3$ такую, что

$$\widehat{\Theta}_3(z) = (z^1, f^1(z), f^2(z), |\, c^2z^2 - \min_{t=\overline{1,p}}(b^2 - A^1z^1, u^t)| \, , \sigma(z)).$$

Заметим, что у этой функции в качестве меры нарушения экстремального ограничения двухуровневой задачи вместо величины $\left|f^2(z) - \rho(z^1, b^2)\right|$ используется новая величина $|\, c^2z^2 - \min\limits_{t=\overline{1,p}}(b^2 - A^1z^1, u^t)|$. Покажем корректность этой замены. По предположению существует вектор $\overline{x}^1$, для которого задача нижнего уровня разрешима. Следовательно, двойственная к ней задача

$$\min_{u \geqslant 0}\{c^1z^1 + (b^2 - A^1z^1, u)\}$$

при условии $uA^2 = c^2$ допустима при любом векторе z^1. Так как для $z \in P^2$ задача нижнего уровня допустима, а двойственная к ней задача допустима всегда, то из первой теоремы двойственности следует, что они разрешимы. Следовательно,

$$\rho(z^1, b^2) = c^1 z^1 + \min_{t=\overline{1,p}} (b^2 - A^1 z^1, u^t).$$

Поэтому для любого $z \in P^2$ имеем

$$\left| f^2(z) - \rho(z^1, b^2) \right| = \left| c^1 z^1 + c^2 z^2 - \rho(z^1, b^2) \right| = \left| c^2 z^2 - \min_{t=\overline{1,p}} (b^2 - A^1 z^1, u^t) \right|.$$

Из теорем 1 и 2 следует

Утверждение 3. *Если* $P^{1,2} \neq \varnothing$, *то* $P^* = \widehat{\Theta}_3^{-1}(ND(\widehat{\Theta}_3(P^2), <_{K_3}))$.

Наиболее трудоёмкой частью определения функции $\widehat{\Theta}_3$ является нахождение базисных допустимых решений $u^1, \ldots, u^p$. В некоторых частных случаях эта функция может быть эффективно вычислимой, например, если задача нижнего уровня является линейной задачей о ранце, как в [7], билинейной задачей о ранце, которая рассматривалась в [10], или многовариантной задачей о ранце, как в [11].

Опишем другой вариант сводимости, используя подход из пункта 3.1. Как и ранее, будем предполагать, что существует x^1, для которого задача нижнего уровня разрешима. Вместо необходимых условий Куна–Таккера воспользуемся теоремами двойственности линейного программирования [13]. Рассмотрим множество

$$\Lambda = \left\{ (y, u) \middle| \, A^1 y^1 + A^2 y^2 \leqslant b^2, \, uA^2 = c^2, (b^2 - A^1 y^1, u) = c^2 y^2, u \geqslant 0 \right\}.$$

Оно состоит из всевозможных пар, каждая из которых является оптимальным решением задачи нижнего уровня и двойственной к ней задачи при всех значениях набора параметров y^1, для которых указанные задачи разрешимы. Пусть Λ^{pr} — проекция множества Λ на пространство $R^{n_1+n_2}$. Так как базисные допустимые решения задачи, двойственной к задаче нижнего уровня, не зависят от переменных y^1, то это множество можно задать следующим образом:

$$\Lambda^{pr} = \left\{ y \middle| \, A^1 y^1 + A^2 y^2 \leqslant b^2, \, \min_{t=\overline{1,p}} (b^2 - A^1 y^1, u^t) = c^2 y^2 \right\}.$$

Корректность этого определения непосредственно следует из рассуждений, использованных при обосновании корректности задания функции $\widehat{\Theta}_3$. На множестве Λ^{pr} рассмотрим введённую в разделе 2 функцию

$\Theta_2(z) = \big(f^1(z), \sigma(z)\big)$, множество K_2 и индуцируемое им на множестве $\Theta_2(\Lambda^{pr})$ бинарное отношение $<_{K_2}$. Учитывая, что

$$\Lambda^{pr} = \bigcup_{t=1,\ldots,p} \Lambda_t, \text{ где } \Lambda_t = \left\{y \,\middle|\, A^1y^1 + A^2y^2 \leqslant b^2,\ (b^2 - A^1y^1, u^t) = c^2y^2\right\},$$

из теорем 1 и 2 получаем

Утверждение 4. $P^* = \bigcup\limits_{t:\ P\cap\Lambda_t\neq\varnothing} \Theta_2^{-1}(ND(\Theta_2(\Lambda_t), <_{K_2}))$.

Утверждение 4 позволяет свести решение двухуровневой задачи BPL к решению не более p двухкритериальных задач с линейными ограничениями. Когда число базисных допустимых решений p невелико, можно рассчитывать на достаточно эффективные точные или приближённые алгоритмы решения двухуровневой задачи.

3.3. Двухуровневая задача с линейной задачей о ранце на нижнем уровне

Как уже упоминалось ранее, для некоторых задач математического программирования функция возмущения может быть эффективно вычислимой. Одной из таких задач является широко известная линейная задача о ранце.

Пусть c_j и V_j, $j = 1, \ldots, M$, неотрицательны, a_j, $j = 1, \ldots, M$, положительны, $B \geqslant 0$ и выполняется условие:

$$\frac{c_1}{a_1} \geqslant \frac{c_2}{a_2} \geqslant \cdots \geqslant \frac{c_{M-1}}{a_{M-1}} \geqslant \frac{c_M}{a_M}.$$

Рассмотрим задачу о ранце $LK(M, c, a, V, B)$: найти $\max\limits_z \sum\limits_{j=1}^M c_jz_j$ при ограничениях: $\sum\limits_{j=1}^M a_jz_j \leqslant B$ и $0 \leqslant z_j \leqslant V_j$, $1 \leqslant j \leqslant M$.

Опишем сводимость для задачи двухуровневого программирования, которая на нижнем уровне содержит линейную задачу о ранце. Для упрощения изложения будем предполагать, что $a_j \equiv 1$, $1 \leqslant j \leqslant M$. Отметим, что предлагаемый вариант сводимости может быть легко модифицирован для случая, когда $a_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant M$.

Рассмотрим следующую задачу двухуровнего программирования (BPK): найти $\min\left\{f^1(x^1, x^2)\right\}$ при ограничениях:

$$g^1(x^1, x^2) \leqslant b^1, \quad x^2 \in \mathcal{D}(x^1),$$

где $\mathcal{D}(x^1)$ — множество оптимальных решений задачи $LK(n_1, c, (1, \dots, 1), x^1, B)$.

Как видно из постановки задачи, $n_1 = n_2$. Пусть $J = \{1, \dots, n_1\}$. Построим такое разбиение $\{J_t\}_{t=1}^T$ множества J, что для каждого t, $1 \leqslant t \leqslant T$,

$$c_j = c_k \text{ при любых } j, k \in J_t,$$

и для каждого t, $1 \leqslant t \leqslant T-1$,

$$c_j > c_k \text{ при любом } j \in J_t \text{ и любом } k \in J_{t+1}.$$

Каждому элементу разбиения J_t поставим в соответствие величину $C(t) = c_j$, $j \in J_t$. Далее рассмотрим задачу DK, двойственную к задаче нижнего уровня: найти

$$\min_{\mu,\, \lambda} \left\{ \mu B + \sum_{j=1}^{n_1} \lambda_j x_j^1 \right\}$$

при ограничениях $\mu + \lambda_j \geqslant c_j$, $\mu \geqslant 0, \lambda_j \geqslant 0, 1 \leqslant j \leqslant n_1$.

Заметим, что ограничения задачи DK не зависят от величин x^1. Рассматривая значения переменных μ как параметры, несложно найти все вершины многогранника задачи DK. Так как для любого оптимального решения (λ^*, μ^*) задачи DK выполняется свойство

$$\lambda_j^* = \max\{0,\, c_j - \mu^*\}, 1 \leqslant j \leqslant n_1,$$

то вершинами многогранника задачи DK будут решения следующего вида:

$$u^k = (u_1^k, \dots, u_{n_1}^k, u_{n_1+1}^k) = (\lambda^k,\, \mu^k) = (\max\{0,\, c_1 - l\}, \dots, \\ \max\{0,\, c_{n_1} - l\}, l),$$

где $l = C(k)$, $1 \leqslant k \leqslant T$, а также решение

$$u^0 = (u_1^0, \dots, u_{n_1}^0, u_{n_1+1}^0) = (\lambda^0,\, \mu^0) = (c_1, \dots, c_{n_1}, 0).$$

Таким образом, задача DK может быть представлена в эквивалентной форме: найти

$$\min_{k=0,\dots,T} \left\{ u_{n_1+1}^k B + \sum_{j=1}^{n_1} \max\left\{0,\, c_j - u_j^k\right\} x_j^1 \right\}.$$

Рассмотрим функцию возмущения задачи $LK(n_1, c, (1, \ldots, 1), x^1, B)$:

$$\rho'(x^1, B) = \max\left\{ \sum_{j=1}^{n_1} c_j z_j \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n_1} z_j \leqslant B,\, 0 \leqslant z_j \leqslant x_j^1,\ 1 \leqslant j \leqslant n_1 \right\}.$$

Из первой теоремы двойственности для линейного программирования следует, что значение функции ρ' при любом $x^1 \in P^2$ совпадает с оптимальным значением целевой функции задачи DK и, следовательно, может быть найдено в виде:

$$\rho'(x^1, B) = \min\left\{ cx^1,\ \min_{t=1,\ldots,T}\left\{ C(t)B + \sum_{j=1}^{n_1} \max\{0,\ c_j - C(t)\}\, x_j^1 \right\}\right\}.$$

На множестве P^2 рассмотрим функцию ψ такую, что

$$\psi(x^1, z) = (x^1, f^1(x^1, z), cz, cz - \rho'(x^1, B), \sigma(x^1, z)).$$

Из утверждения 3 вытекает

Следствие 3. *Прообраз множества $ND(\psi(P^2), <_K)$ относительно отображения ψ содержит все оптимальные решения задачи* ВРК. *Более того, если система*

$$g^1(u, v) \leqslant b^1,\ \sum_{j=1}^{n_1} v_j \leqslant B,\ 0 \leqslant v_j \leqslant u_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n_1$$

совместна, то справедливо и обратное включение.

Другой вариант сводимости основан на результатах, установленных в утверждении 4.

Следствие 4. $P^* = \bigcup\limits_{t:\ P\cap\Lambda_t \neq \varnothing} \Theta_2^{-1}(ND(\Theta_2(\Lambda_t), <_{K_2}))$, где

$$\Lambda_t = \left\{ (x^1, z) \middle| \, cz = u_{n_1+1}^t B + \sum_{j=1}^{n_1} \max\left\{0,\ c_j - u_j^t\right\} x_j^1, \sum_{j=1}^{n_1} z_j \leqslant B, \right.$$
$$\left. 0 \leqslant z_j \leqslant x_j^1,\, 1 \leqslant j \leqslant n_1 \right\}.$$

Таким образом, задача ВРК сводится к решению не более $T \leqslant n_1$ двухкритериальных задач с простыми линейными ограничениями.

4. Задачи с дискретными переменными

Ранее предполагалось, что переменные в задаче ВР принимают вещественные значения. Однако следует заметить, что результаты, установленные в теоремах 1 и 2, естественным образом обобщаются на случай, когда задача двухуровнего программирования содержит только целочисленные или разнородные переменные.

Пусть $I^1 = \{1, \ldots, n_1\}$ и $I^2 = \{1, \ldots, n_2\}$ — множества индексов переменных соответственно верхнего и нижнего уровней. Рассмотрим задачу ВР, в которой помимо условий $g^1(x^1, x^2) \leqslant b^1$ и $x^2 \in \mathcal{F}^2(x^1)$ имеются ограничения вида: $x_j^k \in \mathbb{Z}$, $j \in S^k$, где $S^k \subseteq I^k$, $k = 1, 2$. Такую смешанно-целочисленную задачу двухуровнего программирования обозначим через MIBP.

Вместо множеств P^1, P^2 и $\mathcal{F}^2$ для задачи MIBP рассмотрим множества $P_I^1 = \Big\{x |\, x \in P^1,\, x_j^k \in \mathbb{Z},\, k = 1, 2\Big\}$, $P_I^2 = \Big\{x |\, x \in P^2,\, x_j^k \in \mathbb{Z},\, k = 1, 2\Big\}$ и $\mathcal{F}_I^2 = \Big\{x |\, x \in \mathcal{F}^2,\, x_j^k \in \mathbb{Z},\, k = 1, 2\Big\}$ соответственно. Заменяя в доказательствах теорем 1 и 2 множества P^1, P^2 и $\mathcal{F}^2$ на множества P_I^1, P_I^2 и $\mathcal{F}_I^2$ и повторяя используемые в них рассуждения, получаем, что утверждения теорем 1 и 2 остаются справедливыми для задачи MIBP.

Таким образом, теоремы 1 и 2 дают основание для построения сводимостей в тех случаях, когда двухуровневая задача содержит дискретные переменные. Рассмотрим примеры таких сводимостей для задачи о p–медиане с предпочтениями клиентов [3].

В задаче предполагаются заданными два множества: множество $I = \{1, \ldots, m\}$ возможных пунктов размещения предприятий сферы обслуживания и множество $J = \{1, \ldots, n\}$ клиентов, являющихся потребителями услуг. Лицу, принимающему решение на верхнем уровне, требуется разместить заданное число p предприятий таким образом, чтобы удовлетворить потребности всех клиентов. Каждый клиент j выбирает предприятие i, которое будет его обслуживать, таким образом, чтобы расстояние d_{ij} от предприятия i до клиента j было минимальным. Лицо, принимающее решение на верхнем уровне, несёт расходы c_{ij}, связанные с обслуживанием клиента j предприятием i. Критерием оптимальности принятого решения на верхнем уровне является минимум суммарных затрат на обслуживание всех клиентов.

В работе [3] был предложен вариант сведéния задачи о p–медиане с предпочтениями клиентов к одноуровневой задаче в предположении, что величины d_{ij} различны при фиксированном j и каждый клиент обслуживается ровно одним предприятием. В этом случае значения пере-

менных на нижнем уровне однозначно определяются набором значений переменных верхнего уровня. Двухуровневые задачи, обладающие таким свойством, называют *невырожденными* [19].

Рассмотрим более общую постановку этой задачи, в которой величины d_{ij} могут быть равными при фиксированном значении j. Математическая модель задачи о p–медиане с предпочтениями клиентов может быть записана следующим образом (BM): найти

$$\min_{y,x} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i = p$, $y_i \in \{0,1\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $x \in \mathcal{U}(y)$, где $\mathcal{U}(y)$ — множество оптимальных решений задачи нижнего уровня: найти

$$\min_{z} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} z_{ij}$$

при ограничениях $\sum\limits_{i=1}^{m} z_{ij} = 1$, $z_{ij} \leqslant y_i$, $z_{ij} \in \{0,1\}$, где $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

В такой постановке переменные верхнего уровня y_i принимают значение 1, если предприятие i открывается, и 0 в противном случае, а переменные нижнего уровня z_{ij} принимают значение 1, если предприятие i используется для обслуживания клиента j, и равны нулю в противном случае. Будем предполагать, что $0 < p \leqslant m$, поскольку при $p > m$ и $p \leqslant 0$ рассматриваемая задача неразрешима. Отметим также, что неотрицательность величин d_{ij} гарантирует неотрицательность целевой функции задачи нижнего уровня.

Матрица ограничений задачи нижнего уровня является вполне унимодулярной [4]. Это свойство позволяет построить сводимость задачи BM к задаче векторной оптимизации, опираясь на результаты раздела 3.2 настоящей статьи. Действительно, в силу свойства унимодулярности матрицы ограничений выпуклая оболочка допустимого множества задачи нижнего уровня совпадает с многогранником её линейной релаксации. Следовательно, рассматриваемая задача имеет нулевой разрыв двойственности. Переходя к задаче, двойственной к задаче нижнего уровня, и проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из раздела 3.2, получим, что утверждения 3 и 4 справедливы для задачи BM.

Используя информацию о структуре внутренней оптимизационной задачи, можно найти другие варианты сводимостей. Рассмотрим функцию возмущения задачи нижнего уровня

$$\varrho(y) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} z_{ij} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{m} z_{ij} = 1,\ z_{ij} \leqslant y_i,\ z_{ij} \in \{0,1\}, \right.$$
$$\left. 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n \right\}.$$

Значение $\varrho(y)$ при любых заданных y может быть найдено в виде [3]:

$$\varrho(y) = \sum_{j=1}^{n} \min_{i:\, y_i=1} d_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \min_{i \in I} \{y_i\, d_{ij}\}.$$

Заметим, что ограничения верхнего уровня задачи ВМ не зависят от переменных нижнего уровня. Используя следствие 2, легко получить сведе́ние задачи ВМ к задаче векторной оптимизации с $m+3$ критериями. Для этого рассмотрим множество U точек $(y,x) \in \mathbb{B}^m \times \mathbb{R}^{mn}$, удовлетворяющих системе

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} y_i = p,\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\\
&x_{ij} \leqslant y_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\\
&y_i \in \{0,1\},\ 1 \leqslant i \leqslant m,\\
&x_{ij} \in \{0,1\},\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n.
\end{aligned}$$

На множестве U зададим отображение $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ такое, что

$$\varphi(y,x) = \left(y,\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij},\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{n} \min_{i \in I} \{y_i\, d_{ij}\} \right).$$

Тогда справедливо следующее

Утверждение 5. *Множество оптимальных решений задачи ВМ совпадает с прообразом множества $ND(\varphi(U), <_{K_3})$ относительно отображения φ.*

5. Заключение

В статье исследуются сводимости двухуровневых задач, в которых ищется оптимистическое равновесие, к задачам векторной оптимизации. В отличие от предшествующих работ вопросы построения сводимости рассматриваются в более широком контексте: целью статьи является не только получение сводимости, но и механизма, позволяющего управлять сложностью представления множества допустимых решений и сложностью оптимизируемых критериев векторной задачи. Также оцениваются возможности построения нужных сводимостей таких стандартных инструментов теории экстремальных задач, как необходимые условия Куна–Таккера и теория двойственности.

Не рассматривались вопросы решения векторных задач, определяемых сложными отношениями, возникающих при таких сводимостях. Это непростая тема, требующая дополнительных исследований. Предварительные результаты в этой области могут быть найдены в [21, 27]. Другое направление исследований связано с нахождением сводимостей двухуровневых задач, в которых ищется пессимистическое равновесие [19], к задачам векторной оптимизации. Первые результаты на эту тему получены в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Антипин А. С.** Равновесное программирование: методы градиентного типа // Автоматика и телемеханика. 1997. № 8. С. 125–137.
2. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
3. **Горбачевская Л. Е., Дементьев В. Т., Шамардин Ю. В.** Двухуровневая экстремальная задача выбора номенклатуры изделий // Препринт ИМ СО РАН. Новосибирск, 1997. № 41. 26 с.
4. **Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К.** Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
5. **Зоркальцев В. И., Хамисов О. В.** Равновесные модели в экономике и энергетике. Новосибирск: Наука, 2006.
6. **Иваненко Д. С., Плясунов А. В.** О сводимости задачи двухуровневого программирования к задаче векторной оптимизации // Труды Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. Сер. Информатика. Вып. 5. Новосибирск, 2005. С. 132–143.

7. **Кочетов Ю. А., Плясунов А. В.** Полиномиально разрешимый класс задач двухуровневого линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1997. Т. 4, № 2. С. 23–33.
8. **Кочетов Ю. А., Плясунов А. В.** Задача выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2002. Т. 9, № 2. С. 78–96.
9. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
10. **Плясунов А. В.** Полиномиально разрешимый класс задач двухуровневого нелинейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7, № 2. С. 89–113.
11. **Плясунов А. В.** Задача двухуровневого линейного программирования с многовариантным ранцем на нижнем уровне // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2003. Т. 10, № 1. С. 44–52.
12. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
13. **Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.** Линейное программирование (теория, методы и приложения). М.: Наука, 1969.
14. **Antipin A. S.** From optima to equilibria // Dynamics of non-homogeneous systems. Proceedings of Institute of System Analysis of the Russian Academy of Science. Moscow, 2000. V. 3. P. 35–64.
15. **Bard J.** Optimality conditions for the bilevel programming problem // Naval Research Logistics Quarterly. 1984. V. 31, N 1. P. 13–26.
16. **Ben-Ayed O.** Bilevel linear programming // Computers and Operations Research. 1993. V. 20. N 5. P. 485–501.
17. **Candler W.** A linear bilevel programming algorithm: a comment // Computers and Operations Research. 1988. V. 15, N 3. P. 297–298.
18. **Clarke P., Westerberg A.** A Note on the optimality conditions for the bilevel programming problem // Naval Research Logistics. 1988. V. 35, N 5. P. 413–418.
19. **Dempe S. J.** Foundations of bilevel programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
20. **Ehrgott M.** A multicriteria optimization. Berlin–Heidelberg: Springer, 2005.
21. **Fliege J., Vicente L. N.** Multicriteria approach to bilevel optimization // J. of Optimization Theory and Applications. 2006. V. 131, N 2. P. 209–225.
22. **Fülöp J.** On the equivalence between a linear bilevel programming problem and linear potimization over the efficient set. Technical report WP 93-1, Laboratory of operations research and decision systems, Computer and automation Institute, Hungarian Academy of Sciences, 1993.

23. **Goh, C. J., Yang X. Q.** A nonlinear Lagrangian theory for nonconvex optimization // J. Optimization Theory and Applications. 2001. V. 109, N 1. P. 99–121.

24. **Haurie A., Savard G., White D.** A note on an efficient point algorithm for a linear two-stage optimization problem // Operations Research. 1990. V. 38, N 3. P. 553–555.

25. **Marcotte P., Savard G.** A note on the pareto optimality of solutions to the linear bilevel programming problem // Computers and Operations Research. 1991. V. 18, N 4. P. 355–359.

26. **Nemhauser G. L., Wolsey L. A.** Integer and combinatorial optimization. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988.

27. **Rubinov A. M., Gasimov R. N.** Scalarization and nonlinear scalar duality for vector optimization with preferences that are not necessarily a pre-order relation // J. Global Optimization. 2004. V. 29, N 4. P. 455–477.

28. **Ünlü G.** A linear bilevel programming algorithm based on bicriteria programming // Computers and Operations Research. 1987. V. 14, N 2. P. 173–179.

29. **Wen U., Hsu S.** A note on a linear bilevel programming algorithm based on bicriteria programming // Computers and Operations Research. 1989. V. 16, N 1. P. 79–83.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.
E-mail: apljas@math.nsc.ru

Статья поступила
13 января 2007 г.

Переработанный вариант —
15 мая 2007 г.