

УДК 519.8

АЛГОРИТМЫ ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
О ДВУХ КОММИВОЯЖЁРАХ В ПОЛНОМ ГРАФЕ
С ВЕСАМИ РЁБЕР 1 И 2^{*)}

Э. Х. Гимади, Ю. В. Глазков, А. Н. Глебов

Рассматривается задача отыскания двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального суммарного веса в полном неориентированном графе с произвольно приписанными весами рёбер 1 и 2. Основной результат работы — описание полиномиальных алгоритмов с гарантированными оценками точности $26/21$ и $6/5$, наилучшими в настоящее время. Эти алгоритмы основаны на нахождении частичных туров с большим числом рёбер в графах специального вида.

Введение

Одной из модификаций классической задачи коммивояжёра является задача о двух коммивояжёрах, или двух странствующих торговцах, если следовать дословному переводу названия 2-Peripatetic Salesman Problem (2-PSP). Эта задача состоит в отыскании в полном неориентированном графе G со взвешенными рёбрами согласно весовой функции w двух непересекающихся по рёбрам гамильтоновых циклов H_1^* и H_2^* минимального суммарного веса. Она возникает при оптимизации маршрутов обхода городов двумя торговцами и в ряде других приложений. Эту задачу мы будем обозначать через 2-PSP_{\min} , поскольку будем касаться также и задачи максимизации веса циклов. Статья посвящена частному случаю, когда веса рёбер могут принимать лишь значения 1 и 2. Эту задачу обозначим через $2\text{-PSP}_{\min}(1, 2)$.

С тех пор, как задача 2-PSP_{\min} впервые была упомянута в [12], появилось много работ, посвящённых её исследованию. Отметим некоторые из них. В [7] было доказано, что задача о существовании двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов в неориентированном графе

^{*)}Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05-01-00395 и 07-07-00222) и INTAS (проект 04-77-7173).

NP-полна, что влечёт NP-трудность задачи $2\text{-PSP}_{\min}(1, 2)$ (и её общих случаев, например, метрической 2-PSP). В [6] рассматривались некоторые полиномиально разрешимые случаи задачи 2-PSP_{\min} . В [7–9] были предложены и проанализированы некоторые способы нахождения нижних и верхних оценок для применения в методе ветвей и границ. В [10] был представлен полиэдральный подход к решению задачи $m\text{-PSP}$. Для метрической задачи 2-PSP_{\min} (когда веса рёбер удовлетворяют неравенству треугольника) два приближённых алгоритма (для случаев одной и двух весовых функций) представлены в работе [2]. Оценки точности этих алгоритмов асимптотически стремятся к $9/4$ и $12/5$ соответственно. Позднее алгоритм с неасимптотической оценкой точности $9/4$ для задачи с одной весовой функцией был представлен в [5].

Содержание настоящей статьи составляют четыре полиномиальных алгоритма $A_{4/3}$, $A_{5/4}$, $A_{26/21}$ и $A_{6/5}$ для нахождения приближённых решений задачи $2\text{-PSP}_{\min}(1, 2)$, которые имеют гарантированные оценки точности $4/3 \sim 1,33$; $5/4 = 1,25$; $26/21 \sim 1,24$ и $6/5 = 1,2$ соответственно, и подробные доказательства этих оценок. Алгоритм $A_{4/3}$ появился в [5], хотя его обоснование было весьма кратким и доказывалась худшая оценка $197/144$. Авторами этой же работы была предложена структура алгоритма $A_{26/21}$, однако ключевые моменты обоснования остались сформулированными в виде гипотез. В настоящей статье эти алгоритмы описаны полностью, с подробными доказательствами, в том числе и тех утверждений, которые не были доказаны ранее. Важно отметить, что оценки как для $A_{4/3}$, так и для $A_{26/21}$ доказаны лишь для тех входов, на которых оптимум достигает значения $2n$, где n есть число вершин графа. Алгоритм $A_{5/4}$ является простым сведением к задаче на максимум, которое допускает использование $3/4$ -приближённого алгоритма из [2]. Наконец, основным результатом статьи является алгоритм $A_{6/5}$ (для него также доказывается оценка в несколько более общем случае).

Одна из идей, которая используется во многих алгоритмах приближённого решения задач TSP и 2-PSP , состоит в построении гамильтоновых циклов из так называемых частичных туров. *Частичным туром* в неориентированном графе называется множество вершинно непересекающихся цепей, покрывающих все вершины графа (при этом мы для удобства изложения изолированную вершину будем считать цепью длины 0). Иногда для краткости частичный тур будем называть просто туром. Очевидно, что добавлением рёбер к частичному туру можно получить гамильтонов цикл. Если же дана пара непересекающихся туров, или непересекающиеся гамильтонов цикл и тур, то, добавляя рёбра специаль-

ным образом, можно получить пару непересекающихся гамильтоновых циклов. При этом построенная пара циклов тем ближе по весу к оптимальной, чем «лучше» исходные туры. Таким образом, приближённое решение задачи 2-PSP может быть сведено к задаче отыскания подходящих частичных туров. Так или иначе эта идея касается всех четырёх описанных в статье алгоритмов.

Далее через ОПТ обозначается граф $H_1^* \cup H_2^*$, через n — число вершин в G , а через ρ — доля рёбер веса 2 в ОПТ (т. е. число таких рёбер, поделённое на $2n$). При таких обозначениях $\rho \in (0, 1)$ и $w(\text{ОПТ}) = 2n(1 + \rho)$.

1. Процедура дополнения частичного тура до гамильтонова цикла

Как упомянуто во введении, из двух непересекающихся частичных туров или непересекающихся гамильтонова цикла и тура можно получить два непересекающихся по рёбрам гамильтоновых цикла. Так как случай двух туров легко сводится к случаю гамильтонова цикла и тура, то мы описываем здесь только последний. Процедура, которая выполняет такое достроение для туров с цепями положительной длины, была описана в [1], здесь мы лишь распространяем её на случай цепей неотрицательной длины. Эта процедура используется в нескольких алгоритмах, поэтому представлена в отдельном разделе.

Пусть даны рёберно непересекающиеся гамильтонов цикл H_1 и частичный тур T в графе G . Пусть в T имеется не менее трёх цепей положительной длины (T может также содержать и цепи длины 0).

Процедура $P_{T \rightarrow H}$.

Этап 1. Пока в T имеется изолированная вершина s (цепь длины 0), в T выбираются три произвольные цепи положительной длины (u_1, \dots, u_k) , (v_1, \dots, v_l) и (w_1, \dots, w_m) . К T добавляется одно из рёбер su_1, sv_1, sw_1 , которое не принадлежит гамильтонову циклу H_1 . К окончанию этапа в T нет цепей нулевой длины.

Этап 2. Пока в T имеется более трёх цепей, выбираются две произвольные цепи (u_1, \dots, u_k) и (v_1, \dots, v_l) . К T добавляется одно из рёбер $u_1v_1, u_1v_l, u_kv_1, u_kv_l$, которое не принадлежит гамильтонову циклу H_1 .

Этап 3. К началу этапа тур T состоит ровно из трёх цепей положительной длины (u_1, \dots, u_k) , (v_1, \dots, v_l) и (w_1, \dots, w_m) . Из всех возможных вариантов соединения этих трёх цепей в гамильтонов цикл H_2 выбирается тот, который не использует рёбер цикла H_1 .

Утверждение 1. По заданным рёберно непересекающемуся гамильтонову циклу H_1 и частичному туру T в графе G процедура $P_{T \rightarrow H}$ за

время $O(n)$ строит гамильтонов цикл $H_2 \supseteq T$ такой, что $H_1 \cap H_2 = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На этапе 1 меются 3 рёбра cu_1 , cv_1 и cw_1 , поэтому хотя бы одно из них не входит в H_1 . На этапе 2 рёбра u_1v_1 , u_1v_l , u_kv_1 и u_kv_l образуют цикл длины 4. Поэтому хотя бы одно из них не входит в H_1 . Возможность построения цикла H_2 на этапе 3 была доказана в [1] рассмотрением возможных случаев расположения концов цепей, оставшихся на этапе 3, на цикле H_1 . Таким образом, процедура корректна. Очевидно, что время её работы линейно по n . Утверждение 1 доказано.

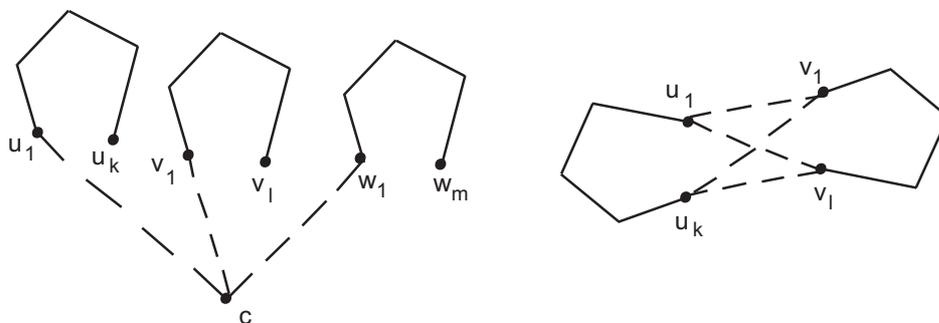


Рис. 1. К этапам 1 и 2 алгоритма $P_{T \rightarrow H}$

2. Алгоритм с оценкой $4/3$

В этом алгоритме первый цикл с оценкой точности $7/6$ находится согласно [13]. Несмотря на то, что в настоящее время известны алгоритмы с лучшими оценками (например, с оценкой $8/7$ из [3]), мы используем именно результат из [13], следуя авторам алгоритма $A_{4/3}$. Частичный тур, который составляет основу второго цикла, является объединением двух найденных специальных паросочетаний.

Алгоритм $A_{4/3}$.

Этап 1. Алгоритм из [13] находит в G гамильтонов цикл H_1 с $w(H_1) \leq \frac{7}{6}w(\text{OPT})/2$.

Этап 2. Строится граф $G' = (V, E')$, где $E' = E \setminus \{e \mid w(e) = 2 \vee e \in H_1\}$. Находится максимальное паросочетание M' в G' .

Этап 3. Строится двудольный граф $G'' = (V_1, V_2, E'')$, где V_1 и V_2 — множества вершин, соответственно покрытых и непокрытых паросочетанием M' , $E'' = E' \cap (V_1 \times V_2)$. Находится максимальное паросочетание M'' в G'' .

Этап 4. Паросочетания M' и M'' объединяются в частичный тур T . При помощи процедуры $P_{T \rightarrow H}$ тур T достраивается до гамильтонова цикла H_2 , не пересекающегося с H_1 .

Теорема 1. Пусть $w(\text{ОПТ}) = 2n$. Тогда алгоритм $A_{4/3}$ за время $O(n^3)$ находит такое решение $H_1 \cup H_2$, что $w(H_1 \cup H_2) \leq \frac{4}{3}w(\text{ОПТ})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что $|M''| \geq \frac{n-2|M'|}{2}$. Для этого достаточно доказать существование в подграфе $G''' = (V_1, V_2, \text{ОПТ} \cap E'')$ графа G'' паросочетания мощности не менее $\frac{n-2|M'|}{2} = |V_2|/2$. Согласно теореме Кенига—Холла для этого достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|\Delta X| \geq |X| + |V_2|/2 - |V_2|$ для любого $X \subset V_2$, где через ΔX обозначено множество всех вершин, смежных с вершинами из X . В G''' степени вершин из доли V_1 не превосходят 4, а степени вершин из V_2 не менее 2. Поэтому при $X \subset V_2$ имеем $|\Delta X| \geq |X|/2 \geq |X| - |V_2|/2$.

Для числа рёбер в T получаем оценку $|T| = |M'| + |M''| \geq |M'| + \frac{n-2|M'|}{2} = n/2$. Отсюда следует, что $w(H_2) \leq |T| + 2(n - |T|) \leq 3n/2$, откуда $w(H_1 \cup H_2) \leq 7n/6 + 3n/2 = 8n/3 = \frac{4}{3}w(\text{ОПТ})$.

Сложность алгоритма определяется временем отыскания цикла H_1 , которое равно $O(n^3)$. Теорема 1 доказана.

3. Алгоритм с оценкой 5/4

Алгоритм $A_{5/4}$ представляет собой сведение задачи $2\text{-PSP}_{\min}(1, 2)$ к задаче $2\text{-PSP}_{\max}(0, 1)$ на максимум, $3/4$ -приближённое решение которой можно найти при помощи алгоритма из [1]. В алгоритме из [1] приближённое решение конструируется также из частичных туров, которые в свою очередь получают разбиением либо кубического, либо «почти кубического» подграфа (при чётном n и при нечётном n соответственно) максимального веса.

Алгоритм $A_{5/4}$.

Этап 1. Рассматривается весовая функция w' , $w'(e) = 2 - w(e)$.

Этап 2. Алгоритм из [1] для входа w' находит два непересекающихся по рёбрам гамильтоновых цикла H_1, H_2 . Эти циклы берутся в качестве приближённого решения задачи.

Теорема 2. Алгоритм $A_{5/4}$ за время $O(n^3)$ находит такое решение $H_1 \cup H_2$, что $w(H_1 \cup H_2) \leq \frac{5}{4}w(\text{ОПТ})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [1] доказано неравенство

$$w'(H_1 \cup H_2) \geq 3/4w'(\text{ОПТ}'),$$

где $\text{ОПТ}'$ есть оптимальное решение задачи 2-PSP_{\max} на входе w' . Ясно, что $\text{ОПТ}'$ является также оптимальным решением задачи $2\text{-PSP}_{\min}(1, 2)$

на входе w . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} w(H_1 \cup H_2) &= 4n - w'(H_1 \cup H_2) \leq 4n - \frac{3}{4}w'(\text{ОПТ}') \\ &= 4n - \frac{3}{4}(4n - w(\text{ОПТ}')) = 4n - \frac{3}{4}(4n - w(\text{ОПТ})) \\ &= n + \frac{3}{4}w(\text{ОПТ}) \leq \frac{5}{4}w(\text{ОПТ}). \end{aligned}$$

Временная сложность алгоритма определяется временем работы алгоритма из [1], которое равно $O(n^3)$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Если $w(\text{ОПТ}) > 2n$, то в $n = \frac{1}{2(1+\rho)}w(\text{ОПТ})$, что даёт $w(H_1 \cup H_2) \leq 3/4 + \frac{1}{2(1+\rho)}w(\text{ОПТ})$. Как видно, при возрастании ρ оценка улучшается.

4. Алгоритм с оценкой 26/21

В этом алгоритме первый цикл находится алгоритмом из [3], который имеет наилучшую в настоящее время оценку 8/7, но большую временную сложность $O(n^{24})$. Несмотря на то, что алгоритмы с оценками 65/56 и 7/6, описанные соответственно в [4] и [13], имеют существенно меньшую временную сложность $O(n^3)$, мы используем именно результат из [13], следуя авторам алгоритма $A_{26/21}$. Для нахождения частичного тура, который составляет основу второго цикла, используется описанная ниже процедура $P_{2/3}$.

Пусть задан n -вершинный граф G со степенями вершин 2, 3 и 4.

Процедура $P_{2/3}$.

Этап 1. Пока имеется $e = uv \in E(G)$ с $\deg(u) \geq 3$ и $\deg(v) \geq 3$, e удаляется из E . После выполнения этого этапа вершины степеней 3 и 4 становятся несмежными в G ; они относятся к множеству V_1 .

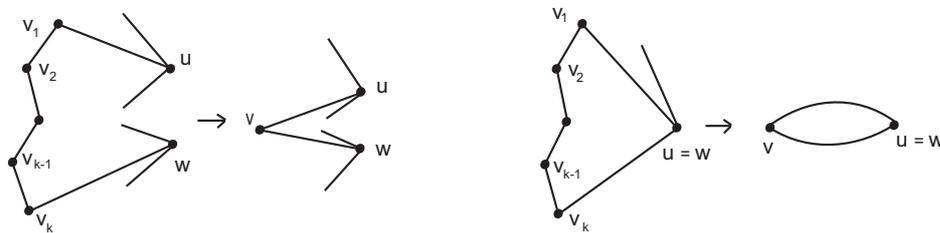


Рис. 2. Этап 2

Этап 2. В G каждая цепь вида (u, v_1, \dots, v_k, w) (цикл при $u = w$), где $k \geq 2$, $\deg(u) \geq 3$, $\deg(w) \geq 3$, $\deg(v_1) = \dots = \deg(v_k) = 2$, заменяется на цепь (u, v, w) , где v — новая вершина степени 2, а все компоненты

связности графа G , которые являются простыми циклами, удаляются. При этом могут образоваться мультирёбра (при замене цикла, т. е. при $u = w$). В конце этапа вершины степени 2 становятся несмежными в G . Они относятся к множеству V_2 . Полученный граф $G' = (V_1, V_2, E')$ является двудольным мультиграфом.

Этап 3. Для каждой вершины из доли V_1 выбираются по два инцидентных ей ребра. Получается некоторый набор T циклов и цепей с концами в V_2 .

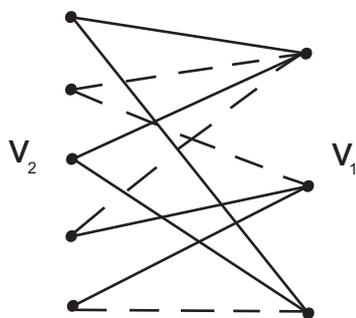


Рис. 3. Этап 3

Этап 4. Пока в T есть циклы, выбирается произвольная вершина $v \in V_2$ из некоторого цикла и смежная с ней по циклу вершина $u \in V_1$. Находится такое ребро uw , не входящее в T , что $\deg_T(w) \leq 1$ (существование такого ребра доказывается ниже). Ребро uv в T заменяется на ребро uw . После выполнения этого этапа T является частичным туром в G' .

Этап 5. В каждом простом цикле графа G , который был удалён на этапе 2, выбирается простая цепь, покрывающая все его вершины, и добавляется к T .

Этап 6. Для каждой вершины $v \in V_2$, которая была получена на этапе 2 из цепи (u, v_1, \dots, v_k, w) , в T добавляются рёбра $v_i v_{i+1}$, $1 \leq i \leq k-1$. После выполнения этого этапа T является частичным туром в исходном графе G .

Лемма 1. В произвольном графе со степенями вершин 2, 3 и 4 процедура $P_{2/3}$ за время $O(n)$ строит частичный тур T с $|T| \geq 2n/3$ рёбрами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем существование ребра uw , указанного на этапе 4. Так как любая вершина $u \in T \cap V_1$ имеет в G' степень не менее 3, то в $G' \setminus T$ имеется некоторое ребро uw . А так как $\deg_{G'}(w) = 2$, то $\deg_T(w) \leq 1$.

Установим нижнюю оценку для числа рёбер в T . Сначала рассмотрим тур, полученный после этапа 4 в графе G' . Из ограничений на степени вершин в G' следует, что $2|V_2| = |E'| \leq 4|V_1|$. Следовательно,

$$|V_1| \geq \frac{|V_1| + |V_2|}{3} = |V(G')|/3.$$

На этапе 3, очевидно, $|T| = 2|V_1| \geq 2|V(G')|/3$, а в ходе этапа 4 число рёбер в T не меняется. Затем на этапе 5 для каждого k -вершинного цикла к T добавляется $k - 1$ ребро, что даже в худшем случае ($k = 3$) сохраняет оценку. На этапе 6 число добавленных к G' вершин равно числу добавленных к T рёбер, и оценка тоже сохраняется.

Оценим временную сложность процедуры. На этапе 1 просматриваются все рёбра в G , на что тратится $O(|E(G)|)$ элементарных операций. На этапе 2 поиск цепей и компонент производится за время $O(|E(G)|)$. На этапе 3 формируется начальный тур за $|V_1| \leq n$ шагов. На этапе 4 тур перестраивается не более $|V_1| \leq n$ раз. На этапах 5 и 6 к T добавляется не более n рёбер. Каждый из этапов выполняется ровно один раз; следовательно, временная сложность всей процедуры равна $O(|E(G)|)$. Отсюда с учётом неравенства $|E(G)| \leq 2|V(G)| = 2n$ следует, что сложность равна $O(n)$. Лемма 1 доказана.

Перейдём к описанию алгоритма поиска двух гамильтоновых циклов.

Алгоритм $A_{26/21}$.

Этап 1. Алгоритм из [3] находит в G такой гамильтонов цикл H_1 , что $w(H_1) \leq \frac{8}{7}w(\text{OPT})/2$.

Этап 2. Алгоритм из [11] находит остовный регулярный степени 4 подграф G_4 графа G с наименьшим рёберным весом. Из него удаляются рёбра цикла H_1 , и полученный граф обозначается через G' .

Этап 3. При помощи процедуры $P_{2/3}$ в G' находится частичный тур T , содержащий не менее $2n/3$ рёбер; при помощи процедуры $P_{T \rightarrow H}$ он достраивается до гамильтонова цикла H_2 , не пересекающегося с H_1 .

Теорема 3. Пусть $w(\text{OPT}) = 2n$. Тогда алгоритм $A_{26/21}$ за время $O(n^{24})$ находит такое решение $H_1 \cup H_2$, что $w(H_1 \cup H_2) \leq \frac{26}{21}w(\text{OPT})$.

Доказательство. При $w(\text{OPT}) = 2n$ в графе G_4 имеются только рёбра веса 1. Вершины графа G' могут иметь степени только 2, 3 или 4. Таким образом, процедура $P_{2/3}$ работает корректно и находит тур T с $|T| \geq 2n/3$. Следовательно, $w(H_2) \leq |T| + 2(n - |T|) \leq 4n/3$. Поэтому $w(H_1 \cup H_2) \leq \frac{8}{7}n + 4n/3 = \frac{26}{21}w(\text{OPT})$.

Сложность алгоритма определяется временем отыскания цикла H_1 , которое согласно [3] равно $O(n^{24})$. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Если $w(\text{OPT}) > 2n$, то в G_4 содержится не более $2\rho n$ рёбер веса 2. В худшем случае все такие рёбра принадлежат туру T . Поэтому $w(H_2) \leq |T| - 2\rho n + 2(n - |T| + 2\rho n) = 2n - |T| + 2\rho n \leq 4n/3 + 2\rho n$. Для второго цикла в этом случае верна оценка $w(H_1) \leq \frac{8}{7}w(\text{OPT})/2$, что даёт

$$\begin{aligned} w(H_1 \cup H_2) &\leq 4n/3 + 2\rho n + \frac{4}{7}w(\text{OPT}) = 2n(1 + \rho) - 2n/3 + \frac{4}{7}w(\text{OPT}) \\ &= (11/7 - \frac{1}{3(1 + \rho)})w(\text{OPT}). \end{aligned}$$

Ясно, что при возрастании ρ оценка ухудшается.

5. Алгоритм с оценкой 6/5

Алгоритм $A_{6/5}$ основан на нахождении в n -вершинном 4-регулярном графе двух рёберно непересекающихся туров с общим числом рёбер не менее $8n/5$. Процесс нахождения первого тура описан в разделе 5.2 (процедура $P_{4/5}$), а поиск второго тура — в разделе 5.3 (процедура $P_{8/5}$). Сам алгоритм $A_{6/5}$ представлен в разделе 5.4.

Прежде чем приступить к описанию процедуры $P_{4/5}$, приведём ряд необходимых определений. Пусть в графе G имеется тур T . Цепь $P = (v_1, \dots, v_m) \in T$ назовём *циклической* (*ациклической*), если $v_1v_m \in E(G)$ ($\notin E(G)$). При этом изолированная вершина считается циклической цепью. Вершину назовём *терминальной относительно T* , если она является концом ациклической цепи или принадлежит циклической цепи. Ребро графа назовём *терминальным относительно T* , если оно соединяет терминальные вершины разных цепей, содержащихся в T . В дальнейшем, если понятно, о каком туре идет речь, вершины и рёбра будем называть терминальными.

В следующем разделе приводится метод перестройки циклической цепи в ациклическую, используемый в процедуре $P_{4/5}$.

5.1. Преобразование циклической цепи в ациклическую цепь

Основным результатом этого раздела является следующая

Лемма 2. Пусть описанная ниже процедура P_{AC} получает на вход граф G со степенями вершин не более 4 и гамильтонов цикл $H = (v_1, \dots, v_m, v_1)$ в G . Пусть граф G не является одновершинным или простым циклом и не изоморфен ни какому из графов K_4 , K_5 , $K_{3,3}$, $K_{4,4}$. Тогда процедура P_{AC} за время $O(m)$ находит в G ациклическую гамильтонову цепь C .

Процедура P_{AC} .

Этап 1. В G находится хорда для H . Не теряя общности, можно считать, что $v_1v_{1+k} \in E(G)$ ($2 \leq k \leq m/2$). Если $v_iv_{i+k} \notin E(G)$, $2 \leq i \leq n$, то выдаётся цепь $C = v_i, \dots, v_{i-1+k}, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_{i+k}$ (при этом полагается, что $v_0 = v_m$, индексы считаются по модулю m). Если все рёбра вида v_iv_{i+k} содержатся в G , переход на этап 3.

Этап 2. Если $k = m/2$, то переход на этап 3. В противном случае граф G 4-регулярен. Так как G не изоморфен K_5 , то $m \geq 6$. Если $k \neq 3$, то выдаётся цепь

$$C = v_1, v_2, \dots, v_{m-k-2}, v_{m-k-1}, v_{m-1}, v_m, v_{m-k+1}, \dots, v_{m-3}, v_{m-2},$$

а если $k = 3$ (при этом $m \neq 8$, так как G не изоморфен $K_{4,4}$), то выдаётся цепь

$$C = v_1, v_2, \dots, v_{m-6}, v_{m-5}, v_{m-2}, v_{m-1}, v_m, v_{m-3}, v_{m-4}.$$

Этап 3. В этом случае $m = 2k$ и в G нет рёбер v_iv_{i+t} , где $1 < t < k$ (в противном случае цепь C находится на одном из этапов 1 или 2). Следовательно, граф G 3-регулярен, и так как G не изоморфен графам K_4 и $K_{3,3}$, то $m \geq 8$. В этом случае выдаётся цепь

$$C = v_1, v_2, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}, v_{m-1}, v_m, v_kv_{k+1}, \dots, v_{m-3}, v_{m-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2. Из описания леммы следует, что цепь C действительно ациклическая. Время работы каждого этапа линейно по m , этапы не повторяются, что определяет временную сложность процедуры. Лемма 2 доказана.

5.2. Поиск первого частичного тура

В основе описанной ниже процедуры лежат следующие соображения. Пусть в 4-регулярном графе G имеется частичный тур T . Можно легко увеличивать его мощность, добавляя к T терминальные рёбра. Однако этого может оказаться недостаточно для получения указанных оценок точности. Поэтому приходится вводить дополнительные преобразования тура, уменьшающие число циклических цепей в нём. Допустим, что в T имеется всего k цепей, среди которых s цепей являются циклическими. Далее будет показано, что если в G нет терминальных рёбер, а характеристика $2k + s$ минимальна в том смысле, что не может быть уменьшена преобразованиями специального вида, то $s = 0$ и $|T| \geq 4n/5$. При этом структуру графа $G \setminus T$ можно использовать для поиска второго тура в G .

Лемма 3. Пусть T — частичный тур в 4-регулярном графе G , k —

число цепей в T . Если в T нет циклических цепей и в G нет терминальных относительно T рёбер, то $k \leq n/5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим рёбра из $G \setminus T$, инцидентные концам цепей из T . Вторым концом каждого такого ребра не может быть конец цепи из T (в противном случае это ребро было бы терминальным или соответствующая цепь была бы циклической). Поэтому число таких рёбер равно $3 \cdot 2k = 6k$. В то же время неконцевой в T вершине инцидентно не более двух таких рёбер. Таким образом, обозначив через l число вершин, не являющихся концами цепей в T , получаем неравенство $6k \leq 2l$. Следовательно, $n = 2k + l \geq 2k + 3k = 5k$. Лемма 3 доказана.

Приступим к описанию специальных преобразований тура, позволяющих уменьшать величину $2k + c$. В случае, когда в G есть терминальные рёбра, таким преобразованием является добавление терминального ребра. Если в G нет терминальных рёбер и $c > 0$, то из цепей тура строится вспомогательный граф F , являющийся деревом, корнем которого является произвольная циклическая цепь из T , а остальными вершинами служат ациклические цепи из T . Рёбрами дерева являются рёбра графа G , соединяющие концы цепей тура с неконцевыми вершинами других цепей и задающие отношение предшествования между вершинами F , что для каждой вершины позволяет находить единственный путь от неё до корня. Нарастивание дерева в конечном итоге приводит к возможности преобразования тура, при котором уменьшается значение $2k + c$. Для определенности, дерево нарастывается в ширину, что не принципиально, но позволяет сократить описание процедуры.

Обозначим через Q очередь из рёбер, которая будет использоваться для поиска в ширину. Выражения $e \leftarrow Q$ и $Q \leftarrow e$ будут обозначать соответственно операции удаления e из Q и добавления e в Q .

Определим подграф F формально. Пусть в туре T зафиксирована циклическая цепь P_0 , в которой выделена вершина s_0 . Если вершина s_0 соединена ребром $e_0 = s_0s$ с некоторой ациклической цепью из T , то $P_0 \cup e_0$ назовём (P_0, e_0) -деревом. Для удобства здесь и далее будем предполагать, что s_0 является концом цепи P_0 (в противном случае можно воспользоваться циклическостью P_0 и сделать s_0 концевой).

Далее определим F по индукции. Пусть F есть (P_0, e_0) -дерево, $e = s'v_p \in F$, где s' — конец цепи из F , а v_p — внутренняя вершина некоторой ациклической цепи $P = (v_1, \dots, v_{p-1}, v_p, v_{p+1}, \dots, v_q) \in T \setminus F$. Пусть имеются рёбра $e_1 = v_1u$ и $e_q = v_qv$, где $u \notin \{v_1, \dots, v_{p-1}\}$ и $v \notin \{v_{p+1}, \dots, v_q\}$. Тогда $F \cup P \cup e_1 \cup e_q$ назовём (P_0, e_0) -деревом, цепь $P' \in F$, содержащую вершину s' , предком цепи P , вершину v_p особой, графы $G[v_1, \dots, v_{p-1}]$ и

$G[v_{p+1}, \dots, v_q]$ соответственно *левым* и *правым* участком цепи P , рёбра e_1 и e_q соответственно *левым* и *правым* ребром для цепи P . Введём также обозначения $L(P)$, $LP(P)$, $LP^*(P)$ ($R(P)$, $RP(P)$, $RP^*(P)$) соответственно для левого участка цепи P , цепи (v_1, \dots, v_{p-1}) и цепи (v_1, \dots, v_p) (правого участка цепи P , цепи (v_{p+1}, \dots, v_q) и цепи (v_p, \dots, v_q)).

Процедура $P_{4/5}$.

Этап 1. В качестве T выбирается $|V(G)|$ одновершинных цепей и осуществляется переход на этап 2.

Этап 2. Пока в G имеется терминальное ребро uv , оно добавляется к T . При этом если вершина u или v лежит на циклической цепи, то её можно считать концом этой цепи. Если терминального ребра не нашлось, то переход на этап 3.

Замечание 3. При добавлении к T терминального ребра число цепей уменьшается на 1, а число циклических цепей может увеличиться не более чем на 1.

Этап 3. Если $c = 0$, то выдаётся T . В случае $k = c = 1$ (T состоит из одной циклической гамильтоновой цепи) при помощи процедуры P_{AC} находится и выдаётся ациклическая гамильтонова цепь C . В противном случае осуществляется переход на этап 4.

Этап 4. Построение дерева.

Этап 4.1. Полагается $Q = \emptyset$. Находятся циклическая цепь $P_0 \in T$ и ребро $e_0 = s_0s_1$, соединяющее её с ациклической цепью $P \in T$. Полагается $F = P_0 \cup e_0$ и $Q \leftarrow e_0$. Переход на этап 4.2.

Этап 4.2. $e \leftarrow Q$. В F имеется единственный путь $P_0, e_0, P_1, e_1, \dots, P_m, e_m = e$, где P_i предок P_{i+1} . Для упрощения описания процедуры будем считать (всюду кроме этапа 4.6.3), что все рёбра e_1, \dots, e_m — левые. Пусть $P_m = (u_1, \dots, u_t, \dots, u_r)$ и $e_m = u_1v_p$, где вершина v_p принадлежит цепи $P = (v_1, \dots, v_p, \dots, v_q)$. В случае $m > 0$ будем считать, что u_t — особая вершина P_m .

Если $P \notin F$, при $m > 0$ переход на этап 4.3, при $m = 0$ — на этап 4.4.

Если $P \in F$, переход на этап 4.6.

Этап 4.3. Если $v_q u_{t-1} \in E(G)$, то производится перестройка T заменой цепей P_0, \dots, P_m, P на цепи $P'_0 = P_0 \cup e_0 \cup RP^*(P_1)$, $P'_1 = LP(P_1) \cup e_1 \cup RP^*(P_2), \dots, P'_{m-1} = LP(P_{m-1}) \cup e_{m-1} \cup RP^*(P_m)$, $P'_m = LP(P_m) \cup \{v_q u_{t-1}\} \cup P$ и переход на этап 2.

Замечание 4. Цепи P'_0 и P'_m ациклические, так как в G нет терминальных рёбер. В случае $m > 1$ цепи P'_1, \dots, P'_{m-1} также ациклические, так как в противном случае перестроение произошло бы на более ранних итерациях этапа 4.3. Таким образом, параметр k уменьшится, параметр

с не возрастёт.

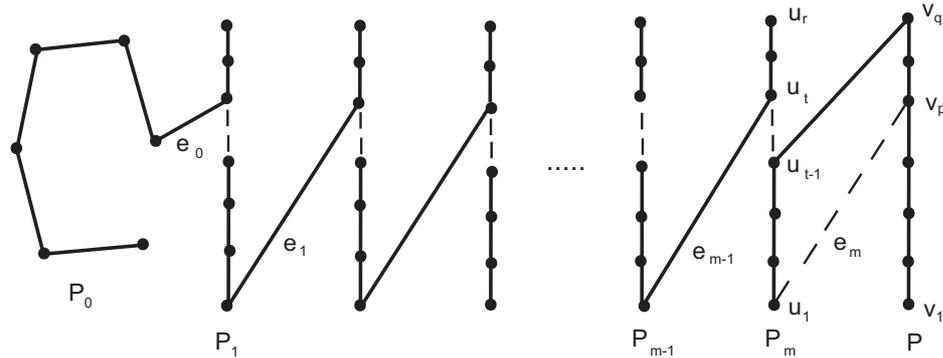


Рис. 4. Этап 4.3

Если в $E(G)$ есть ребро v_1u_{t-1} , v_qu_{t+1} или v_1u_{t+1} , то делается аналогичное перестроение, после которого осуществляется переход на этап 2. Если перестроений не было, переход на этап 4.4.

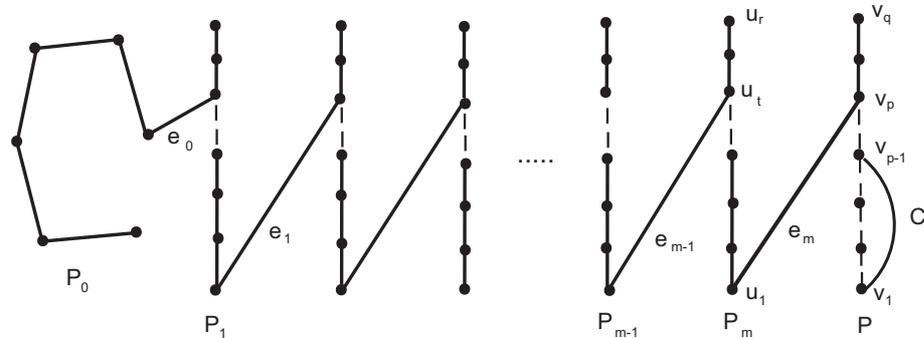


Рис. 5. Этап 4.4

Этап 4.4. Делается попытка найти ациклическую цепь C в графе $G[v_1, \dots, v_{p-1}]$. Если $p > 2$ и $v_1v_{p-1} \notin E(G)$, полагается $C = (v_1, \dots, v_{p-1})$. В противном случае используется процедура P_{AC} . Если цепь найдена, то в T цепи P_0, \dots, P_m, P заменяются на цепи $P'_0 = P_0 \cup e_0 \cup RP^*(P_1)$, $P'_1 = LP(P_1) \cup e_1 \cup RP^*(P_2)$, \dots , $P'_{m-1} = LP(P_{m-1}) \cup e_{m-1} \cup RP^*(P_m)$, $P'_m = LP(P_m) \cup e_m \cup RP^*(P)$, C и осуществляется переход на этап 2.

Замечание 5. Ввиду отсутствия терминальных рёбер и выполнения проверки на этапе 4.3 все новые цепи будут ациклическими. Таким образом, параметр s уменьшится, параметр k не изменится.

Аналогично проверяется граф $G[v_{p+1}, \dots, v_q]$. Если ациклическая цепь находится, производится аналогичная перестройка и осуществляется переход на этап 2.

Если перестроений не было, переход на этап 4.5.

Этап 4.5. Находятся рёбра $e_1 = v_1 s_1$ и $e_q = v_q s_q$ такие, что $s_1 \notin L(P)$ и $s_q \notin R(P)$. Полагается $F = F \cup P \cup e_1 \cup e_q$, $Q \leftarrow e_1$, $Q \leftarrow e_q$. Переход на этап 4.2.

Замечание 6. Согласно лемме 2 каждый из графов $L(P)$ и $R(P)$ либо одновершинный, либо гамильтонов граф, изоморфный простому циклу, K_4 или $K_{3,3}$ (он не может быть изоморфен K_5 или $K_{4,4}$, так как $\deg_{L(P)}(v_{p-1}) \leq 3$ и $\deg_{R(P)}(v_{p+1}) \leq 3$). Следовательно, рёбра e_1 и e_q найдутся.

Этап 4.6. Если вершина v_p является особой для некоторой цепи из F , то переход на этап 4.2, иначе возможны три следующие случая.

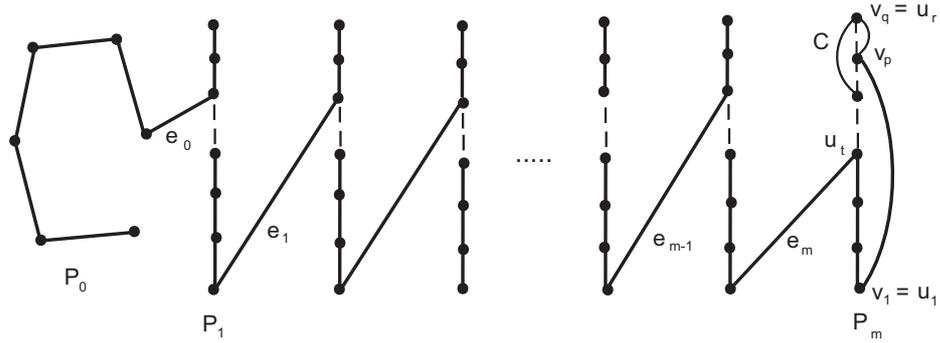


Рис. 6. Случай 4.6.1

Случай 4.6.1. Пусть $v_p \in P_m$. Из определения дерева F следует, что $v_p \in R(P_m)$. В $R(P_m)$ находится гамильтонова цепь C с концом v_p . В T цепи P_0, \dots, P_m заменяются на цепи

$$\begin{aligned} P'_0 &= P_0 \cup e_0 \cup RP^*(P_1), \\ P'_1 &= LP(P_1) \cup e_1 \cup RP^*(P_2), \\ &\dots, \\ P'_{m-1} &= LP(P_{m-1}) \cup e_{m-1} \cup LP^*(P_m) \cup \{u_1 v_p\} \cup C \end{aligned}$$

(при $m = 1$ имеется только одна новая цепь $P'_0 = P_0 \cup e_0 \cup LP^*(P_1) \cup C$). Переход на этап 2.

В двух остальных случаях $v_p \in \tilde{P} \neq P_m$, где $\tilde{P} \in F$. Для удобства не будем вводить новых обозначений и будем считать, что P_0, e_0, \dots, P_{i-1} ,

e_{i-1}, P_i есть путь в F от P_0 до $P_i = \tilde{P}$. Не умаляя общности, считаем, что $v_p \in L(P_i)$.

Если в указанном пути нет P_m , имеем случай 4.6.2, иначе — случай 4.6.3.

Случай 4.6.2. В $L(P_i)$ находится гамильтонова цепь C с концом v_p . В T цепи P_0, \dots, P_i, P_m заменяются на цепи $P'_0 = P_0 \cup e_0 \cup RP^*(P_1)$, $P'_1 = LP(P_1) \cup e_1 \cup RP^*(P_2), \dots, P'_{i-1} = LP(P_{i-1}) \cup e_{i-1} \cup RP^*(P_i), P_m \cup \{u_1 v_p\} \cup C$ и осуществляется переход на этап 2.

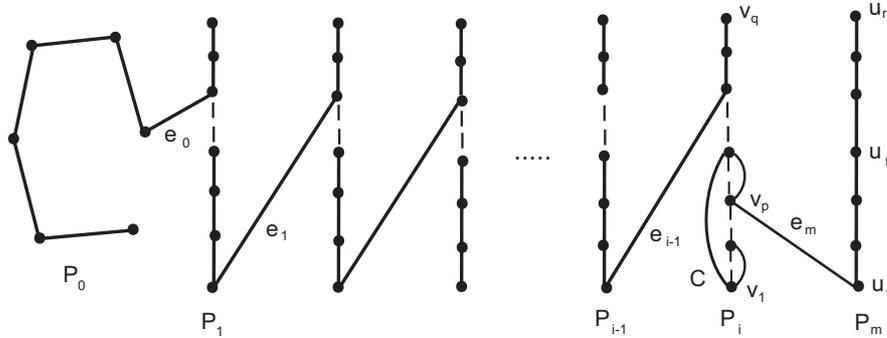
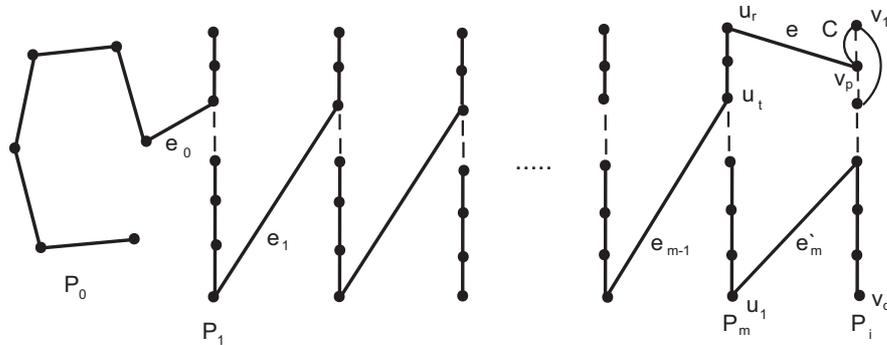


Рис. 7. Случай 4.6.2



Случай 4.6.3

Случай 4.6.3. Согласно свойству обхода в ширину ребро $e = e_m$ является правым для P_m и имеет вид $e = u_r v_p$, а путь в F имеет вид $P_0, e_0, \dots, P_m, e'_m, P_i$, где e'_m — левое ребро цепи P_m . В $L(P_i)$ находится гамильтонова цепь C с концом v_p . В T цепи P_0, \dots, P_m, P_i заменяются на цепи $P'_0 = P_0 \cup e_0 \cup RP^*(P_1)$, $P'_1 = LP(P_1) \cup e_1 \cup RP^*(P_2), \dots, P'_m = LP(P_m) \cup e'_m \cup RP^*(P_i), P'_{m-1} = LP(P_{m-1}) \cup e_{m-1} \cup RP^*(P_m) \cup e \cup C$ (при $m = 1$ имеются только две цепи $LP(P_1) \cup e_1 \cup RP^*(P_2)$ и $P_0 \cup e_0 \cup RP^*(P_1) \cup e \cup C$). Переход на этап 2.

Замечание 7. В каждом из случаев этапа 4.6 из новых цепей лишь последняя может быть циклической. Поэтому параметр c не возрастает, а параметр k уменьшается. Во всех этих случаях гамильтонова цепь C легко находится, так как граф, в котором она ищется, является либо простым циклом, либо изоморфным K_4 или $K_{3,3}$.

Конец описания процедуры $P_{4/5}$.

Лемма 4. В связном n -вершинном 4-регулярном графе G , неизоморфном графам K_5 и $K_{4,4}$, процедура $P_{4/5}$ за время $O(n^2)$ находит частичный тур без циклических цепей, относительно которого в G нет терминальных рёбер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся в том, что на этапе 4.2 очередь Q не может оказаться пустой. Действительно, допустим, что $Q = \emptyset$ на некоторой итерации. Рассмотрим построенное к этому моменту (P_0, e_0) -дерево F и множество левых и правых рёбер E_F . Концами каждого ребра из E_F являются терминальная и особая вершины. Пусть в F имеется l ациклических цепей, тогда $|E_F| = 2l$. С другой стороны, в каждой ациклической цепи из F содержится ровно одна особая вершина, которой инцидентно не более двух рёбер из E_F , а концу ребра e_0 , не принадлежащему P_0 (который также является особой вершиной), инцидентно не более одного ребра из E_F . Следовательно, $|E_F| \leq 2l - 1$, что противоречит ранее доказанному равенству $|E_F| = 2l$.

Теперь проследим, как в ходе выполнения процедуры $P_{4/5}$ изменяется величина $\mu = 2k + c$. На этапе 1 величина μ равна $3|V(G)|$. Если в G есть терминальные рёбра, то μ уменьшается на этапе 2. Если таких рёбер нет, но в T есть хотя бы одна циклическая цепь P_0 , то начинается построение (P_0, e_0) -дерева, которое не может закончиться на этапе 4.2, и следовательно, приводит к уменьшению μ в результате перестроения на одном из этапов 3, 4.3, 4.4, 4.6.1, 4.6.2, 4.6.3 и возврату на этап 2.

Для оценки временной сложности процедуры заметим, что между любыми двумя последовательными уменьшениями параметра $2k + c$ выполняется $O(|E(G)|)$ операций (это либо поиск терминального ребра на этапе 2, либо построение дерева F и последующее преобразование тура T на этапе 4). Таким образом, время работы процедуры есть

$$O(|V(G)| \cdot |E(G)|) = O(n^2).$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Процедура $P_{4/5}$ строит частичный тур с $k \leq n/5$ цепями.

Доказательство является очевидным следствием лемм 3 и 4.

5.3. Процедура нахождения двух частичных туров

Описанная ниже процедура находит два тура в 4-регулярном графе G_4 . При этом первый тур находится при помощи процедуры $P_{4/5}$, а при поиске второго тура используются доказанные выше свойства процедуры $P_{4/5}$.

Процедура $P_{8/5}$.

Этап 0. В каждой компоненте связности G графа G_4 , изоморфной K_5 или $K_{4,4}$, находится по две непересекающихся гамильтоновы цепи, первая из которых относится к T_1 , а вторая — к T_2 . Для каждой компоненты G , неизоморфной K_5 и $K_{4,4}$, выполняются этапы 1–4.

Этап 1. При помощи процедуры $P_{4/5}$ в G находится тур T_1 . Полагается $G' = G \setminus T_1$. В качестве T_2 в G' выбирается $|V(G)|$ одновершинных цепей и осуществляется переход на этап 2.

Этап 2. Пока в G' существует терминальное ребро uv , оно добавляется к T_2 . При этом если какая-то из вершин u или v лежит на циклической цепи, то можно считать её концевой. Если терминального ребра не нашлось, то переход на этап 3.

Этап 3. Если в T_2 нет цепей длины 0, то выдаются туры T_1 и T_2 , иначе переход на этап 4.

Этап 4. Построение дерева. На этом этапе строится дерево F , состоящее из трёхвершинных цепей T_2 с корнем в некоторой одновершинной цепи.

Этап 4.1. Полагается $Q = \emptyset$. Находятся произвольная цепь $u = P_0$ из T_2 длины 0 и ребро $e_0 = uv \in G'$ и создаётся (P_0, e_0) -дерево $F = P_0 \cup e_0$; $Q \leftarrow e_0$. Переход на этап 4.2.

Этап 4.2. $e \leftarrow Q$. Пусть $e = uv_p$. Если $P \in T \setminus F$, то

$$v_p \in P = (v_1, \dots, v_p, \dots, v_q) \in T_2 \setminus F$$

($v_p \notin F$, так как все ранее включенные в F цепи — трёхвершинные, в G' нет терминальных рёбер, а все особые вершины имеют степень 3 в F). При $q = 3$ переход на этап 4.3, а при $q > 3$ — на этап 4.4.

Этап 4.3. Находятся рёбра $e_1 = v_1y$ и $e_3 = v_3w$, где $y, w \notin F$ и полагается $F = F \cup P \cup e_1 \cup e_3$; $Q \leftarrow e_1$; $Q \leftarrow e_3$. Переход на этап 4.2.

Этап 4.4. Не нарушая общности, предполагается, что $p > 2$. Тогда в T_2 цепи P_0, \dots, P_m из F вдоль пути $P_0, e_0, P_1, e_1, \dots, P_m, e_m = e$ и цепь P заменяются на цепи $e_0 \cup RP^*(P_1), e_1 \cup RP^*(P_2), \dots, e_m \cup RP^*(P), LP(P)$. При этом число одновершинных цепей уменьшится. Переход на этап 2.

Конец описания процедуры $P_{8/5}$.

Теорема 4. В n -вершинном 4-регулярном графе G_4 процедура $P_{8/5}$

за время $O(n^2)$ находит пару непересекающихся частичных туров T_1 и T_2 с общим числом рёбер не менее $8n/5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать теорему для связного графа $G_4 = G$. Если G изоморфен K_5 или $K_{4,4}$, то утверждение следует из этапа 0. В противном случае обозначим через k_2 число цепей в T_2 и через c_2 число одновершинных цепей.

Сначала докажем, что после окончания работы процедуры $c_2 = 0$. На этапе 2 значение c_2 не увеличивается. В случае, когда терминальные рёбра отсутствуют и $c_2 > 0$, осуществляется переход на этап 4. Рассмотрим (P_0, e_0) -дерево, которое строится на этом этапе. Докажем, что рёбра e_1 и e_3 , указанные на этапе 4.3, всегда существуют. Ввиду неравенств $\deg_{G'}(v_1) \geq 2$ и $\deg_{G'}(v_q) \geq 2$ имеются рёбра $e_1 \notin F$ и $e_3 \notin F$. Но все цепи дерева F , кроме содержащих корень, являются трёхвершинными, причём степень каждой особой вершины уже максимальна в G' (равна 3), рёбра e_1 и e_3 не могут быть терминальными и не могут совпадать (в этом случае ребро e было бы терминальным). Поэтому $y, w \notin F$. Так как рост дерева не может продолжаться бесконечно, то этап 4 закончится преобразованием на этапе 4.4 с уменьшением c_2 .

Оценим временную сложность процедуры. Заметим, что в ходе выполнения процедуры величина $k_2 + c_2$ уменьшается. Это происходит либо на этапе 2 (при этом уменьшается k_2 , а c_2 не возрастает), либо на этапе 4.4 (при этом уменьшается c_2 , а k_2 остаётся неизменным). Между любыми двумя последовательными уменьшениями выполняется $O(|E(G)|)$ операций (поиск терминального ребра на этапе 2 или перестройка тура на этапе 4, которое линейно по числу обрабатываемых рёбер). Таким образом, временная сложность алгоритма есть $O(|V(G)||E(G)|) = O(n^2)$.

Докажем оценку для длины полученных туров. Рассмотрим множество T'_2 всех ациклических цепей в T_2 после окончания работы алгоритма. Из леммы 4 следует, что в G' имеется в точности $2k$ вершин степени 3 (концы цепей тура T_1), где k — число цепей в T_1 , и $n - 2k$ вершин степени 2; при этом вершины степени 3 попарно несмежны. Так как в G' нет терминальных относительно T_2 рёбер, то вершины степени 3 могут быть лишь неконцевыми вершинами цепей из T'_2 . Таким образом, концы цепей из T'_2 имеют степень 2 в G' , и каждый из них смежен с вершиной степени 3. Поэтому число концевых вершин в T'_2 равно $2k$, а число цепей в T'_2 равно k . Далее, все вершины степени 3 лежат на цепях из T'_2 и в каждой такой цепи число вершин степени 2 по крайней мере на одну больше (ввиду несмежности 3-вершин). Следовательно, общее число вершин в T'_2 не меньше $2k + 2k + k = 5k$, число циклических цепей в T_2

не больше $(n - 5k)/3$ (ввиду отсутствия одновершинных цепей), а общее число цепей k_2 в T_2 не больше $(n - 2k)/3$. Суммарное число цепей в T_1 и T_2 равно $k + k_2 \leq k + (n - 2k)/3 = (n + k)/3 \leq 2n/5$. Следовательно, $|T_1 \cup T_2| = (n - k) + (n - k_2) \geq 8n/5$. Теорема 4 доказана.

5.4. Алгоритм $A_{6/5}$ и его обобщения

Как уже упоминалось, основу алгоритма $A_{6/5}$ составляет процедура $P_{8/5}$, а для доказательства оценки точности найденного решения используется ранее полученная оценка для числа рёбер в найденных частичных турах.

Алгоритм $A_{6/5}$.

Этап 1. Используя алгоритм из [11], в графе G находится остовный 4-регулярный подграф G_4 с наименьшим рёберным весом.

Этап 2. При помощи процедуры $P_{8/5}$ в G_4 находится пара частичных туров T_1 и T_2 .

Этап 3. Цепи тура T_1 соединяются в произвольном порядке в гамильтонов цикл H_1 . При этом если добавленные рёбра находились в T_2 , то они переносятся в T_1 .

Этап 4. При помощи процедуры $P_{T \rightarrow H}$ тур T_2 достраивается до гамильтонова цикла H_2 , не пересекающегося с H_1 .

Теорема 5. Пусть H_1 и H_2 — гамильтоновы циклы, построенные алгоритмом $A_{6/5}$. Пусть весовая функция w такова, что отношение весов любых двух рёбер графа G не превосходит заданного числа $q \geq 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) $w(H_1 \cup H_2) \leq \frac{4+q}{5} w(\text{OPT})$;

(ii) Если на этапе 1 находится остовный 4-регулярный подграф с наибольшим рёберным весом, то $w(H_1 \cup H_2) \geq \frac{6-q}{5} w(\text{OPT}')$, где OPT' — оптимальное решение задачи 2-PSP_{max}.

В каждом из случаев (i), (ii) временная сложность алгоритма равна $O(n^3)$.

Доказательство. Временная сложность алгоритма определяется временем отыскания графа G_4 , которое равно $O(n^3)$.

Установим оценки точности. При этом, не уменьшая общности, будем считать, что веса рёбер графа G лежат в промежутке $[1, q]$.

(i) Заметим, что любая пара непересекающихся гамильтоновых циклов является остовным 4-регулярным подграфом в G . Таким образом, на этапе 1 решается релаксация задачи 2-PSP_{min}. Следовательно, $w(G_4) \leq w(\text{OPT})$.

Согласно теореме 4 $|T_1 \cup T_2| \geq 8n/5$ для туров T_1, T_2 . Следовательно, граф $H_1 \cup H_2$ отличается от графа G_4 заменой не более $2n/5$ рёбер. В

худшем случае $2n/5$ рёбер веса 1 заменяются на рёбра веса q . Поэтому выполняется оценка

$$\begin{aligned} w(H_1 \cup H_2) &\leq w(G_4) - 2n/5 + \frac{2n}{5} \cdot q \leq w(\text{OPT}) + \frac{(q-1)}{5} \cdot 2n \\ &\leq w(\text{OPT}) + \frac{(q-1)}{5} w(\text{OPT}) = \frac{4+q}{5} w(\text{OPT}). \end{aligned}$$

(ii) Для задачи на максимум имеет место оценка $w(G_4) \geq w(\text{OPT}')$. В худшем случае граф $H_1 \cup H_2$ получается из графа G_4 заменой $2n/5$ рёбер веса q на рёбра веса 1. Следовательно,

$$\begin{aligned} w(H_1 \cup H_2) &\geq w(G_4) + 2n/5 - \frac{2n}{5} \cdot q \geq w(\text{OPT}') - \frac{(q-1)}{5} w(\text{OPT}') \\ &= \frac{6-q}{5} w(\text{OPT}'). \end{aligned}$$

Теорема 5 доказана.

В качестве частного случая при $q = 2$ получаем

Следствие. Для задачи 2-PSP_{min}(1, 2) алгоритм $A_{6/5}$ имеет оценку точности $6/5$.

Замечание 8. Если $w(\text{OPT}) > 2n$, то для веса полученного решения верна оценка $w(H_1 \cup H_2) \leq w(G_4) - 2n/5 + 2\frac{2n}{5} \leq (1 + \frac{1}{5(1+\rho)})w(\text{OPT})$. Ясно, что при возрастании ρ оценка улучшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев А. А., Бабури́н А. Е., Гимади Э. Х. Полиномиальный алгоритм с оценкой $3/4$ для нахождения двух непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 2. С. 11–20.
2. Бабури́н А. Е., Гимади Э. Х., Коркишко Н. М. Приближённые алгоритмы для нахождения двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2004. Т. 11, № 1. С. 11–25.
3. Berman P., Karpinski M. $8/7$ approximation algorithm for (1, 2)-TSP // Proc. of the 17th annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms, SODA 2006 (Miami, January 22–26, 2006). New York: ACM Press, 2006. P. 641–648.
4. Blaser M., Shankar Ram L. An improved approximation algorithm for TSP with distances one and two // Fundamentals of computation theory. Berlin: Springer, 2005. P. 504–515. (Lecture Notes on Comput. Sci.; V. 3623.)

5. **Della Croce F., Paschos V. Th., Wolfer Calvo R.** Approximating the 2-peripatetic salesman problem // 7th Workshop on modeling and algorithms for planning and scheduling problems, MAPSP 2005 (Siena, Italy, June 6–10, 2005). Berlin: Springer, 2005. P. 114–116.
6. **de Brey M. J. D., Volgenant A.** Well-solved cases of the 2-peripatetic salesman problem // Optimization. 1997. V. 39, N 3. P. 275–293.
7. **de Kort J. B. J. M.** Lower bounds for symmetric K -peripatetic salesman problems // optimization. 1991. V. 22, N 1. P. 113–122.
8. **de Kort J. B. J. M.** Bounds for the symmetric 2-peripatetic salesman problem // Optimization. 1992. V. 23, N 4. P. 357–367.
9. **de Kort J. B. J. M.** A branch and bound algorithm for symmetric 2-peripatetic salesman problems // European J. Oper. Res. 1993. V. 70, N 2. P. 229–243.
10. **Duchenne E., Laporte G., Semet F.** Branch-and-cut algorithms for the undirected m -peripatetic salesman problem // European J. Oper. Res. 2005. V. 162, N 3. P. 700–712.
11. **Gabow H. N.** An efficient reduction technique for degree-restricted subgraph and bidirected network flow problems // Proc. 15th annual ACM symposium on theory of computing (Boston, April 25–27, 1983). New York: ACM, 1983. P. 448–456.
12. **Krarpup J.** The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications. Dordrecht: Reidel, 1975. P. 173–178.
13. **Papadimitriou C. H., Yannakakis M.** The traveling salesman problem with distances one and two // Math. Oper. Res. 1993. V. 18, N 1. P. 1–11.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: gim@math.nsc.ru

Статья поступила

18 августа 2007 г.

Переработанный вариант —

9 ноября 2007 г.