ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2007. Серия 2. Том 14, № 2. 62–75

УДК 512.643.8:519.85

МЕТОДЫ КОРРЕКЦИИ НЕСОВМЕСТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С РАЗРЕЖЕННЫМИ МАТРИЦАМИ

В. А. Горелик, *И. А. Золтоева*, *Р. В. Печёнкин*

Рассматривается задача минимальной коррекции коэффициентов несовместной системы линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей (в частности, блочного вида). Предлагаются алгоритмы, обеспечивающие приближённое нахождение оптимального решения поставленной задачи в евклидовой норме и полиэдральных матричных нормах. Рассмотренные задачи матричной коррекции проиллюстрированы численными примерами.

Введение

Проблема коррекции (аппроксимации) несовместных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования является весьма актуальной. Ей посвящено много работ (см., например, [2–6, 7,12–14]). В последнее время особый интерес представляют задачи коррекции несовместных систем с определённой структурой (Тёплица, блочные и др.) [4–6, 14]. В настоящей статье рассматривается матричная коррекция несовместных линейных систем с разреженными матрицами. Естественным требованием для таких задач является сохранение разреженной структуры, что вносит ограничение на структуру матрицы коррекции, но с другой стороны уменьшает размерность задачи, что приводит к построению более эффективных алгоритмов. Разреженные линейные системы достаточно распространены. Одним из основных источников разреженных матриц являются математические модели технических устройств, состоящих из большого числа элементов, связи между которыми локальны (например, сложные строительные конструкции и большие электрические цепи) [10]. Они также применяются в моделировании нефтяных резервуаров, в расчётах моделей зданий и сооружений, проектировании гидравлических сетей [11, 9].

Определение. *Разреженной матрицей* называется вещественная

матрица, в которой большинство элементов равны нулю:

$$A = \{a_{ij} \mid a_{ij} = 0, (i,j) \in K_0, K_0 \subset K\},$$
$$K = \{(i,j) \mid i = 1,...,m; j = 1,...,n\},\ \dim(K_0) \geqslant \dim(K)/2 = m * n/2.$$

Обозначим через $\mathfrak{R}_{m,n}$ множество всех вещественных матриц размера $m \times n$, имеющих фиксированную разреженную структуру, задаваемую посредством K_0.

1. Коррекция системы линейных уравнений с разреженной матрицей

Пусть дана несовместная система линейных алгебраических уравнений вида $Ax = b$, где $A \in \mathfrak{R}_{m,n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \neq 0$.

Требуется найти матрицу $H^* \in \mathfrak{R}_{m,n}$ и вектор $h^* \in \mathbb{R}^m$ такие, что система $(A + H^*)x = b + h^*$ совместна и

$$\|[-h^*, H^*]\|_p = \min_{H \in \mathfrak{R}_{m,n}, h \in \mathbb{R}^m, (A+H)x = b+h, x \in \mathbb{R}^n} \|[-h, H]\|_p\,, \tag{1}$$

где $\|A\|_p = (\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p)^{1/p}$ – гёльдерова норма матрицы. Все дальнейшие результаты справедливы при любом $p \geqslant 1$, но реально, как правило, используются $p = 1$ и $p = \infty$ ($\|A\|_\infty = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$).

Рассмотрим несколько полезных преобразований, с помощью которых линеаризуем данную задачу.

По условию задачи (1) разреженная матрица H той же структуры, что и A, поэтому можно записать $H = \{h_{ij} \mid h_{ij} = 0,\ (i,j) \in K_0\}$. Матрице H однозначно соответствует вектор

$$\alpha = (h_{ij} \mid (i,j) \in K \backslash K_0) \in \mathbb{R}^k,\ k = \dim(K \backslash K_0).$$

Матрица H — параметрическая, зависящая от вектора α, поэтому можно ввести обозначение $H(\alpha)$.

Каждому вектору $x \in \mathbb{R}^n$ поставим в соответствие матрицу $\aleph(x) = (x_{rs}) \in \mathbb{R}^{m \times k}$, где

$$x_{rs} = \begin{cases} x_{j_l}, & \text{если } r = i_l, s = l, 1 \leqslant l \leqslant k, i_l \in I_A, j_l \in J_A, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2}$$

а множества I_A и J_A имеют следующий вид:

$$I_A = \{i : (i,j) \in K \backslash K_0\} = \{i_1, \dots, i_k\} = \{i_l \mid l = 1, \dots, k\},$$
$$J_A = \{j \mid (i,j) \in K \backslash K_0\} = \{j_1, \dots, j_k\} = \{j_l \mid l = 1, \dots, k\}. \tag{3}$$

Параметрическая матрица $\aleph(x)$, задаваемая формулой (2), позволяет получить полезное тождество, связывающее $x, \alpha, H(\alpha)$ и $\aleph(x)$.

Лемма. $H(\alpha)x \equiv \aleph(x)\alpha$.

Доказательство.

$$H(\alpha)x = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} h_{1j}x_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} h_{mj}x_j \end{bmatrix};\ \sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_j = \sum_{j_l \in J_A} h_{i_l j_l} x_{j_l}, \tag{4}$$
$$i = 1, ..., m,\ (i_l, j_l) \in K \backslash K_0,\ l = 1, ..., k.$$

Используя обозначения (3), вектор α запишем в следующем виде:

$$\alpha = (h_{i_l j_l} \mid\ (i_l, j_l) \in K \backslash K_0).$$

Тогда

$$\aleph(x)\alpha \overset{(2)}{=} \sum_{j_l \in J_A} x_{j_l} h_{i_l j_l}, (i_l, j_l) \in K \backslash K_0,\ 1 \leqslant l \leqslant k. \tag{5}$$

Из соотношений (4) и (5) следует, что тождество $H(\alpha)x \equiv \aleph(x)\alpha$ выполняется. Лемма доказана.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Искомая матрица H имеет вид $H = \begin{pmatrix} 0 & h_{12} & h_{13} & 0 \\ 0 & 0 & h_{23} & 0 \\ 0 & h_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{44} \end{pmatrix}$. Тогда $\alpha = (h_{12}, h_{13}, h_{23}, h_{32}, h_{44})$, $I_A = \{1, 1, 2, 3, 4\}$, $J_A = \{2, 3, 3, 2, 4\}$, $\aleph(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}$,

$$H(\alpha)x = \begin{pmatrix} 0 & h_{12} & h_{13} & 0 \\ 0 & 0 & h_{23} & 0 \\ 0 & h_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{12}x_2 + h_{13}x_3 \\ h_{23}x_3 \\ h_{32}x_2 \\ h_{44}x_4 \end{pmatrix},$$

$$\aleph(x)\alpha = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{13} \\ h_{23} \\ h_{32} \\ h_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{12}x_2 + h_{13}x_3 \\ h_{23}x_3 \\ h_{32}x_2 \\ h_{44}x_4 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что некоторый вектор x и матрица $H(\alpha)$ заданы. Рассмотрим вектор невязок исследуемой системы линейных алгебраических уравнений

$$r(\alpha, x) = b - (A + H(\alpha))x. \tag{6}$$

Исходная задача может быть сформулирована как задача безусловной минимизации вида

$$\left\| \begin{array}{c} r(\alpha, x) \\ \alpha \end{array} \right\|_p \to \min_{\alpha, x}. \tag{7}$$

Так как $(A + H(\alpha))x = b + h$, то $-h = r(\alpha, x)$, а $\|H(\alpha)\|_p = \|\alpha\|_p$.

Подвергнем векторы α и x линейным приращениям $\Delta\alpha$ и Δx. Рассмотрим вектор $r(\alpha+\Delta\alpha, x+\Delta x)$. В силу леммы выполняется тождество $H(\Delta\alpha)x = \aleph(x)\Delta\alpha$. Отбрасывая слагаемое $H(\Delta\alpha)\Delta x$ как величину второго порядка малости, получаем

$$r(\alpha + \Delta\alpha, x + \Delta x) = r(\alpha, x) - \aleph(x)\Delta\alpha - (A + H(\alpha))\Delta x. \tag{8}$$

Используя соотношения (6) и (8), для решения задачи (7) применим алгоритм обобщенной наименьшей нормы (Total Least Norm, TLN алгоритм [12]).

Алгоритм TLN

Вход: *векторы* $\alpha \in \mathbb{R}^k, x \in \mathbb{R}^n$, и $k = \dim(K \backslash K_0)$.

Выход: *векторы* α_{opt}, x_{opt} .

1. *Положить* $x = x_0$, *сформировать* $\aleph(x)$, $r = b - Ax$.

2. **Повторять**

   (a) $\left\| \begin{bmatrix} \aleph(x) & A + H(\alpha) \\ 1_k & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangle\alpha \\ \triangle x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r \\ \alpha \end{bmatrix} \right\|_p \to \min_{\triangle\alpha, \triangle x},$

   (b) $x = x + \triangle x, \quad \alpha = \alpha + \triangle\alpha,$

   (c) *Сформировать* $H(\alpha)$, $\aleph(x)$, $r = b - (A + H)x$,

   пока не выполнится $\|\triangle\alpha, \triangle x\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Вспомогательная задача минимизации, решаемая на каждом шаге алгоритма TLN, при различных p решается различными методами. При $p = 2$ она превращается в задачу решения системы линейных алгебраических уравнений методом наименьших квадратов, которая, как известно, может быть решена с использованием псевдообращения матрицы

$$M = \begin{bmatrix} \aleph(x) & A + H(\alpha) \\ 1_k & 0_n \end{bmatrix}$$

или её разложения в произведение ортогональной Q и верхней треугольной R матриц, т. е. так называемого QR-разложения [8]. При $p = \infty$ задача минимизации сводится к задаче линейного программирования: $u \to \min\limits_{u,\Delta\alpha,\Delta x}$ при ограничениях:

$$\begin{cases} u \geqslant \aleph(x)\Delta\alpha + (A + H(\alpha))\Delta x - r(\alpha, x), \\ u \geqslant -\aleph(x)\Delta\alpha - (A + H(\alpha))\Delta x + r(\alpha, x), \\ u \geqslant \alpha + \Delta\alpha, \\ u \geqslant -\alpha - \Delta\alpha. \end{cases}$$

Так как в рассматриваемой задаче коррекции подвержена как матрица A, так и вектор b, то имеет смысл использовать модификацию алгоритма TLN, на каждом шаге которой перестраивается как левая, так и правая часть, что, как показывают вычислительные эксперименты, является более эффективным. Для описания модифицированного алгоритма удобно переформулировать задачу (7) в виде: найти

$$\min_{\alpha,x,\beta} \left\| \begin{matrix} r(\alpha, x, \beta) \\ \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\|_p , \tag{9}$$

где $r(\alpha, x, \beta) = (b + \beta) - (A + H(\alpha))x$, а $H(\alpha)$ и β — матрица и вектор ошибок соответственно. Так как $h = \beta - r(\alpha, x, \beta)$, то фактически задача (9) несколько отличается от (7) . В дальнейшем мы устраним это различие с использованием штрафных функций. Рассмотрим линейное приращение вектора невязки $r(\alpha, x, \beta)$:

$$\begin{aligned} r(\alpha+\Delta\alpha, x+\Delta x, \beta+\Delta\beta) &= (b+\beta+\Delta\beta) - (A+H(\alpha)+H(\Delta\alpha))(x+\Delta x) \\ = (b + \beta) - (A + H(\alpha)x &+ \Delta\beta - (A + H(\alpha))\Delta x - H(\Delta\alpha) + H(\Delta\alpha)\Delta x \\ &= r(\alpha, x, \beta) - (A + H)\Delta x - \aleph(x)\Delta\alpha + \Delta\beta. \end{aligned}$$

С учётом последнего соотношения линеаризованная задача формулируется в следующем виде: найти

$$\min_{\Delta\alpha,\Delta x,\Delta\beta}\left\|\begin{bmatrix}\aleph(x) & A+H(\alpha) & -1_m\\ 1_k & 0_n & 0_m\\ 0_k & 0_n & 1_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta x\\ \Delta\beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-r\\ \alpha\\ \beta\end{bmatrix}\right\|_p. \tag{10}$$

Соответствующая модификация алгоритма TLN для задачи (9) представлена в виде модифицированного алгоритма обобщённой наименьшей нормы MTLN (Modified Total Least Norm).

Алгоритм MTLN

Вход: *векторы* $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ x = x_{LS},.$

Выход: *векторы* $\alpha_{opt}, \beta_{opt}, x_{opt}$.

1. *Положить* $x = x_0$, *сформировать* $\aleph(x),\ r = b - Ax.$

2. **Повторять**

(*a*) $$\left\|\begin{bmatrix}\aleph(x) & A+H(\alpha) & -1_m\\ 1_k & 0_n & 0_m\\ 0_k & 0_n & 1_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangle\alpha\\ \triangle x\\ \triangle\beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-r\\ \alpha\\ \beta\end{bmatrix}\right\|_p \to \min_{\triangle\alpha,\triangle x,\triangle\beta},$$

(*b*) $x = x + \triangle x, \quad \alpha = \alpha + \triangle\alpha, \quad \beta = \beta + \triangle\beta,$

(*c*) *Сформировать* $H(\alpha),\ \aleph(x),\ r = (b+\beta) - (A+H)x,$

пока не выполнится $\|\triangle\alpha, \triangle x, \triangle\beta\|_\infty \leqslant \varepsilon.$

2. Коррекция системы линейных уравнений с блочной матрицей коэффициентов

Пусть дана несовместная система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, где матрица A имеет следующую блочную структуру:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c}\multicolumn{4}{c}{A_0}\\ \hline A_1 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & A_2 & \ddots & \vdots\\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_Q\end{array}\right], \tag{11}$$

$$A \in \mathbb{R}^{M\times N}, A_0 \in \mathbb{R}^{m_0\times N},\ A_v \in \mathbb{R}^{m_v\times n_v}, x \in \mathbb{R}^N,\ v = 1, ..., Q,$$
$$\sum_{v=0}^{Q} m_v = M, \sum_{v=0}^{Q} n_v = N,\ n_0 = 0.$$

Первый случай. Будем считать, что подсистема $A_0x = b_0$ совместна. Коррекции будут подвергаться матрицы $A_1,\ A_2, \ldots, A_Q$. Тогда матрицу H можно записать в виде:

$$H = \{h_{ij} \mid\ h_{ij} = 0 \text{ при } (i,j) \in K_0 \subset K\} \tag{12}$$

где $K = \{(i,j) \mid\ i = 1,...,M; j = 1,...,N\}$,

$$K \backslash K_0 = \bigcup_{v=1}^{Q} \Big\{(i,j) \mid \sum_{l=0}^{v-1} m_l + 1 \leqslant i \leqslant \sum_{l=0}^{v-1} m_l + v, \\ \sum_{l=0}^{v-1} n_l + 1 \leqslant j \leqslant \sum_{l=0}^{v-1} n_l + v\Big\}.$$

Множество разреженных матриц вида (12) обозначим через $\Re^{\delta}_{m,n}$.

Требуется найти матрицу H^* и вектор h^* такие, что совместна система $(A + H^*)x = b + h^*$ и

$$\|[-h^*, H^*]\|_p = \min_{H \in \Re^{\delta}_{m,n}, h \in \mathbb{R}^M, (A+H)x = b+h, x \in \mathbb{R}^N} \|[-h, H]\|_p .$$

Матрице H однозначно соответствует вектор $\alpha = (h_{ij} \mid\ \ (i,j) \in K \backslash K_0)$ из $\mathbb{R}^k$, где $k = \dim(K \backslash K_0) = \sum\limits_{v=1}^{Q} m_v n_v$.

Рассмотрим задачу безусловной минимизации вида

$$\left\| \begin{array}{c} r(\alpha, x) \\ \alpha \end{array} \right\|_p \to \min_{\alpha, x} . \tag{13}$$

Вектору x аналогично (2) поставим в соответствие матрицу $\aleph(x)$, $\aleph(x) \in \mathbb{R}^{M \times k}$, и линеаризуем задачу (13) с учётом блочной структуры. Тогда задачу можно решить, применяя алгоритм TLN, рассмотренный в п. 1. В [4, 5] рассматривался другой подход для решения данной задачи, основанный на параметрическом представлении общего решения системы $A_0x = b_0$.

Второй случай. Пусть система $A_0x = b_0$ не обязательно совместна, а коррекции будут подвергаться как матрица A_0, так и матрицы $A_1,\ A_2, ..., A_Q$. Для этого случая подход [4, 5] не применим. С учётом коррекции матрицы A_0 получаем, что матрицу H можно записать в виде

$$H = \{h_{ij} \mid h_{ij} = 0 \text{ при } (i,j) \in K_0 \subset K\},$$

где $K = \{(i,j) \mid \ i = 1, ..., M; j = 1, ..., N\}$,

$$K \backslash K_0 = \bigcup_{v=1}^{Q} \{(i,j) \mid \sum_{l=0}^{v-1} m_l + 1 \leqslant i \leqslant \sum_{l=0}^{v-1} m_l + v,$$
$$\sum_{l=0}^{v-1} n_l + 1 \leqslant j \leqslant \sum_{l=0}^{v-1} n_l + v\} \bigcup \{(i,j) \mid \ 1 \leqslant i \leqslant m_0, \ 1 \leqslant j \leqslant N\}.$$

Соответственно структуре H изменится матрица $\aleph(x)$, а в остальном метод решения задачи коррекции в данном случае аналогичен предыдущему.

3. Использование штрафных функций в алгоритме коррекции

До сих пор мы рассматривали задачи коррекции левой и правой частей несовместных систем. Однако алгоритм TLN непосредственно не применим для задачи коррекции левой части, т. е. задачи (1) с условием $h = 0$. По сути (7) есть свертка двух критериев оптимальности. Первый критерий — критерий малости коррекции (норма $\|\alpha\|$ минимальна), второй критерий — критерий малости нормы вектора поправок правой части $\|r(\alpha, x)\|$.

Очевидно, что при использование свёртки этих двух критериев совместность скорректированной системы при фиксированной правой части не гарантируется, потому что не гарантируется равенство нулю вектора поправок правой части. Вектор $r(\alpha, x)$ может принимать какое-то «минимальное значение» (но равным нулю он быть не обязан).

Совершенно иной содержательный смысл имеет подход, при котором норма вектора $\big\|\alpha\big\|$ есть целевая функция, а норма вектора невязки (вектора поправок правой части) $\big\|r(\alpha, x)\big\|$ имеет смысл штрафной функции. Фактически, в такой постановке минимизируется норма коррекции системы при ограничении в виде совместности. Совместность гарантируется тем, что штрафуется функция нормы вектора невязки (факт штрафа равносилен ограничению, что скорректированная система совместна).

Выше сказанное приводит к критерию оптимальности для решения задачи (1) при $h = 0$ в следующем виде

$$\big\|\alpha\big\|_p + \mathbf{C}\big\|r(\alpha, x)\big\|_p \to \min_{\alpha, x}, \tag{14}$$

где $\mathbf{C}$ — коэффициент штрафа, $\mathbf{C} \to \infty$.

При фиксированном p штрафная функция $\Phi(\alpha, x, \mathbf{C}) = \mathbf{C}\big\|r(\alpha, x)\big\|_p$ удовлетворяет требованиям, накладываемым к внешним штрафным

функциям, а именно:

$$\Phi(\alpha, x, \mathbf{C}) = \begin{cases} 0, \text{ если } [\alpha, x] \in \mathbb{G} \\ \to \infty, \text{ если } [\alpha, x] \notin \mathbb{G} \text{ и } \mathbf{C} \to \infty, \end{cases}$$

где $\mathbb{G}$ — допустимая область, т. е. те векторы $[\alpha, x]$, которые приводят систему $(A + H(\alpha))x = b$ к совместности ($\|r(\alpha, x)\|_p = 0 \Leftrightarrow [\alpha, x] \in \mathbb{G}$).

Для произвольной последовательности $\mathbf{C}_n \to \infty$ введём в рассмотрение последовательности α_n и x_n решений задачи (14) при соответствующем $\mathbf{C}_n$. Некоторые подпоследовательности этих последовательностей будут обозначаться через $\{\mathbf{C}_{n'}\}$, $\{\alpha_{n'}\}$ и $\{x_{n'}\}$.

Здесь приводится модификация алгоритма TLN — алгоритм PTLN (Penalty Total Least Norm) в том случае, когда используется критерий коррекции только левой части системы.

Алгоритм PTLN

Вход: *векторы* $\alpha \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{C_0} \in \mathbb{R}^\mathbf{1}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \in \mathbb{R}$.
Выход: *векторы* $\alpha_{opt} \in \mathbb{R}^N$ *и* $x_{opt} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{C} \gg \mathbf{C_0}$.
1. *Положить* $x = x_0$, *сформировать* $\aleph(x)$, $\mathbf{C} = \mathbf{C_0}$
2. **Повторять**

Повторять

(a) $$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{C}\,\aleph(x) & \mathbf{C}\,(A + H(\alpha)) \\ 1_k & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangle\alpha \\ \triangle x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{C}\,r(\alpha, x) \\ \alpha \end{bmatrix} \right\|_p \to \min_{\triangle\alpha, \triangle x},$$

(b) $x = x + \triangle x, \quad \alpha = \alpha + \triangle\alpha$,

(c) *Сформировать* $H(\alpha)$, $\aleph(x)$,

пока не выполнится $\|\triangle x, \triangle\alpha^T\|_\infty \leqslant \varepsilon_1$.

Положить $x^* = x, \quad \alpha^* = \alpha, \quad \mathbf{C} = \mathbf{2C}$.

Сформировать $H(\alpha), \aleph(x)$.

пока не выполнится $\|r\| \leqslant \varepsilon_2$.

Положить $x_{opt} = x, \quad \alpha_{opt} = \alpha$.

В том случае, когда по физическому смыслу задачи требуется корректировать левую и правую части системы, критерий оптимальности алгоритма обобщённой наименьшей нормы принимает вид:

$$\|\alpha\|_p + \|\beta\|_p + \mathbf{C}\|r(\alpha, \beta, x)\|_p \to \min_{\alpha, \beta, x}, \tag{15}$$

алгоритм имеет в этом случае вид, аналогичный алгоритму PTLN. При использовании критерия (14) и (15) в пределе при $\mathbf{C} \longrightarrow \infty$ достигается

матрица коррекции и вектор коррекции правой части такие, что скорректированная система совместна. В следующем разделе приведены вычислительные эксперименты, демонстирующие применение данных алгоритмов к решению задачи коррекции несовместных систем с блочной структурой.

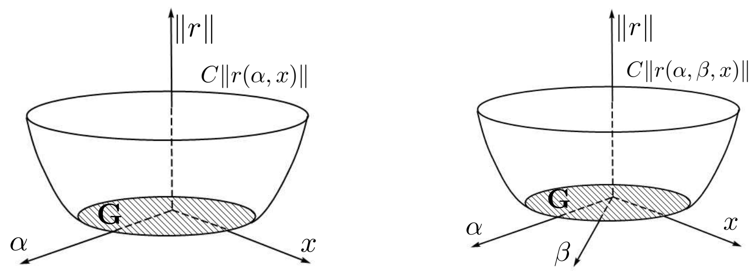

Рис. 1. Схематичное представление пространств задач (14), (15): $\mathbb{G}$ — допустимая область, элементы её приводят систему $Ax = b$ к совместности, $\mathbf{C}\big\|r\big\|$ — штрафные функции

На рис. 1 схематично изображены пространства задач (14), (15) при использовании внешних функций штрафа. Для векторов $[\alpha, x] \notin \mathbb{G}$ норма вектора невязки не равна нулю, а следовательно, эти векторы не приводят систему к совместности. При фиксированном $\mathbf{C}$, используя эти векторы в качестве начального приближения для (15), будем получать локальный оптимум вблизи границы множества $\mathbb{G}$; при увеличении значения $\mathbf{C}$ штрафная функция будет становится всё более и более крутой, тем самым прижимая текущее решение $[\alpha_{\mathbf{C}}, x_{\mathbf{C}}]$ к допустимой области. Заметим, что при $\mathbf{C} \gg 1$ вблизи границы множества $\mathbb{G}$ возможны возникновения «оврагов», что сказывается на сходимости.

4. Вычислительные эксперименты

Было рассмотрено несколько модельных несовместных систем малой размерности с блочной структурой. Указанные модельные системы были получены из совместных систем линейных алгебраических уравнений после внесения возмущений в их параметр. В качестве типичной задачи приводится несовместная система, рассмотренная в работе [3]. Существенное различие подхода, описанного в нашей статье, от подхода, описанного в [3], заключается в том, что для решения задачи коррекции блочной системы для получения параметрического представления вектора решения не требуется использовать подсистему A_0.

Основываясь на подходе, описанном в настоящей статье, можно получить матрицу коррекции системы, обладающую аналогичной блочной структурой, в том числе получить матрицу коррекции для подсистемы A_0.

Система, приведённая в работе [3], имееет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \\ 7 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

В табл. 1–4 и на рис. 2, 3 приводятся результаты применения критериев (14),(15) для рассматриваемой блочной системы (16).

Т а б л и ц а 1. Результаты решения системы (16) при использовании критерия (13) при $p = 2$

H					x	$r \cdot 10^{-7}$
−0,0107	−0,0048	0,0137	−0,0048	−0,0101		−0,6264
0,0546	0,0251	−0,0692	0,0252	0,0517	2,3216	0,3117
0,1494	0,0686	0	0	0	1,0629	0,0290
−0,0100	−0,0045	0	0	0	−2,9480	0,0007
−0,0572	−0,0263	0	0	0	1,0685	−0,3311
0	0	−0,0052	0,0020	0,0040	2,1961	−0,0857
0	0	0,0412	−0,0150	−0,0308		−0,1667

Т а б л и ц а 2. Результаты решения системы (16) при $p = 2$. Результат, представленный в работе [4]: корректируется только левая часть

H					x	$r \cdot 10^{-15}$
0	0	0	0	0		0,0000
0	0	0	0	0	2,3090	0,0000
0,1765	0,0857	0	0	0	1,1219	0,0000
−0,0172	−0,0083	0	0	0	−2,6440	0,0000
0,0026	0,0012	0	0	0	0,9032	0,0000
0	0	−0,0157	0,0053	0,0130	2,1906	0,0000
0	0	0,1938	−0,0662	−0,1606		0,0000

Т а б л и ц а 3. Результаты решения системы (16); при использовании критерия (15) корректируется левая и правая часть системы

H					$h \cdot 10^{-6}$	x	$r \cdot 10^{-7}$
−0,0103	−0,0046	0,0131	−0,0046	−0,0097	−0,7645		−0,3235
0,0518	0,0238	−0,0656	0,0239	0,0490	−0,7629	2,3090	−0,1266
0,1300	0,0597	0	0	0	−0,5612	1,1219	0,0694
−0,0077	−0,0035	0	0	0	−0,5378	−2,6440	−0,0378
−0,0486	−0,0223	0	0	0	0,4331	0,9032	−0,0965
0	0	−0,0053	0,0020	0,0040	−0,8437	2,1906	0,0254
0	0	0,0392	−0,0143	−0,0293	0,6332		−0,1050

Т а б л и ц а 4. Результаты решения системы (16) при $p = 2$. Результат, представленный в работе [4]: корректируется левая и правая часть системы

H					h	x	$r \cdot 10^{-15}$
0	0	0	0	0	0		$-0{,}1665$
0	0	0	0	0	0	2,3072	0,5829
0,1769	0,0929	0	0	0	$-0{,}0766$	1,2120	0,7008
$-0{,}0395$	$-0{,}0207$	0	0	0	0,0171	$-2{,}8497$	0,9914
0,0577	0,0303	0	0	0	$-0{,}0250$	0,8237	0,6939
0	0	0,0173	$-0{,}0050$	$-0{,}0141$	0,0060	2,3236	0,7693
0	0	0,1673	$-0{,}0483$	$-0{,}1364$	0,0587		0,6745

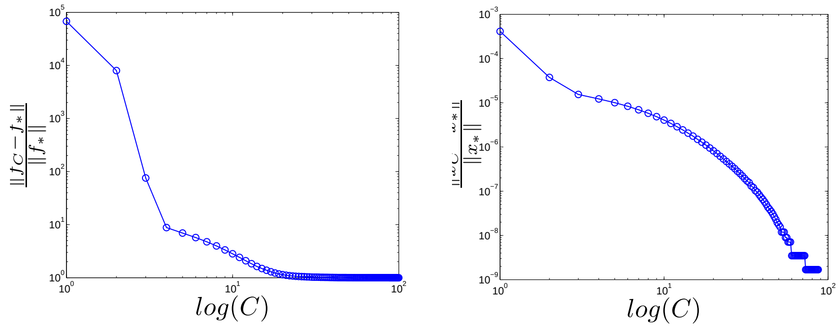

Рис. 2. Сходимость по целевой функции и по аргументу для задачи (13) при $p = 2$

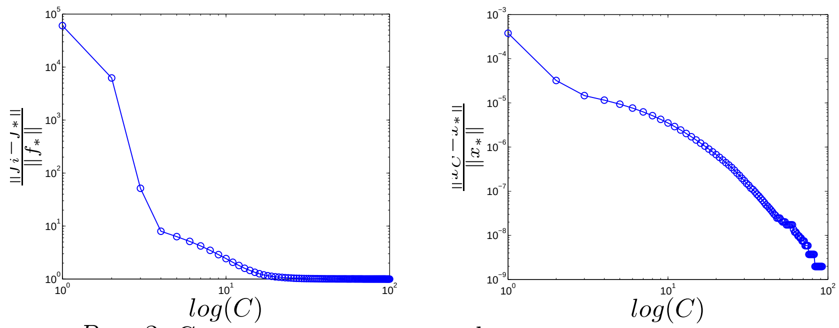

Рис. 3. Сходимость по целевой функции и по аргументу для задачи (15) при $p = 2$

Приведённые в данной статье результаты позволяют сделать вывод о том, что, используя алгоритм наименьшей обобщённой нормы TLN и его модификации MTLN и PTLN, можно решать задачи коррекции несовместных линейных систем с разреженными матрицами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ватолин А. А.** Несобственные задачи математического программирования и методы их коррекции. Дисс. на соискание ученой степени д-ра физ.-мат.наук: 01.01.09. Екатеринбург, 1992.

2. **Горелик В. А.** Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41, № 11. С. 1697–1705.

3. **Горелик В. А., Ерохин В. И.** Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы. М.: ВЦ РАН, 2004.

4. **Горелик В. А., Ерохин В. И., Печенкин Р. В.** Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2005. Том 12, № 2. С. 3–23.

5. **Горелик В. А., Ерохин В. И., Печенкин Р. В.** Минимаксная матричная коррекция несовместимых систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов// Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. № 5. С. 52–62.

6. **Горелик В. А., Ерохин В. И., Печенкин Р. В.** Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений. М.: ВЦ РАН, 2006.

7. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Физматлит, 1983.

8. НейрОК-Техсофт моделирование нефтяных резервуаров // http://www.neurok.ru/techsoft/index.shtml

9. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

10. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса и Зейделя (Математика) // http://ref.ewreka.ru/r17087

11. HydraNet-Гидравлические сети // http://www.ippe.ru/podr/tph/hematic/hydranet.htm

12. **Rosen J. B., Park H., Glick J.** Total least norm problems: formulation and solution // illUMSI reserch report. Minniapolis(Mn) Univ. of Minnesota. Supercomput. inst.,1993, 93/223.18 p.

13. **Van Huffel S., Vandewale J.** The total least squares problems: computational aspects and analysis. Philadelphia, CA: SIAM Publishing, 1991.

14. **Lemmerling P.** Structured total least squares: analysis, algorithms and applications. PhD dissertation. Kattholieke Universiteit Leuven, Arenbergkasteel, Belgium, 1999.

Адрес авторов:

Вычислительный центр РАН,
ул. Вавилова, 40,
119333 Москва,
Россия.
E-mail: gorelik@ccas.ru,
Ruslan.Pechenkin@mail.ru,
zia7@mail.ru

Статья поступила
6 февраля 2007 г.
Переработанный вариант —
17 мая 2007 г.