ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2007. Серия 2. Том 14, № 2. 32–40

УДК 519.8

ОБ ОДНОМ ТИПЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ

А. Г. Воденников, В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин

Рассматривается многокритериальный вариант известной комбинаторной задачи размещения центров обслуживания. Получены такие необходимые и достаточные условия устойчивости к возмущениям входных параметров, при выполнении которых не исчезают парето-оптимальные решения исходной задачи.

Введение

Анализу чувствительности векторных и скалярных задач дискретной оптимизации относительно возмущений параметров посвящена обширная литература (см., например, монографии [15, 16, 18] и обзоры [10, 17, 21, 23, 25]). Большинство результатов, полученных в этом направлении, связано с количественными характеристиками и с критериями различных типов устойчивости линейных задач. Значительно меньше исследована устойчивость дискретных задач с нелинейными частными критериями, хотя в последнее время появился ряд публикаций в этом направлении (см., например, [2–5, 7, 8, 14, 22, 25]). В данной статье рассматривается векторный вариант известной комбинаторной минимаксной задачи о размещении центров обслуживания. Продолжая цикл исследований, посвящённый качественным характеристикам устойчивости векторных комбинаторных задач и отражённый в [8, 9, 12], здесь в терминах бинарных отношений получено необходимое и одновременно достаточное условие того типа устойчивости задачи, который является дискретным аналогом полунепрерывности снизу по Хаусдорфу многозначного отображения, задающего паретовскую функцию выбора.

1. Постановка задачи, определения, обозначения и свойства

На практике постоянно возникают задачи «наилучшего» размещения оборудования или средств обслуживания. Такие задачи часто формулируются как экстремальные задачи на графах и сетях. В частности, если граф представляет сеть дорог, а вершины соответствуют отдельным

районам, то можно сформулировать задачи оптимального размещения больниц, пожарных частей и многих других необходимых предприятий и служб. Критерием оптимальности может служить минимизация расстояний (время проезда и другие затраты) от пункта обслуживания до самой отдаленной вершины графа, т. е. оптимизация «наихудшего варианта». В наиболее общем случае необходимо оптимально разместить несколько центров обслуживания. Например, в задачах размещения аварийных служб требуется минимизировать наибольшее расстояние от произвольного потребителя до ближайшего к нему пункта обслуживания (центра). При наличии нескольких таких критериев затрат, которые желательно минимизировать, возникает векторный вариант задачи о размещении центров обслуживания, для формальной постановки которой введём следующие обозначения:

$N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ – *множество* возможных *пунктов* (центров) *размещения* поставщиков (оборудования, складов, средств обслуживания и т. п.);

N_n – *места расположения потребителей* (клиентов);

c_{ijk} – *затраты*, связанные с доставкой требуемого количества продукта из пункта $i \in N_m$ в пункт $j \in N_n$ по критерию $k \in N_s$.

Наряду с трёхиндексной матрицей $C = (c_{ijk})$ размера $m \times n \times s$ с элементами из $\mathbb{R}$ будем использовать и её двухмерные сечения $C_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $k \in N_s$.

Пусть на множестве T непустых подмножеств (траекторий) $T \subset 2^{N_m}$, $|T| \geqslant 2$, задана вектор-функция

$$f(t, C) = (f_1(t, C_1), f_2(t, C_2), \ldots, f_s(t, C_s)),$$

частными критериями которой являются критерии «узкого места»

$$f_k(t, C_k) = \max_{j\in N_n} \min_{i\in t} c_{ijk} \to \min_{t\in T},\ k \in N_s.$$

Под *s-критериальной задачей размещения центров* $Z^s(C)$ будем понимать задачу нахождения *множества Парето* (*множества эффективных траекторий*) $P^s(C) = \{t \in T \mid \forall t' \in T \setminus \{t\} \quad (t \underset{C}{\not\succ} t')\}$, где

$$t \underset{C}{\succ} t' \Leftrightarrow f(t, C) \geqslant f(t', C) \ \&\ f(t, C) \neq f(t', C),$$

а знак $\underset{C}{\not\succ}$ означает отрицание отношения $\underset{C}{\succ}$. Поскольку $1 < |T| < \infty$, множество $P^s(C)$ непусто при любой матрице $C \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$.

Если $s = 1$ и для любой траектории $t \in T$ выполняется равенство $|t| = p$, где p – целое число, удовлетворяющее неравенствам $1 \leqslant p \leqslant m-1$, то рассматриваемая задача превращается в широко известную задачу о p-центре (p-center problem) (см., например, [14, 20]).

Возмущения параметров векторного критерия $f(t, C)$ будем осуществлять путём сложения матрицы C с матрицами множества

$$\Omega(\varepsilon) = \{C' \in \mathbb{R}^{m \times n \times s} \ \mid \ ||C'|| < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0,\ ||C'|| = \max\{|c'_{ijk}| \mid (i,j,k) \in N_m \times N_n \times N_s\},\ C' = (c'_{ijk})$.

Задачу $Z^s(C + C')$, где $C' \in \Omega(\varepsilon)$, полученную из исходной задачи $Z^s(C)$, будем называть *возмущённой*, а матрицу C' – *возмущающей*.

В соответствии с [5, 6, 9, 10, 11, 12, 20] под *квазиустойчивостью* задачи $Z^s(C)$ будем понимать тот тип устойчивости, при котором гарантируется существование такой окрестности исходных данных в пространстве параметров задачи, что любая возмущённая задача с параметрами из этой окрестности имеет множество Парето, содержащее все эффективные решения первоначальной задачи. Следовательно, задача $Z^s(C)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда существует такое число $\varepsilon > 0$, что при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega(\varepsilon)$ имеет место включение $P^s(C) \subseteq P^s(C + C')$.

Для любой траектории t и любого индекса $k \in N_s$ положим

$$N_k(t, C_k) = \{(p,q) \in t \times N_n \mid f_k(t, C_k) = \max_{j \in N_n} \min_{i \in t} c_{ijk} = c_{pqk}\}.$$

Легко видеть, что $f_k(t, C_k) = c_{pqk}$ при $(p,q) \in N_k(t, C_k)$.

Для каждой матрицы $C \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$ введём два бинарных отношения между любыми различными траекториями t и t' по правилам

$$t \underset{C}{\sim} t' \ \Leftrightarrow \ N_k(t, C_k) = N_k(t', C_k),\ k \in N_s,$$

$$t \underset{C}{\equiv} t' \ \Leftrightarrow \ f(t, C) = f(t', C).$$

Ясно, что эти отношения симметричны. Кроме того, нетрудно проверить, что справедливо следующее

Свойство 1. *Если* $t \underset{C}{\sim} t'$, *то* $t \underset{C}{\equiv} t'$.

Учитывая непрерывность в $\mathbb{R}^{m \times n}$ функций $f_k(t, C_k)$ при любом $k \in N_s$, легко понять, что верно следующее

Свойство 2. *Если* $t \underset{C}{\sim} t'$, *то существует такое число* $\varepsilon > 0$, *что* $t \underset{C+C'}{\sim} t'$ *для любой матрицы* $C' \in \Omega(\varepsilon)$.

2. Лемма

Для вывода критерия квазиустойчивости задачи нам понадобится следующий вспомогательный результат.

Лемма. *Пусть траектории* $t, t' \in P^s(C)$ *таковы, что* $t \underset{C}{\equiv} t'$, *а отношение* $t \underset{C}{\sim} t'$ *не выполняется. Тогда для любого числа* $\varepsilon > 0$ *в* $\Omega(\varepsilon)$ *найдётся такая возмущающая матрица* C^*, *что* $P^s(C) \not\subseteq P^s(C + C^*)$.

Доказательство. Так как отношение $t \underset{C}{\sim} t'$ не выполняется, то существует индекс $l \in N_s$ такой, что $N_l(t, C_l) \neq N_l(t', C_l)$. Поэтому, не ограничивая общности, будем полагать, что в $N_l(t, C_l) \setminus N_l(t', C_l)$ найдётся пара (p^0, q^0). Положив $\varepsilon > 0$, рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Существует такое число $p' \in t'$, что $(p', q^0) \in N_l(t', C_l)$. Тогда, построив элементы возмущающей матрицы $C^* = (c^*_{ijk}) \in \Omega(\varepsilon)$ размера $m \times n \times s$ по правилу

$$c^*_{ijk} = \begin{cases} -\alpha, & \text{если } (i,j) = (p^0, q^0),\ k = l, \\ -\alpha, & \text{если } i \in t,\ j \in N_n \setminus \{q^0\},\ k = l, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 < \alpha < \varepsilon$, и учитывая соотношение $t \underset{C}{\equiv} t'$, получаем

$$\begin{aligned} f_l(t', C_l + C^*_l) &= c_{p'q^0l} = f_l(t', C_l) = f_l(t, C_l) \\ &= c_{p^0q^0l} > c_{p^0q^0l} - \alpha = f_l(t, C_l + C^*_l), \\ f_k(t', C_k + C^*_k) &= f_k(t', C_k) = f_k(t, C_k) = f_k(t, C_k + C^*_k) \text{ при } k \neq l. \end{aligned}$$

Поэтому $t' \underset{C+C^*}{\succ} t$, т. е. $t' \notin P^s(C + C^*)$.

Случай 2. Для любого числа $i \in t'$ пара $(i, q^0) \notin N_l(t', C_l)$. Тогда, задав элементы возмущающей матрицы $C^* = (c^*_{ijk}) \in \Omega(\varepsilon)$ размера $m \times n \times s$ по формуле

$$c^*_{ijk} = \begin{cases} \alpha, & \text{если } i \in t,\ j = q^0,\ k = l, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 < \alpha < \varepsilon$, ввиду $t \underset{C}{\equiv} t'$ имеем

$$\begin{aligned} f_l(t, C_l + C^*_l) &= c_{p^0q^0l} + \alpha > c_{p^0q^0l} = f_l(t, C_l) = f_l(t', C_l) = f_l(t', C_l + C^*_l), \\ f_k(t, C_k + C^*_k) &= f_k(t, C_k) = f_k(t', C_k) = f_k(t', C_k + C^*_k) \text{ при } k \neq l. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что $t \underset{C+C^*}{\succ} t'$, т. е. $t \notin P^s(C + C^*)$. Лемма доказана.

3. Необходимые и достаточные условия

Теорема 1. *Для того, чтобы s-критериальная задача $Z^s(C)$, $s \geqslant 1$, была квазиустойчива, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух траекторий $t, t' \in P^s(C)$ выполнялась импликация*

$$t \underset{C}{\equiv} t' \Rightarrow t \underset{C}{\sim} t'.$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $t \in P^s(C)$ и траектория $t' \neq t$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $t \underset{C}{\equiv} t'$. Тогда $t' \in P^s(C)$ и траектории t и t' таковы, что $t \underset{C}{\sim} t'$. Поэтому по свойству 2 существует такое число $\varepsilon(t') > 0$, что $t \underset{C+C'}{\sim} t'$ для любой матрицы C' из $\Omega(\varepsilon(t'))$. Отсюда в силу свойства 1 получаем $t \underset{C+C'}{\equiv} t'$. Таким образом,

$$t \underset{C+C'}{\not\succ} t' \text{ при любой матрице } C' \in \Omega(\varepsilon(t')). \tag{1}$$

Случай 2. Отношение $t \underset{C}{\equiv} t'$ не выполняется. Тогда существует такой индекс $l \in N_s$, что $f_l(t, C_l) < f_l(t', C_l)$. Поэтому в силу непрерывности функции $f_k(t, C_l)$ в $\mathbb{R}^{m \times n}$ найдётся такое число $\varepsilon(t') > 0$, что справедлива формула (1).

Из (1) следует, что всякая траектория t из $P^s(C)$ остаётся эффективной в любой возмущённой задаче $Z^s(C + C')$, $C' \in \Omega(\varepsilon)$, если $\varepsilon = \min\{\varepsilon(t') \mid t' \neq t\}$. Следовательно, задача $Z^s(C)$ квазиустойчива.

Необходимость. Пусть задача $Z^s(C)$ квазиустойчива. Предположим, что вопреки утверждению теоремы найдутся такие траектории $t, t' \in P^s(C)$ и $t \underset{C}{\equiv} t'$, что отношение $t \underset{C}{\sim} t'$ не выполняется. Тогда из леммы следует, что задача $Z^s(C)$ не является квазиустойчивой. Противоречие. Теорема 1 доказана.

Введя *множество Смейла* [24] (*множество строго эффективных траекторий*)

$$S^s(C) = \{t \in P^s(C) \mid \forall t' \in T \setminus \{t\} \quad (f(t, C) \neq f(t', C))\},$$

легко получить следующую эквивалентную формулировку теоремы 1.

Теорема 1′. *При любом $s \geqslant 1$ для векторной задачи $Z^s(C)$ следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *задача $Z^s(C)$ квазиустойчива*;

(ii) $P^s(C) \neq S^s(C) \;\Rightarrow\; \forall t \in P^s(C) \setminus S^s(C) \;\; \forall t' \underset{C}{\equiv} t \quad (t \underset{C}{\sim} t')$.

4. Следствия

Следствие 1. *Равенство $P^s(C) = S^s(C)$ является достаточным условием квазиустойчивости задачи $Z^s(C)$, $s \geqslant 1$.*

Следствие 2. *Если каждое сечение C_k, $k \in N_s$, матрицы $C \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$ состоит из попарно различных элементов, то задача $Z^s(C)$ квазиустойчива.*

Следствие 3. *Если $|P^s(C)| = 1$, $s \geqslant 1$, то задача $Z^s(C)$ квазиустойчива.*

Очевидно, что при $n = 1$ задача $Z^s(C)$, $C \in \mathbb{R}^{m \times s}$, превращается в векторную комбинаторную задачу с частными критериями вида MINMIN. Поэтому из теоремы 1 вытекают также следующие известные результаты.

Следствие 4 [11]. *Для того, чтобы s-критериальная, $s \geqslant 1$, комбинаторная задача с частными критериями вида* MINMIN *была квазиустойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась формула*

$$\begin{aligned}\forall t \in P^s(C) \quad \big(Q^s(t,C) \neq \varnothing \ \Rightarrow \ & \forall t' \in Q^s(t,C) \\ & \forall k \in N_n \quad (f_k(t' \setminus t, C_k) > f_k(t, C_k))\big),\end{aligned}$$

где $Q^s(t,C) = \{t' \in T \setminus \{t\} \mid t \underset{C}{\equiv} t'\}$, $f_k(\varnothing, C_k) = +\infty$.

Следствие 5 [1]. *Достаточным условием квазиустойчивости s-критериальной, $s \geqslant 1$, комбинаторной задачи с частными критериями вида* MINMIN *является совпадение множеств $P^s(C)$ и $S^s(C)$.*

5. Примеры

Приведём несколько примеров, иллюстрирующих изложенные выше результаты. Сначала рассмотрим пример, в котором множества $P^s(C)$ и $S^s(C)$ совпадают.

Пример 1. Пусть $m = 3$, $n = s = 2$, $T = \{t_1, t_2, t_3\}$, $t_1 = \{1\}$, $t_2 = \{2\}$, $t_3 = \{3\}$, и пусть матрица $C = (c_{ijk}) \in \mathbb{R}^{3 \times 2 \times 2}$ состоит из двух сечений C_1, $C_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$, определяемых следующим образом:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(t_1, C) = (1, 1)$, $f(t_2, C) = (2, 2)$, $f(t_3, C) = (3, 3)$, $S^2(C) = P^2(C) = \{t_1\}$. Поэтому в силу следствия 1 задача $Z^2(C)$ квазиустойчива. В этом

легко также убедиться, не используя полученные результаты, поскольку, очевидно, траектория t_1 принадлежит множеству Парето $P^2(C+C')$ при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega(0.5)$.

Следующий пример иллюстрирует ситуацию, когда задача $Z^s(C)$ квазиустойчива, хотя множества $P^s(C)$ и $S^s(C)$ не совпадают.

Пример 2. Пусть $T = \{t_1, t_2, t_3\}$, $t_1 = \{1\}$, $t_2 = \{1, 2\}$, $t_3 = \{3\}$, а матрица C задана таким же образом, как в примере 1. Тогда $f(t_1, C) = f(t_2, C) = (1, 1)$, $f(t_3, C) = (3, 3)$, $\varnothing = S^2(C) \neq P^2(C) = \{t_1, t_2\}$, $t_1 \underset{C}{\equiv} t_2$ и $t_1 \underset{C}{\sim} t_2$. Поэтому согласно теореме 1 задача $Z^2(C)$ квазиустойчива. Однако без использования теоремы 1 легко понять, что при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega(0{,}5)$ имеют место соотношения

$$t_3 \underset{C+C'}{\succ} t_1 \underset{C+C'}{\equiv} t_2,$$

из которых следует включение $P^2(C) \subseteq P^2(C + C')$ для любой матрицы $C' \in \Omega(0{,}5)$, а это свидетельствует о квазиустойчивости задачи $Z^2(C)$.

Наконец, приведём пример, в котором задача $Z^s(C)$ не является квазиустойчивой и множества $P^s(C)$ и $S^s(C)$ не совпадают.

Пример 3. Пусть $T = \{t_1, t_2, t_3\}$, $t_1 = \{1\}$, $t_2 = \{2\}$, $t_3 = \{1, 2, 3\}$, а C – матрица из примера 1. Тогда $f(t_1, C) = f(t_3, C) = (1, 1)$, $f(t_2, C) = (2, 2)$, $\varnothing = S^2(C) \neq P^2(C) = \{t_1, t_3\}$. Задав элементы матрицы $C^* \in \mathbb{R}^{3\times2\times2}$ по формуле

$$c^*_{ijk} = \begin{cases} -\varepsilon, & \text{если } i = 3,\ j = k = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где ε – произвольное положительное число, нетрудно убедиться в справедливости соотношения $t_1 \underset{C+C^*}{\succ} t_3$. Поэтому $||C^*|| = \varepsilon$, $t_1 \notin P^2(C + C^*)$, т. е. $P^2(C) \not\subseteq P^2(C + C^*)$. Следовательно, задача $Z^2(C)$ не является квазиустойчивой. Очевидно, что тот же вывод следует и из теоремы 1, поскольку $t_1 \underset{C}{\equiv} t_3$, а отношение $t_1 \underset{C}{\sim} t_3$ не выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гирлих Э., Ковалев М. Н., Кравцов М. К.** Стабильность, устойчивость и квазиустойчивость многокритериальной задачи на системе подмножеств // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 5. С. 111–124.

2. **Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К.** Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1996. Т. 36, № 1. С. 66–72.

3. **Гуревский Е. Е., Емеличев В. А.** Об устойчивости векторной булевой задачи минимизации абсолютных уклонений от нуля линейных функций // Известия вузов. Математика. 2006. № 12. С. 27–32.

4. **Емеличев В. А., Гуревский Е. Е.** Об устойчивости векторной комбинаторной задачи разбиения // Кибернетика и системный анализ. 2007. № 3. С. 177–181.

5. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Анализ чувствительности эффективного решения векторной булевой задачи минимизации проекций линейных функций на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2005. Т. 12, № 2. С. 24–43.

6. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** О квазиустойчивости векторной булевой задачи минимизации пороговых функций // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2005. № 4. С. 55–58.

7. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** О радиусе устойчивости лексикографического оптимума одной векторной задачи булева программирования // Кибернетика и системный анализ. 2005. № 2. С. 71–80.

8. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Леонович А. М.** Об одном типе устойчивости векторной комбинаторной задачи с частными критериями вида Σ-MINMAX и Σ-MINMIN // Известия вузов. Математика. 2004. № 12. С. 17–27.

9. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Леонович А. М.** Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 79–92.

10. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8, № 1. С. 47–69.

11. **Емеличев В. А., Степанишина Ю. В.** Квазиустойчивость векторной нелинейной траекторной задачи с паретовским принципом оптимальности // Изв. вузов. Математика. 2000. № 12. С. 27–32.

12. **Емеличев В. А., Степанишина Ю. В.** Критерий квазиустойчивости векторной траекторной задачи с мажоритарным принципом оптимальности // Кибернетика и системный анализ. 2001. № 5. С. 63–71.

13. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.

14. **Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И.** Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования // Кибернетика и системный анализ. 2006. № 5. С. 63–72.

15. **Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т.** Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наукова думка, 1995.

16. **Сергиенко И. В., Шило В. П.** Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наукова думка, 2003.

17. Сотсков Ю. Н. Исследование устойчивости оптимальных расписаний // Информатика. 2004. № 4. С. 65–75.

18. Сотсков Ю. Н., Сотскова Н. Ю. Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами. Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2004.

19. Daskin M. Network and discrete location. New York: Wiley, 1995.

20. Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P. Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. 2002. V. 51, N 4. P. 645–676.

21. Emelichev V. A., Gurevsky E. E. On quasi-stability of the vector Boolean problem of minimizing absolute deviations of linear functions from zero // Computer Science J. of Moldova. 2006. № 2. P. 207–218.

22. Emelichev V. A., Kuzmin K. G., Nikulin Yu. V. Stability analysis of the Pareto optimal solution for some vector boolean optimization problem // Optimization. 2005. V. 54, N 6. P. 545–561.

23. Greenberg H. J. An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer and combinatorial optimization // Advances in computational and stochastic optimization, logic programming and heuristic search. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1998. P. 97–148.

24. Smale S. Global analysis and economics, V. Pareto theory with constraints // J. Math. Econom. 1974. V 1, N 3. P. 213–221.

25. Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N. Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. 1995. V. 58, N 2. P. 169–190.

Адрес авторов:

Белорусский гос. университет,
пр. Независимости, 4,
220030 Минск,
Беларусь.
E-mail: vag-ner89@mail.ru,
emelichev@bsu.by,
kuzminkg@mail.ru

Статья поступила
17 мая 2007 г.

Переработанный вариант —
22 июня 2007 г.