ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2007. Серия 2. Том 14, № 2. 14–31

УДК 519.854.3

ОЦЕНКИ ЧИСЛА ВЕРШИН ЦЕЛЫХ ПОЛИЭДРОВ*)

С. И. Веселов, А. Ю. Чирков

Целым называется полиэдр, в котором все вершины имеют целые координаты. Рассматриваются целые полиэдры $P_I = \mathrm{conv}(P \cap \mathbb{Z}^d)$, заданные неявно, т. е. система линейных ограничений для P_I неизвестна, но известна для P. Приведены оценки числа вершин полиэдра P_I.

Введение

Целым называется полиэдр, в котором все вершины имеют целые координаты. Сведения о целых полиэдрах можно найти в [7]. Здесь рассматриваются целые полиэдры $P_I = \mathrm{conv}(P \cap \mathbb{Z}^d)$, заданные неявно, т. е. система линейных ограничений неизвестна для P_I, но известна для полиэдра P. Множество вершин полиэдра P обозначим через $V(P)$. Известно, что число $|V(P_I)|$ может быть как угодно большим даже в случае, когда P является треугольником. В [8] приведена геометрическая интерпретация подходящих дробей к числу $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, которая показывает, что выпуклая оболочка целых решений системы неравенств

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}x_1 + x_2 \leqslant 0,\ x_1 \leqslant u_s,\ x_2 \geqslant 0,$$

имеет $s+1$ вершин: $(u_1,\ v_1) = (1, 0)$, $(u_k,\ v_k) = (u_{k-1}+f_{2k-2},\ v_{k-1}+f_{2k-1})$ при $2 \leqslant k \leqslant s$, $(u_{s+1},\ v_{s+1}) = (u_s,\ 0)$. Числа f_k являются элементами последовательности Фиббоначи: $f_{-1} = 0, f_0 = 1, f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ при $k \geqslant 1$.

В [26] этот пример немного переработан: показано, что если P задан системой неравенств с рациональными коэффициентами

$$f_{2k}x_1 + f_{2k+1}x_2 \leqslant f_{2k+1}^2 - 1,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$$

то вершинами полиэдра P_I являются точки $p_j = (f_{2j}, f_{2k+1} - f_{2j-1})$ $(j = 0, \ldots, k+1)$ и $p_{k+2} = (0, 0)$.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00552).

Для полиэдров на плоскости в разделе 1 приводится достижимая верхняя оценка числа вершин и описывается полиномиальный алгоритм нахождения вершин.

Метод получения нетривиальных верхних оценок числа вершин впервые предложен в [17] и состоит в отображении $V(P_I)$ в разделённое множество и оценке его мощности. Множество $M \subseteq \{x \mid x \in \mathbb{Z}^d, x \geqslant 0\}$ называется *разделённым* [17], если из условий $z, y \in M$ и $2z \geqslant y$ следует, что $z = y$.

Теорема 1 [19]. *Если координаты любой точки x разделённого множества M удовлетворяют неравенствам $\psi_i \leqslant x_i \leqslant \omega_i$, $1 \leqslant i \leqslant d-1$, то*

$$|M| \leqslant \prod_{i=1}^{d-1}\Bigl(1 + \log_2 \frac{\omega_i + 2}{\psi_i + 1}\Bigr). \tag{1}$$

В [12, 17–20] приведены оценки числа вершин для разных способов задания целых полиэдров. В частности, для полиэдра $P = \{x \mid Ax \leqslant b\}$ ($A \in \mathbb{Z}^{d\times d}$, $\det A \neq 0$) справедливо неравенство

$$|V(P_I)| \leqslant (1 + \log_2 |\det A|)^{d-1}, \tag{2}$$

а для полиэдра задачи о рюкзаке $P = \{x \mid ax \leqslant \beta,\ x \geqslant 0\}$ ($a \in \mathbb{Z}^d_+$) имеет место неравенство

$$|V(P_I)| \leqslant \prod_{i=1}^{d}(1 + \log_2(1 + \beta/a_i)). \tag{3}$$

В разделе 4 показано, что в оценке (2) нельзя уменьшить показатель степени, а в разделе 2 получено усиление оценки (3).

В [23] для полиэдра $P = \{x \mid Ax \leqslant b\}$, где $A \in \mathbb{Z}^{m\times d}$, $\operatorname{rank} A = d$, $b \in \mathbb{Z}^m$, получена оценка

$$|V(P_I)| \leqslant 2m\binom{m-1}{d-1}(5d^2 l + 1)^{d-1}, \tag{4}$$

где l — длина двоичной записи коэффициентов системы неравенств. В разделе 3 получено неравенство с меньшим коэффициентом при l^{d-1}.

Структура статьи. В разделе 1 для целого полиэдра на плоскости выводится достижимая верхняя оценка числа вершин и описан алгоритм нахождения вершин. В разделе 2 доказано неравенство более сильное,

чем (3). В разделе 3 приведены верхние оценки более сильные, чем оценка (4) для числа вершин в полиэдрах произвольной размерности. В разделе 4 получена нижняя оценка среднего числа вершин в одном классе полиэдров, из которой следует неулучшаемость верхней оценки (2).

Обозначения.

$[a, b]$ — множество целых чисел на отрезке от a до b;

$\operatorname{conv}(M)$ — выпуклая оболочка точек множества M;

A_J^I — подматрица матрицы A, расположенная на пересечении строк с номерами из I и столбцов с номерами из J. Индекс, содержащий все номера, будем опускать. Положим

$$\xi(d, m) = \binom{m - \lfloor (d+1)/2 \rfloor}{\lceil d/2 \rceil} + \binom{m - \lceil d/2 \rceil - 1}{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}.$$

1. Вершины целых многоугольников

Содержание этого раздела дополняет и уточняет результаты из [3, 4].

Оценка числа вершин. Пусть $P = \{x \mid a_1^T x \leqslant b_1,\ a_2^T x \leqslant b_2\}$, где $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}^2$. Положим $n(\delta) = \max\limits_{|\det(a_1\ a_2)|=\delta} |V(P_I)|$, $\delta_k = \min\limits_{n(\delta)=k} \delta$. Ясно, что $n(1) = 1,\ n(2) = 2,\ \delta_1 = 1,\ \delta_2 = 2$. Выведем формулу для δ_k.

Возьмём произвольный элемент $e \in \mathbb{Z}^2$ и рассмотрим два случая.

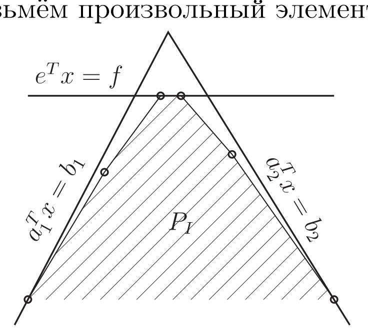

Рис. 1

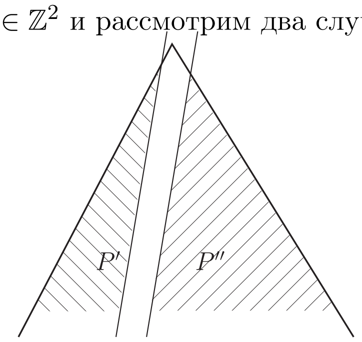

Рис. 2

а) Существует $f = \max\limits_{x \in P_I} e^T x$. Полагаем

$$P' = \{x \mid a_1^T x \leqslant b_1,\ e^T x \leqslant f\}, \quad P'' = \{x \mid e^T x \leqslant f,\ a_2^T x \leqslant b_2\}.$$

Из рис. 1 видно, что

$$V(P_I) = V(P_I') \cup V(P_I''), \tag{5}$$

причём $|V(P_I)| = |V(P_I')| + |V(P_I'')|$, если прямая $e^T x = f$ проходит через две вершины множества P_I.

b) Функционал $e^T x$ не ограничен на P. Пусть x' — вершина из P и $f = \lfloor\, e^T x' \,\rfloor$. Полагаем

$$P' = \{x \mid a_1^T x \leqslant b_1,\ e^T x \leqslant f\}, \quad P'' = \{x \mid e^T x \geqslant f+1,\ a_2^T x \leqslant b_2\}.$$

Из рис. 2 видно, что

$$V(P_I) \subseteq V(P_I') \cup V(P_I''). \tag{6}$$

Пусть $D = |\det(a_1\ a_2)|$ и $t_1,\ t_2$ удовлетворяют системе

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 \equiv 0 (\operatorname{mod} D),\ 0 \leqslant |t_1|, |t_2| < D. \tag{7}$$

Положим $e = (a_1 t_1 + a_2 t_2)/D$. Из (5) и (6) получаем

$$|n(D)| \leqslant |n(|t_1|)| + |n(|t_2|)|. \tag{8}$$

Пусть $|V(P_I)| = k$ и $D = \delta_k$. Тогда компоненты векторов $a_1,\ a_2$ несократимы. Поэтому (7) имеет решения вида $t' = (1, \alpha)$ и $t'' = (2, 2\alpha - \frac{\alpha}{|\alpha|}\delta_k)$, где $2|\alpha| \leqslant \delta_k$. Используя их в неравенстве (8), получаем неравенство

$$\delta_k \geqslant 2\delta_{k-1} + \delta_{k-2}.$$

Рассмотрим две последовательности чисел

$$\begin{aligned} &\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 2, \quad \beta_k = 2\beta_{k-1} + \beta_{k-2} \quad (k \geqslant 3),\\ &\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 1, \quad \gamma_k = \gamma_{k-2} + \beta_{k-1} + 2\beta_{k-2} \quad (k \geqslant 3), \end{aligned}$$

Пусть полиэдр P задан системой

$$\begin{array}{rcrl} \beta_k x_1 & + & \beta_{k-1} x_2 & \leqslant \gamma_k, \\ & & x_2 & \leqslant 0. \end{array} \tag{9}$$

Вычислим $|V(P_I)|$. Индукцией по k доказывается, что $\beta_k/2 < \gamma_k < \beta_k$. Составим комбинацию неравенств системы (9):

$$2(\beta_k x_1 + \beta_{k-1} x_2) + \beta_{k-2} x_2 \leqslant 2\gamma_k.$$

После деления на β_k и отбрасывания дробной части, получим неравенство $2x_1 + x_2 \leqslant 1$, которое используем в том же качестве, в каком выше использовалось неравенство $e^T x \leqslant f$. Так как прямая $2x_1 + x_2 = 1$ проходит через точки $(1, -1), (2, -3)$ из P_I, то $|V(P_I)| = |V(P_I')| + |V(P_I'')|$.

Непосредственно проверяется равенство $V(P_I'') = \{(0,0),(1,-1)\}$. Система

$$\begin{array}{rcrl} \beta_k x_1 & + & \beta_{k-1} x_2 & \leqslant \gamma_k, \\ 2x_1 & + & x_2 & \leqslant 1, \end{array} \tag{10}$$

задающая P', унимодулярной заменой неизвестных $x_1 = u_1 - 2u_2 + 3$, $x_2 = -2u_1 + 5u_2 - 2$ приводится к системе вида (9) с определителем β_{k-2}. Следовательно, $|V(P_I')| = k-2$ и $|V(P_I)| = k$.

Аналогично доказывается, что выпуклая оболочка целых решений системы

$$\begin{array}{rcrl} \beta_k x_1 & - & \beta_{k-1} x_2 & \leqslant \eta_k, \\ & & x_2 & \leqslant 0, \end{array} \tag{11}$$

где $\eta_1 = 0,\ \eta_2 = 1,\ \eta_k = \eta_{k-2} + 2\beta_{k-1} - \beta_{k-2}$ при $k \geqslant 3$, имеет k вершин.

Из приведённых рассуждений следует

Теорема 2. $\delta_k = \beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Следствие 1. *Если P — множество решений системы двух неравенств с двумя неизвестными, δ — абсолютная величина определителя системы и $k = \max\{i \mid \beta_i \leqslant \delta\}$, то $|V(P_I)| \leqslant k$.*

Нетрудно видеть, что при целом $k \geqslant 2$ из неравенства $|(1+\sqrt{2})^k - (1+\sqrt{2})^x| < 1/2$ следует неравенство $|k - x| < 1/2$, поэтому $\lfloor x \rceil = k$. Учитывая равенство $\beta_k = \dfrac{(1+\sqrt{2})^k - (1-\sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}}$ и полагая $x = \log_{1+\sqrt{2}} 2\sqrt{2}\delta$, из следствия 1 получаем

Следствие 2. *Если P — множество решений системы двух неравенств с двумя неизвестными и δ — абсолютная величина определителя системы, то $|V(P_I)| \leqslant \left\lfloor \log_{1+\sqrt{2}} 2\sqrt{2}\delta \right\rceil$ и эта оценка достижима.*

Следствие 3. *Если P — множество решений системы m неравенств с двумя неизвестными и δ — максимум среди абсолютных величин базисных миноров, то $|V(P_I)| \leqslant m \left\lfloor \log_{1+\sqrt{2}} 2\sqrt{2}\delta \right\rceil$.*

Доказательство. Пусть P задан системой $a_i^T x \leqslant b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Уменьшая при необходимости правые части неравенств, можно получить систему неравенств $a_i^T x \leqslant b_i'$ $(i = 1, \ldots, m)$, задающую полиэдр P' такой, что $P_I' = P_I$, причём для любого i прямая $a_i^T x = b_i'$ проходит через точку из P_I. Пусть U — множество всех полиэдров, ограниченных парами смежных граней полиэдра P'. Тогда $V(P_I) = \bigcup\limits_{L \in U} V(L_I)$. Утверждение вытекает из следствия 2 и неравенства $|U| \leqslant m$.

Алгоритм перечисления вершин. Сначала рассмотрим полиэдр,

заданный системой двух линейных неравенств с двумя неизвестными. С помощью унимодулярной замены неизвестных и переноса начала системы координат преобразуем систему неравенств в систему

$$\begin{array}{rcrl} \alpha x_1 & + & \beta x_2 & \leqslant \gamma, \\ & & -x_2 & \leqslant 0 \end{array}$$

с положительными и несократимыми α, β. Сложность преобразования равна $O(\log \alpha)$ (см., например, [10, 11]). Множество P решений системы изображено на рис. 3.

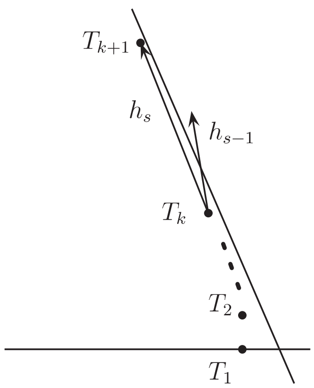

Рис. 3

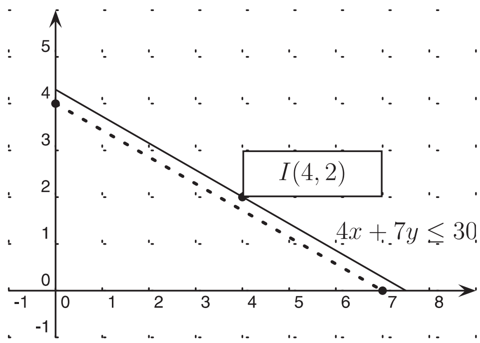

Рис. 4

Полагаем $l^T = (-\beta, \alpha)$, $a^T = (\alpha, \beta)$. Далее построим состоящую из фрагментов последовательность векторов $H = \{h_1, h_2, \ldots.\}$. Величину $u_i = a^T h_i$ назовём *весом* вектора h_i.

Первый фрагмент содержит только $h_1^T = (0, 1)$. Полагаем

$$h_2^T = (-1, \lceil \alpha/\beta \rceil), r = \lceil u_1/u_2 \rceil,\ h_3 = rh_2 - h_1, g = h_3 - h_2, \quad s = \lfloor u_2/(u_2 - u_3) \rfloor .$$

Векторы второго фрагмента вычисляются по формуле

$$h_i = h_2 + (i-2)g \quad (i = 2, .., s+1).$$

Если $l \neq h_2 + sg$, то следующий фрагмент, начинающийся с вектора $h_{s+2} = h_2 + sg$, находим аналогично, выбрав вместо h_1, h_2 соответственно h_{s+1}, h_{s+2}.

Любая пара соседних векторов является базисом решётки $\mathbb{Z}^2$. Нетрудно показать, что направляющие векторы граней для P_I содержатся в H. Первой вершиной является точка $T_1 = (\lfloor \gamma/\alpha \rfloor, 0)$. Вычисляем в T_1 величину невязки $\gamma_1 = \gamma - \alpha \lfloor \gamma/\alpha \rfloor$. Пусть T_k — последняя найденная вершина

и γ_k — величина невязки. Если найдутся наименьший номер s и наибольшее целое число $d \geqslant 1$ такие, что

$$du_s \leqslant \gamma_k, \tag{12}$$

то полагаем $T_{k+1} = T_k + dh_s,\ \gamma_{k+1} = \gamma_k - du_s$, удаляем из H векторы h_i $(i \leqslant s)$ и продолжаем вычисления. В противном случае вершины, рёбра и граничные лучи множества P_I найдены.

Оценим временну́ю сложность. Заметим, что векторы в H расположены в порядке убывания весов (*весом* набора векторов назовём максимальный среди весов векторов). Обозначим через $\varphi(w)$ временну́ю сложность нахождения всех направляющих векторов граней в множестве веса w. Временна́я сложность нахождения последовательности векторов $h_{i_1}, \ldots, h_{i_n}$, принадлежащих одному фрагменту, равна $O(n)$, так как для нахождения каждого из них достаточно решить неравенство (12). Очевидно, что при любых $n > 1$ и $r < n$ справедливо неравенство $u_{i_r} > u_{i_{r+1}} + .. + u_{i_n}$. Поэтому $u_{i_n} < u_{i_1}/2^{n-2}$ и $\varphi(w) \leqslant cn + \varphi(w/2^{n-2})$, где c — некоторая константа. Из последнего неравенства выводится верхняя оценка временно́й сложности алгоритма $O(\log \delta)$, где δ есть абсолютная величина определителя исходной системы неравенств.

Формулы $t_1 = \gamma - \alpha x_1 - \beta x_2,\ t_2 = x_2$ взаимно однозначно отображают P_I в выпуклую оболочку S множества неотрицательных решений сравнения $t_1 + \beta t_2 \equiv \gamma\ (\mathrm{mod}\alpha)$.

Теорема 3. *Если несократимое неравенство*

$$\pi_1 t_1 + \pi_2 t_2 \geqslant \pi_0 \tag{13}$$

задаёт грань S, то $\pi_1 + \pi_2 \leqslant \alpha$.

Доказательство. Рассмотрим точки p^1 и $p^2 = p^1 + (\pi_2,\ -\pi_1)$, расположенные на грани. Длина последовательности

$$(p_1^1, p_2^1), (p_1^1, p_2^1 - 1), \ldots, (p_1^1, p_2^2), (p_1^1 + 1, p_2^2), .., (p_1^2, p_2^2)$$

равна $\pi_1 + \pi_2 + 1$. Поэтому при $\pi_1 + \pi_2 > \alpha$ найдутся две различные точки, разность между которыми есть некоторый вектор $h \neq \pm(\pi_2, -\pi_1)$, удовлетворяющий сравнению $t_1 + \beta t_2 \equiv 0\,(\mathrm{mod}\alpha)$. Так как $p^1 + h,\ p^2 - h \in S$, то из (13) следует, что $\pi_1 h_1 + \pi_2 h_2 = 0$, а это противоречит несократимости π_1 и π_2.

Пусть P задан системой m линейных неравенств с двумя неизвестными и абсолютные значения базисных миноров не превышают δ. Алгоритм состоит в следующем.

1. Удаляются неравенства-следствия, а оставшиеся упорядочиваются так, чтобы любые два соседних неравенства определяли вершину в P. Это можно сделать, затратив $O(m \log m)$ операций [9].

2. Если есть вершина с дробными координатами, то выбирается подсистема двух неравенств, которые вершина обращает в равенства, и находится выпуклая оболочка множества целых решений этой подсистемы. Присоединяя к исходной системе новые неравенства, получается полиэдр P'. Повторяется шаг 2.

Из теоремы 3 следует, что модули базисных миноров в новой системе не превышают δ. Так как нецелых вершин в P' по крайней мере на одну меньше, чем в P, то временна́я сложность алгоритма не превышает $O(m \log m\delta)$.

2. Верхние оценки числа вершин полиэдра задачи о рюкзаке

В [24] полиэдр задачи о рюкзаке покрывается *ящиками*, т. е. множествами вида $I(u) = \{x \mid u \leqslant x < 2u\}$. Компоненты вектора u выбираются из множества $\{0, 1, 2, \ldots, 2^s, \ldots\}$. Так как в каждом ящике содержится не более одной вершины, то справедливо следующее следствие неравенства (2):

$$|V(P_I)| \leqslant (\log_2(4\alpha))^d,$$

где $\alpha = \max\limits_i(\beta/a_i)$. В [25] сделана попытка усилить эту оценку и приведено неравенство

$$|V(P_I)| \leqslant d \log_2(2d)(\log_2(4\alpha))^{d-1}. \qquad (14)$$

Однако доказательство этого неравенства неверно, поскольку автор предполагал, что вершины полиэдра P_I содержатся лишь в ящиках, пересекающих гиперплоскость, проходящую через вершины, расположенные на координатных осях. Контрпримером является полиэдр, изображённый на рис. 4. Ящик $I(4, 2)$ содержит вершину $(4, 2)$ и не пересекает пунктирную линию.

Приведём строгое доказательство неравенства (14). Рассмотрим множество $P' = \{(x, x_{d+1}) \mid a^T x + x_{d+1} = \beta,\ x \geqslant 0,\ x_{d+1} \geqslant 0\}$. Нетрудно видеть, что $|V(P_I)| = |V(P'_I)|$. Рассмотрим также множества $T_j = \{x \in V(P'_I) \mid x_j \geqslant \frac{1}{d} \lfloor \beta/a_j \rfloor\}$ $(j = 1, \ldots, d)$. Множество $V(P'_I)$ обладает свойством разделённости. Следовательно, любое его подмножество также обладает этим свойством. Из (1) получаем неравенство

$$|T_j| \leqslant \log_2(2d) \prod_{i=1, i \neq j}^{d} (1 + \lfloor \log(2 + \lfloor \beta/a_i \rfloor) \rfloor) \leqslant (\log_2 2d)(\log_2 4\alpha)^{d-1}.$$

Если для точки $p \in P_I$ справедливы неравенства $p_j \leqslant \dfrac{1}{d}\lfloor \beta/a_j \rfloor$ $(i = 1, \ldots, d)$, то она принадлежит симплексу, образованному началом координат и вершинами полиэдра P_I на координатных осях. Следовательно, для любого $p \in V(P_I)$ найдётся j такое, что $p_j > \dfrac{1}{d}\lfloor \beta/a_j \rfloor$. Отсюда вытекает, что $|V(P_I)| \leqslant \sum_{j=1}^{d} |T_j| \leqslant d\log_2(2d)\log_2^{d-1}(4\alpha)$.

Теперь получим оценку для полиэдра $P = \{x \mid a^T x = b,\ 0 \leqslant x_i \leqslant \omega$ $(i = 1, .., d)\}$. Выведем её из неравенства (1). Не уменьшая общности, считаем, что b и компоненты вектора a положительны. Положим $T_i = \{t \in V(P_I) \mid a_i t_i \geqslant a_j t_j\ (j = 1, .., d)\}$. Для всех $t_j \in T_i$ справедливы неравенства $0 \leqslant t_j \leqslant \omega$ $(j = 1, \ldots, d)$, $b/(da_i) \leqslant t_i \leqslant b/a_i$. Из (1) получаем $|T_i| \leqslant \log_2(2d)(1 + \log_2(2 + \omega))^{d-2}$. Следовательно,

$$|V(P_I)| \leqslant d\log_2(2d)(1 + \log_2(2 + \omega))^{d-2}. \tag{15}$$

3. Оценки числа вершин в произвольном целом полиэдре

Для получения асимптотически неулучшаемых верхних оценок числа вершин целого полиэдра P_I исходный полиэдр разобьём на симплексы $P = \bigcup_{i=1}^{s} S_i$ и оценим число вершин в $(S_i)_I$ для каждого $i \in [1, s]$. Этот подход применялся в работе [16]. Здесь выводится оценка более сильная по сравнению с оценкой из [16].

Пусть $P = \{x \mid Ax \leqslant b\}$, где $A \in \mathbb{Z}^{m\times d}$, $\operatorname{rank} A = d \leqslant m$, $b \in \mathbb{Z}^m$. Для простоты будем считать полиэдр P ограниченным (неограниченный случай сводится к ограниченному) и телесным (имеющим ненулевой объём). Следуя [13], обсудим количественные аспекты разбиения политопа на симплексы. Для произвольной фиксированной вершины v политопа P обозначим через F множество граней размерности $d - 1$, не содержащих v. Допустим, что для каждой грани $f \in F$ уже построено разбиение $(d-1)$-мерными симплексами $f = \bigcup_{i=1}^{k_f} S_{i,f}$. Тогда формула

$$P = \bigcup_{f\in F}\bigcup_{i=1}^{k_f} \operatorname{conv}(v \cup S_{if}) \tag{16}$$

определяет разбиение политопа P. Индуктивное применение формулы (16) позволяет получить разбиение политопа P на симплексы. Перенумеруем каким-либо способом вершины политопа P. Обозначим через $\nu(f)$

наименьший порядковый номер вершины, лежащей на грани f, а через $F(i, f)$ множество i-мерных граней политопа f, не содержащих вершину $v_{\nu(f)}$. Из (16) выводим

$$P = \bigcup_{f_1 \in F(d-1,P)} \cdots \bigcup_{f_d \in F(0,f_{d-1})} \mathrm{conv}(v_1, v_{\nu(f_1)}, \ldots, v_{\nu(f_d)}). \tag{17}$$

Обозначим через $F_k(P)$ множество k-мерных граней политопа P. Разбив каждую грань из $F_k(P)$ по формуле (17), получим разбиение $F_k(P)$ на k-мерные симплексы

$$F_k(P) = \bigcup_{f_1 \in F_k(P)} \cdots \bigcup_{f_{k+1} \in F(0,f_k)} \mathrm{conv}(v_{\nu(f_1)}, \ldots, v_{\nu(f_{k+1})}). \tag{18}$$

Для оценки числа симплексов в правых частях формул (17), (18) ограничимся простыми политопами (политоп размерности d называется *простым*, если каждая его вершина принадлежит ровно d граням размерности $d-1$).

Лемма 1. *Если P — простой d-мерный политоп, то число симплексов в правых частях формул* (17) *и* (18) соответственно не превосходит $d!|V(P)|$ и $\frac{d!}{(d-k)!}|V(P)|$.

Доказательство. Каждому симплексу из разбиения (17) соответствует последовательность граней $f_1, f_2, \ldots, f_d$, каждая из которых вложена в предыдущую ($f_i \in F(d-i, f_{i-1})$, где $i = 1, \ldots, d$ и $f_0 = P$). Каждая i-мерная грань простого политопа P является пересечением ровно $d-i$ граней размерности $d-1$. Следовательно, цепочке $f_1 \supset f_2 \supset \ldots \supset f_d$ взаимно однозначно соответствует упорядоченная последовательность $(d-1)$-мерных граней $h_1, \ldots, h_d$ такая, что $f_1 = h_1$, $f_2 = h_1 \cap h_2, \ldots$, $f_d = h_1 \cap \ldots \cap h_d$. Так как грани $h_1, \ldots, h_d$ политопа P вершиной $v_{\nu(f_d)}$ определяются однозначно с точностью до порядка, то число различных последовательностей вложенных граней, а значит, и симплексов в правой части формулы (17) не более $d!|V(P)|$. Так как каждая грань политопа P является простым политопом, то число симплексов в разбиении (18) не превосходит $\sum\limits_{f \in F_k(P)} k!|V(f)|$. Каждая вершина простого политопа принадлежит ровно $\binom{d}{k}$ его k-мерным граням. Следовательно, $\sum\limits_{f \in F_k(P)} |V(f)| = \binom{d}{k}|V(P)|$. Поэтому число симплексов в разбиении (18) не больше $\frac{d!}{(d-k)!}|V(P)|$. Лемма 1 доказана.

Для d-мерного политопа P существует сколь угодно «близкий» простой политоп P' с тем же числом $(d-1)$-мерных граней. Разбиение P'

на симплексы индуцирует разбиение P, возможно, содержащее симплексы размерности меньше d. Поскольку число вершин d-мерного политопа, заданного системой m неравенств, не превосходит $\xi(d,m)$ (см. [1]), существует разбиение политопа не более чем на $d!\xi(d,m)$ симплексов. Аналогично, существует разбиение k-мерных граней политопа не более чем на $\frac{d!}{(d-k)!}\xi(d,m)$ симплексов.

Для произвольного симплекса S из разбиения (17) получим верхнюю оценку числа вершин в S_I. Пусть S является выпуклой оболочкой вершин $v_1,\dots,v_{d+1}$ политопа P. Обозначим через γ_i общий знаменатель компонент точки v_i, где $i\in[1,d+1]$. Построим матрицу $G\in\mathbb{Z}^{(d+1)\times(d+1)}$, образованную столбцами $\binom{\gamma_i v_i}{\gamma_i}$. Элементы матрицы G по модулю не превосходят величины Δ, равной максимуму из абсолютных значений миноров порядка $d+1$ матрицы $\begin{pmatrix} -A & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. По неравенству Адамара $|\det G|\leqslant (d+1)^{(d+1)/2}\Delta^{d+1}$. Положим

$$M=\{y\in\mathbb{Z}^{d+1}\mid y\geqslant 0,\ Gy\equiv 0 \pmod{|\det G|},\ \sum_{i=1}^{d+1}\gamma_i y_i=|\det G|\}.$$

Между вершинами S_I и $\operatorname{conv}(M)$ имеется взаимно однозначное соответствие и $|V(S_I)|=|V(M)|$. Для оценки $|V(M)|$ воспользуемся неравенством (15) при $\psi=|\det G|$. Получим неравенство

$$\begin{aligned}|V(S_I)|&\leqslant (d+1)\log_2(2(d+1))(1+\log_2(2+|\det G|))^{d-1}\\ &\leqslant (d+1)^{d+1}(1+0,5\log_2(d+1)+\log_2\Delta)^{d-1}.\end{aligned}$$

Тем самым установлена верхняя оценка

$$|V(P_I)|\leqslant (d+1)^{d+1}d!\xi(d,m)(1+0,5\log_2(d+1)+\log_2\Delta)^{d-1}. \tag{19}$$

Так как $\Delta\leqslant 2^l$, где l — размер входа системы, то из (19) следует, что $|V(P_I)|\leqslant(d+1)^{d+1}d!\xi(d,m)(1+0,5\log_2(1+d)+l)^{d-1}$. При фиксированной размерности d правая часть этого неравенства представляет собой полином от m и l, старший член которого равен $m^{\lceil\frac{d}{2}\rceil}l^{d-1}$. Заметим, что при фиксированной размерности d правая часть (4) представляет собой полином, старший член которого равен $m^d l^{d-1}$.

Следующее утверждение (ср. [5]) позволяет использовать оценку (19) для полиэдра, заданного системой уравнений и неравенств.

Лемма 2. *Пусть* $A\in\mathbb{Z}^{m\times d}$ *и строки матрицы* C *образуют базис решётки целых решений уравнения* $Ax=0$*. Тогда найдётся* $\beta\in\mathbb{Z}$ *такое,*

что для любого m-элементного подмножества $J \subset [1, d]$ выполняется равенство $\det A_J = (-1)^J \beta \det C_{\bar{J}}$.

Пусть $P = \{x \mid Ax \leqslant b\}$, где $A \in R^{m\times d}$, $b \in R^m$ и $\operatorname{rank} A = d$. В [15] верхняя оценка числа вершин P_I выражена через метрические характеристики политопа. В качестве таких характеристик рассматриваются его диаметр $D(P)$ и объём $\operatorname{vol}(P)$. Не уменьшая общности можно считать, что $0 \in P$.

Для неравенства $ax \leqslant \beta$, где $a \in R^d$ и $\beta \in R$, определим три конечных множества

$$M_1 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^d,\ ax < \beta,\ |x|_\infty \leqslant D(P)\},$$
$$M_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^d,\ ax > \beta,\ |x|_\infty \leqslant D(P)\},$$
$$M_3 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^d,\ ax = \beta,\ |x|_\infty \leqslant D(P)\}.$$

Построим конус K, образованный векторами из $y \in R^{d+1}$, удовлетворяющими неравенствам $(x, -1)y < 0$ при $x \in M_1$, $(x, -1)y > 0$ при $x \in M_2$, и $(x, -1)y = 0$ при $x \in M_3$. Конус K не пуст, поскольку $(a, \beta) \in K$. Нетрудно убедиться, что в K найдётся вектор $(a', \beta') \in \mathbb{Z}^{d+1}$, компоненты которого по абсолютной величине не превосходят $d^{(d+2)/2}D(P)^d$. Неравенство $a'x \leqslant \beta'$ назовём приближением к неравенству $ax \leqslant \beta$.

Все неравенства, определяющие P, заменим на их приближения и добавим $2d$ неравенств $-d(P) \leqslant x_i \leqslant d(P)$. В результате получим полиэдр P', заданный системой $m + 2d$ неравенств с целочисленными коэффициентами, что $P_I = P'_I$. Учитывая, что $\Delta \leqslant (d+1)^{(d+1)(d+3)/2}D(P)^{d(d+1)}$, из неравенства (19) получаем

$$|V(P_I)| \leqslant (d+1)^{3d-1} d!\xi(d, m+2d)(1 + \log_2(d+1) + \log_2 D(P))^{d-1}. \quad (20)$$

Оценим $|V(P_I)|$ через объём, предполагая, что размерности полиэдров P и P_I равны. Выберем симплекс S наибольшего объёма с вершинами из P_I. Пусть $v_0, \dots, v_d$ — вершины этого симплекса. Положим $B = (v_1 - v_0, \dots, v_d - v_0)$. Объём симплекса S равен $|\det B|/d!$ и не превосходит $\operatorname{vol}(P)$. Следовательно, $|\det B| \leqslant d!\operatorname{vol}(P)$. Компоненты матрицы B — целые числа, и её можно представить в виде $B = UH$, где U — унимодулярная матрица, а H — эрмитова форма матрицы B. Элементы эрмитовой формы матрицы не превосходят её определителя, т. е. $|\det B|$. Не нарушая общности можно считать, что $U = E$ и $v_0 = 0$ (иначе сделаем унимодулярную замену переменных $x' = v_0 + Ux$) и $H = B$. Для $y \in P_I$ компоненты вектора $B^{-1}y$ по абсолютному значению не больше 1 (иначе симплекс S не максимального объёма). Так как все элементы матрицы B не превосходят по абсолютной величине $|\det B|$, то

$|y| = |B(B^{-1}y)| \leqslant d^{0,5}|\det B| \leqslant d^{0,5} \cdot d!\mathrm{vol}(P)$. Тем самым получена верхняя оценка диаметра множества P_I. Воспользовавшись (20), имеем

$$|V(P_I)| \leqslant (d+1)^{3d-1} d!\xi(d, m+2d)(1 + d\log_2(d+1) + \log_2 \mathrm{vol}(P))^{d-1}. \quad (21)$$

Полученные верхние оценки переносятся на частично целочисленный случай. Пусть $P = \{x \mid Ax \leqslant b\}$, где $A \in \mathbb{Z}^{m\times d}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ и rank $A = d \leqslant m$, $k \in [1, d]$. Вершины частично целого политопа $P_{k\times(d-k)}$ принадлежат k-мерным граням политопа P. Пусть J — множество, состоящее из $d-k$ номеров линейно независимых неравенств, обращающихся в равенство на k-мерной грани f полиэдра P. При построении вершин частично целого политопа $P_{k\times(d-k)}$ достаточно ограничиться рассмотрением только тех k-мерных граней f, для которых матрица $A^J_{[k+1,d]}$ невырожденная. Это позволяет выразить нецелые координаты через целые и затем свести исходную задачу к подсчету числа вершин k-мерного целого политопа. Для грани f система неравенств, определяющих k-мерный целый политоп P_f, задаётся следующим образом:

$$(A^{\bar J}_{[1,k]} - A^{\bar J}_{[k+1,d]}(A^J_{[k+1,d]})^{-1}A^J_{[1,k]})y \leqslant b^{\bar J} - A^{\bar J}_{[k+1,d]}(A^J_{[k+1,d]})^{-1}b^J.$$

Разобьём политоп P_f на k-мерные симплексы по формуле (17). Пусть симплекс S из этого разбиения является выпуклой оболочкой вершин $v_1, \ldots, v_{k+1}$ политопа P_f. Обозначим через γ_i общий знаменатель компонент точки v_i, где $i \in [1, k+1]$. Построим матрицу $G \in \mathbb{Z}^{(k+1)\times(k+1)}$, образованную столбцами $\binom{\gamma_i v_i}{\gamma_i}$. Элементы матрицы G по абсолютной величине не превосходят величины Δ, равной максимуму из абсолютных значений миноров порядка $d+1$ матрицы $\begin{pmatrix} -A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. По неравенству Адамара $|\det G| \leqslant (k+1)^{(k+1)/2}\Delta^{k+1}$. Положим

$$M = \{y \in \mathbb{Z}^{k+1} \mid y \geqslant 0,\ Gy \equiv 0 \pmod{|\det G|},\ \sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i y_i = |\det G|\}.$$

Между вершинами S_I и $\mathrm{conv}(M)$ имеется взаимно однозначное соответствие, поэтому $|V(S_I)| = |V(M)|$. Для оценки величины $|V(M)|$ воспользуемся неравенством (15) при $\psi = |\det G|$. Получим неравенство

$$\begin{aligned}|V(S_I)| &\leqslant (k+1)\log_2(2(k+1))(1 + \log_2(2 + |\det G|))^{k-1} \\ &\leqslant (k+1)^{k+1}(1 + 0,5\log_2(k+1) + \log_2\Delta)^{k-1}.\end{aligned}$$

Полученная верхняя оценка справедлива для любого симплекса из правой части разбиения k-мерных граней полиэдра P по формуле (18). По лемме 1 число симплексов в разбиении не превосходит $\frac{d!}{(d-k)!}\xi(d,m)$. Следовательно,

$$|V(P_{k\times(d-k)})| \leqslant (k+1)^{k+1}\frac{d!}{(d-k)!}\xi(d,m)(1+0,5\log_2(k+1)+\log_2\Delta)^{k-1}. \quad (22)$$

Эта оценка с помощью леммы 2 распространяется на полиэдры, заданные системами линейных уравнений и неравенств.

Пусть $P = \{x \mid Ax \leqslant b\}$, где $A \in R^{m\times d}$, $b \in R^m$ и $\operatorname{rank} A = d$. Выразим верхнюю оценку числа вершин $P_{k\times(d-k)}$ через диаметр $D(P)$ полиэдра P. Построим разбиение k-мерных граней полиэдра P на симплексы $S_1,\dots,S_r$ по формуле (18). Тогда $r \leqslant \frac{d!}{(d-k)!}\xi(d,m)$. Пусть S — симплекс из данного разбиения. Поскольку он лежит на k-мерной грани полиэдра P, то найдётся $d-k$ неравенств, обращающихся в равенство в любой точке этого симплекса. Пусть J — множество номеров этих неравенств и $\det A^J_{[k+1,d]} \neq 0$. Формула $x^{[k+1,d]} = (A^J_{[k+1,d]})^{-1}(b^J - A^J_{[1,k]}x^{[1,k]})$ устанавливает биекцию между точками из $S_{k\times(d-k)}$ и целочисленными точками некоторого k-мерного симплекса $S' \subset R^k$. Поскольку диаметр симплекса S' не превышает $D(P)$, из неравенства (20) получаем

$$|V(S'_I)| \leqslant (k+1)^{3k-1}k!\xi(k,3k+1)(1+\log_2(k+1)+\log_2 D(P))^{k-1}.$$

Таким образом,

$$|V(P_{k\times(d-k)})| \leqslant \frac{d!}{(d-k)!}\xi(d,m)\gamma, \quad (23)$$

где γ равно правой части предыдущего неравенства. Из [14] следует, что оценки (19)–(21) неулучшаемы по порядку при фиксированной размерности d, а оценки (22), (23) неулучшаемы по порядку при фиксированном k.

4. Нижняя оценка среднего числа вершин

Приводимая ниже оценка является уточнением соответствующего результата из [2].

Рассмотрим класс K_Δ, образованный полиэдрами $P = \{x \mid E_a x \leqslant b\}$, где $E_a = \begin{pmatrix} \Delta & a_1 & \dots & a_{d-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица порядка d,

$0 \leqslant b_1 < \Delta$, $b_i = 0$ при $2 \leqslant i \leqslant d$ и $0 \leqslant a_i < \Delta$ при $1 \leqslant i \leqslant d-1$. Обозначим через $\delta(p)$ число целых полиэдров $P_I \in K_\Delta$, в которых p является вершиной. *Средним числом вершин* в K_Δ назовём величину

$$\sigma(\Delta) = \frac{1}{|K_\Delta|} \sum_{P \in K_\Delta} |V(P_I)| = \frac{1}{\Delta^{d-1}} \sum_p \delta(p). \tag{24}$$

Пусть $A \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ — невырожденная матрица. Рассмотрим полиэдры $P = \{x \mid Ax \leqslant b\}$ и $T = \{t \geqslant 0 \mid t = b - Ax\}$. Формула $t = b - Ax$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между вершинами в P_I и T_I.

Теорема 4. *Если система*

$$-p \leqslant Ax \leqslant (d-1)p,\ x \in \mathbb{Z}^d \tag{25}$$

имеет только нулевое решение, то p — вершина в T_I.

Доказательство. Пусть $J = \{j \mid p_j \neq 0\}$, f — вектор с компонентами

$$f_i = \begin{cases} \prod\limits_{j \in J \setminus \{i\}} p_j \text{ при } i \in J, \\ d \prod\limits_{j \in J} p_j + 1 \text{ при } i \notin J. \end{cases}$$

Из (25) следует, что для каждого $q \in T \cap \mathbb{Z}^d \setminus \{p\}$ существует i такое, что $q_i > dp_i$. Следовательно, $f^T q > f^T p$, поэтому p является вершиной. Для каждого $c \in \{t \in \mathbb{Z}^d \mid -p \leqslant t \leqslant (d-1)p\}$ число совместных в целых числах систем уравнений

$$\Delta y_1 + a_1 y_2 + \ldots + a_{d-1} y_d = c_1,\ y_i = c_i\,, i \in \{2, .., d\}$$

равно числу решений системы

$$c_2 u_2 + \ldots + c_d u_d \equiv c_1 \pmod{\Delta},\ 0 \leqslant u_i \leqslant \Delta - 1,\ 2 \leqslant i \leqslant d,$$

т. е. числу $\rho\Delta^{d-2}$, где $\rho = \text{НОД}(\Delta, c_2, .., c_d)$, если ρ делит c_1, и равно 0 в противном случае [6]. Пусть

$$S_\rho = \{(x_2, \ldots, x_d) \mid -p_j \leqslant x_j \leqslant (d-1)p_j, 2 \leqslant j \leqslant d \\ \text{НОД}(\Delta, x_2, \ldots, x_d) = \rho\}.$$

Не уменьшая общности, считаем, что $p_1 \geqslant p_i\,(i = 2, \ldots, d)$. При фиксированном p число матриц E_a таких, что система (25) имеет ненулевое

решение, не превышает

$$\sum_{\rho} |S_\rho| \rho \Delta^{d-2} (\frac{dp_1}{\rho} + 1) \leqslant 2d^d \Delta^{d-2} \prod_{i=1}^{d} (p_i + 1).$$

Следовательно, $\delta(p) \geqslant \Delta^{d-2}(\Delta - 2d^d \prod\limits_{i=1}^{d}(p_i + 1))$. Суммируя (24) по тем p, для которых выполняется неравенство

$$\prod_{i=1}^{d} (p_i + 1) \leqslant \frac{\Delta}{4d^d},$$

получим нижнюю оценку для среднего числа вершин в классе K_Δ :

$$\sigma(\Delta) \geqslant \frac{ln^{d-1}(\Delta/(4d^d))}{4(d-1)!d^d}.$$

Из этого неравенства следует, что нельзя понизить степени полиномов в правой части неравенства (2) (ср. [21]). Изложенный здесь подход применён в [14] к одному классу полиэдров, заданных системой $m > d$ неравенств.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бренстед А.** Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988.
2. **Веселов С. И.** Нижняя оценка среднего числа неприводимых и крайних точек в двух задачах дискретного программирования // Горьковский гос. ун-т. М.: 1984, 8 с. Депонировано в ВИНИТИ, № 619–В84.
3. **Веселов С. И.** Нахождение выпуклой оболочки целых точек полиэдра на плоскости // Горьковский гос. ун-т. М.: 1988, 12 с. Депонировано в ВИНИТИ, № 8624–В88.
4. **Веселов С. И., Шевченко В. Н.** О числе экстремальных точек квадратной системы линейных неравенств // Горьковский гос. ун-т. М.: 1979, 10 с. Депонировано в ВИНИТИ, № 450–79.
5. **Веселов С. И., Шевченко В. Н.** Оценки минимального расстояния между точками некоторых целочисленных решеток // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьковский гос. ун-т, 1980. С. 26–33.
6. **Виноградов И. М.** Основы теории чисел. М.: Наука, 1972.
7. **Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.** Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.

8. **Клейн Ф.** Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. М.: Наука, 1987.
9. **Препарата Ф., Шеймос М.** Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989.
10. **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 2. М.: Мир, 1991.
11. **Ху Т.** Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.
12. **Чирков А. Ю.** О числе крайних точек в задаче целочисленного линейного программирования // Комбинаторно-алгебраические методы в дискретной оптимизации. Нижний Новгород: Нижегородский гос. университет, 1991. С. 157–159.
13. **Чирков А. Ю.** Теорема Каратеодори и покрытие многогранника симплексами // Нижегородский гос. ун-т. М.: 1993, 12 с. Депонировано в ВИНИТИ № 668–В93.
14. **Чирков А. Ю.** О нижней оценке числа вершин выпуклой оболочки целочисленных и частично целочисленных точек полиэдра // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 2. С. 80–89.
15. **Чирков А. Ю.** О связи числа вершин выпуклой оболочки целочисленных точек полиэдра с его метрическими характеристиками// Труды 2-й международной конференции "Математические алгоритмы Нижний Новгород 1997. С. 169–174.
16. **Чирков А. Ю., Шевченко В. Н.** О числе вершин выпуклой оболочки пересечения полиэдра с целочисленной решеткой // Нижегородский гос. ун-т. М.: 1993, 12 с. Депонировано в ВИНИТИ № 2165–В93.
17. **Шевченко В. Н.** О числе крайних точек в целочисленном программировании // Кибернетика. 1981. № 2. С. 133–134.
18. **Шевченко В. Н.** Алгебраический подход в целочисленном программировании // Кибернетика. 1984. № 4. С. 36–41.
19. **Шевченко В. Н.** Верхние оценки числа крайних точек в целочисленном программировании // Математические вопросы кибернетики. Вып. 4. М.: Наука, 1992. С. 65–72.
20. **Шевченко В. Н.** Качественные вопросы целочисленного программирования.М.: Физматлит, 1995.
21. **Barany I.,Howe R., Lovasz L.** On integer points in polyhedra: a lower bound // Combinatorica. 1992. V. 12, N 2. P. 135–142.
22. **Cook W., Gerards A. M. H., Schrijver A., Tardos E.** Sensitivity theorems in integer linear programming // Mathematical Programming. 1986. V. 34, N 3. P. 251–264.
23. **Cook W., Hartmann M., Kannan R., McDiarmid C.** On integer points in polyhedra // Combinatorica. 1992. V. 12, N 1. P. 27–37.

24. Hayes A. C., Larman D. G. The vertices of the knapsack polytope // Discrete Applied Math. 1983. V. 6, N 2. P. 135–138.

25. Morgan D. A. Upper and lower bound results on the convex hull of integer points in polyhedra // Mathematika. 1991. V. 38, N 2. P. 321–328.

26. Rubin D. S. On the unlimited number of faces in integer hulls of linear programs with a single constraint // Operations Research. 1970. V. 18, N 5. P. 940–945.

Адрес авторов:

Нижегородский гос. университет,
фак-т вычислит. матем. и кибернетики,
пр. Гагарина, 23,
603950 Нижний Новгород,
Россия.
E-mail: vesi@uic.nnov.ru

Статья поступила
28 ноября 2006 г.
Переработанный вариант —
24 августа 2007 г.