ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2007. Серия 2. Том 14, № 2. 76–91

УДК 519.7

НАСЛЕДСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. Г. Парватов

Рассматриваются функции, принимающие значения в конечном множестве D и зависящие от переменных, принимающих значения в конечном множестве E. Множества таких функций, замкнутые относительно операций перестановки и отождествления переменных, называются *наследственными*. Изучаются возможности эффективного задания наследственных систем при помощи запрещающих и порождающих множеств, а также посредством предикатов. На наследственные системы переносятся известные для замкнутых классов теоремы: о соответствии Галуа, теорема Яблонского о предикатно характеризуемых классах, теорема Кузнецова о полноте.

1. Основные понятия

Пусть заданы конечные множества E и D. Будем рассматривать функции $f : E^n \to D$ при всевозможных натуральных n. Множество всех таких функций обозначается через $P_{E,D}$. Вместо $P_{E,E}$ будем писать P_E. Для функций в P_E считаются известными понятия суперпозиции, замыкания и замкнутого класса. Замкнутый класс функций из P_E, включающий множество S_E всех селекторных (тождественно равных некоторому своему аргументу) функций из P_E, называется *клоном* (на множестве E). Пусть заданы клоны R и L на соответствующих множествах E и D. Множество P функций из $P_{E,D}$ назовём (L, R)-*замкнутым*, если оно содержит суперпозицию (не обязательно бесповторную) $f(g, h, \ldots)$ каждый раз, когда функция f принадлежит классу L и функции $g, h, \ldots$ принадлежат классу P, а также каждый раз, когда функция f принадлежит классу P и функции $g, h, \ldots$ принадлежат классу R. Любой (L, R)-замкнутый класс P можно задать, указав в нём *порождающее подмножество* $F \subseteq P$ такое, что P есть наименьший по включению (L, R)-замкнутый класс среди классов, содержащих множество F. Через $[F]_{L,R}$ будем обозначать (L, R)-замкнутый класс, порождаемый системой функций F.

Множество P функций из $P_{E,D}$ назовём (L, R)-*наследственным*, если в нём содержится множество $[f]_{L,R}$ вместе с любой его функцией

f. Для любого множества T функций из $P_{E,D}$ через $\rangle T\langle_{L,R}$ обозначим (L, R)-наследственную систему, состоящую из всевозможных функций $f \in P_{E,D}$ таких, что $[f]_{L,R} \cap T = \varnothing$. Множество T назовём *запрещающим* для P *относительно* пары (L, R), если $P = \rangle T\langle_{L,R}$, и назовём его *запрещающим* для системы P *в множестве* Q *относительно* пары (L, R), если $P = Q \cap \rangle T\langle_{L,R}$ и $T \subseteq Q \setminus P$. Ясно, что во втором случае $P \subseteq Q$. Будем называть *наследственной системой* всякое (S_D, S_E)-наследственное (или, что то же самое (S_D, S_E)-замкнутое) множество.

Замечание 1. Любой (L, R)-замкнутый класс является и (L, R)-наследственным. Если же клон L не содержит функций, существенно зависящих от двух или более переменных, то верно и обратное. В частности, всякий (L, R)-замкнутый класс является наследственной системой. Таким образом, рассматривая (L, R)-замкнутый класс как (L, R)-наследственную систему, можно говорить о запрещающем множестве для него. В дальнейшем будет рассмотрен ещё один способ задания (L, R)-замкнутых классов — при помощи пар предикатов, определённых на множествах E и D.

Замечание 2. Идея задания наследственных функциональных систем, в том числе и замкнутых классов, запрещающими множествами не является новой. Скажем, лемма о немонотонной функции (см., например, [6]), участвующая в доказательстве теоремы Поста о полноте в $P_{\{0,1\}}$, равносильна утверждению о том, что функция отрицания одна образует запрещающее множество для класса монотонных булевых функций относительно пары (L, R), где $L = [x]$ и $R = [0, 1, x]$.

Определённые выше (L, R)-замкнутые и (L, R)-наследственные функциональные системы составляют основной предмет изучения в данной статье. Эти объекты естественным образом возникают в различных областях математики таких, как математическая логика, теория функций многозначной логики и теория распознавания образов. (L, R)-замкнутые классы возникают и в теории управляющих систем как классы функций, реализуемых в многокаскадных переключательных (или транзисторных) схемах с ограниченным или произвольным числом каскадов. В этой статье для (L, R)-замкнутых классов обобщены известные утверждения из [2, 9] о замкнутых классах, такие как теоремы о соответствии Галуа, теорема Яблонского о конечно описываемых замкнутых классах, теорема Кузнецова о полноте.

2. Сохраняемые предикаты

В этом разделе для дальнейшего использования напомним некоторые известные факты из [2, 6, 9], связанные с сохраняемыми предикатами и клонами. Множество всех предикатов на множестве E будем обозначать через Π_E, несмотря на то, что было бы естественным отождествить его с множеством $P_{E,D}$ при $D = \{0, 1\}$. Предикаты в Π_E будут задаваться посредством формул первого порядка. Предикатные и функциональные символы, участвующие в образовании этих формул, будут интерпретироваться на множестве E обычным образом, либо их интерпретация будет ясна из контекста. Предикаты будут рассматриваться с операциями отождествления и перестановки переменных, а также с операциями конъюнкции и проектирования [2, 6]. Напомним смысл этих операций. *Конъюнкцией* предикатов a и b арностей n и m соответственно называют $(n+m)$-арный предикат c такой, что

$$c(x_1, \dots, x_{n+m}) \equiv a(x_1, \dots, x_n) \wedge b(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}).$$

Конъюнкция предикатов a и b обозначается через $a \wedge b$. *Проекцией* n-арного предиката a по i-й координате называют предикат

$$\exists x_i a(x_1, \dots, x_n);$$

здесь предполагается, что читатель знаком с операцией навешивания квантора существования. Наконец, говорят, что m-арный предикат b получен из n-арного предиката a посредством *перестановки и отождествления переменных*, если для некоторой функции $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ верно $b(x_1, \dots, x_m) \equiv a(x_{f(1)}, \dots, x_{f(n)})$; в этом случае предикат b будем обозначать через a^f. Таким образом, над предикатами в Π_E оказываются определёнными операции конъюнкции и проектирования, а также операции перестановки и отождествления переменных. Множества предикатов, замкнутые относительно всех перечисленных операций и содержащие все *диагонали* (нуль-арные предикаты и предикаты вида

$$x_i = x_j \wedge \ldots \wedge x_k = x_l,$$

где $\{i, j, \dots, k, l\} = \{1, \dots, n\}$ для некоторого натурального n), будем называть *замкнутыми классами предикатов*.

Говорят, что n-местная функция f из P_E *сохраняет* m-арный *предикат* a, если для любых наборов $(x_1^1, \dots, x_m^1), \dots, (x_1^n, \dots, x_m^n)$, удовлетворяющих предикату a, набор $(f(x_1^1, \dots, x_1^n), \dots, f(x_m^1, \dots, x_m^n))$ также удовлетворяет предикату a. Через $\mathrm{pol}_E(X)$ будет обозначаться множество всех функций из P_E, сохраняющих все предикаты из множества или набора X предикатов из Π_E; через $\mathrm{inv}_E(Y)$ будет обозначаться множество всех предикатов, сохраняемых всеми функциями из множества или набора Y функций из P_E. Известно [2, 11, 12], что множество $\mathrm{pol}_E(X)$ является клоном на E, и всякий клон P на множестве E является клоном вида $\mathrm{pol}_E(X)$ для множества $X = \mathrm{inv}_E(P)$. Также известно [2, 11, 12], что множество $\mathrm{inv}_E(Y)$ является замкнутым классом предикатов, и, наоборот, любой замкнутый класс A предикатов из Π_E является классом $\mathrm{inv}_E(Y)$ для $Y = \mathrm{pol}_E(A)$. Сформулированные утверждения составляют суть теории Галуа для клонов. Доказательства этих утверждений можно найти в [2, 6, 11]. Из приведённых утверждений непосредственно следует, что существует следующий инверсный изоморфизм решётки клонов на решётку замкнутых классов предикатов: $P \mapsto \mathrm{inv}_E(P)$, а отображение $A \mapsto \mathrm{pol}_E(A)$ является обратным инверсным изоморфизмом между этими решётками. Из сформулированных утверждений, в частности, следует, что для любого клона $P \subseteq P_E$ можно указать такое множество $A \subseteq \Pi_E$, что

$$P = \mathrm{pol}_E(A).$$

Такое множество A естественно назвать (*предикатным*) *описанием* клона P. В более общей ситуации множество $A \subseteq \Pi_E$ будем называть *описанием* клона P в множестве Q, если $P = Q \cap \mathrm{pol}_E(A)$; в этом случае, очевидно, $P \subseteq Q$. Особый интерес вызывают клоны, имеющие конечные описания. Такие клоны характеризует теорема Яблонского из [10], из которой следует, что для клонов P и Q на множестве E таких, что $P \subseteq Q$, равносильны следующие условия I и II:

I. Клон P имеет такое конечное описание A в клоне Q, что $A \subseteq \Pi_E$ и $P = Q \cap \mathrm{pol}_E(A)$.

II. Существует такая конечная система клонов, содержащихся в клоне Q и строго включающих клон P, что всякий клон, содержащийся в клоне Q и строго включающий клон P, содержит хотя бы один клон из этой системы.

Отметим без доказательства, что, рассматривая клоны P и Q как (L', R')-наследственные системы для любых клонов $L' \subseteq P$ и $R' \subseteq P$, приведённые выше условия I и II можно дополнить ещё одним равносильным им условием

III. Клон P имеет в клоне Q такое конечное запрещающее множество T относительно пары (L', R'), что $T \subseteq Q \setminus P$ и $P = Q \cap \rangle T \langle_{L',R'}$.

Основной целью статьи является доказательство для (L, R)-замкнутых классов (в частности, для наследственных систем) утверждений, аналогичных сформулированным в данном разделе утверждениям о клонах.

3. Сохраняемые 2-предикаты

Упорядоченную пару (a, b) n-арных предикатов $a \in \Pi_E$ и $b \in \Pi_D$ назовём *n-арным 2-предикатом* (на паре множеств E и D). Множество всех таких 2-предикатов (при всевозможных $n = 0, 1, \ldots$) будем обозначать через $\Pi_{E,D}$. Введём понятие сохраняемого 2-предиката. С этой целью для функции $f : E^n \to D$ и натурального числа m введём в рассмотрение функцию $f^{[m]} : (E^m)^n \to D^m$ такую, что

$$f^{[m]}((x_1^1, \ldots, x_m^1), \ldots, (x_1^n, \ldots, x_m^n)) = (f(x_1^1, \ldots, x_1^n), \ldots, f(x_m^1, \ldots, x_m^1)).$$

Будем говорить, что функция f *сохраняет* m-арный 2-*предикат* (a, b), если для любых наборов $x, y, \ldots$, удовлетворяющих предикату a, набор $f^{[m]}(x, y, \ldots)$ удовлетворяет предикату b. Множество всех функций из $P_{E,D}$, сохраняющих все 2-предикаты множества или набора X 2-предикатов из $\Pi_{E,D}$, будем обозначать через $\mathrm{pol}_{E,D}(X)$; через $\mathrm{inv}_{E,D}(Y)$ будем обозначать множество всех 2-предикатов из $\Pi_{E,D}$, сохраняемых всеми функциями множества или набора Y функций из $P_{E,D}$.

Установим некоторые свойства множеств $\mathrm{pol}_{E,D}(X)$ и $\mathrm{inv}_{E,D}(Y)$. Имеет место следующая

Теорема 1. *Для любого подмножества*

$$A \subseteq \Pi_{E,D} \cap (\mathrm{inv}_E(R) \times \mathrm{inv}_D(L))$$

множество $\mathrm{pol}_{E,D}(A)$ *является* (L, R)*-замкнутым классом. Для любого* (L, R)*-замкнутого класса* P *и множества*

$$A = \mathrm{inv}_{E,D}(P) \cap (\mathrm{inv}_E(R) \times \mathrm{inv}_D(L))$$

имеет место равенство $P = \mathrm{pol}_{E,D}(A)$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы проверяется непосредственно. Доказательство второго утверждения аналогично доказательству теоремы 2 из [2] и теоремы 2.1 из [6], но имеет ряд особенностей. Поэтому приведём доказательство второго утверждения теоремы. Включение $P \subseteq \mathrm{pol}_{E,D}(A)$ очевидно. Докажем обратное включение. Возьмём произвольную функцию f из множества $\mathrm{pol}_{E,D}(A)$. Пусть f зависит от m переменных, и пусть наборы $y_1, \ldots, y_m$ выбраны в множестве E^M при $M = |E|^m$ так, что в строках матрицы $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ содержатся все наборы из E^m. При этом наборы y_i рассматриваются как вектор-столбцы, являющиеся столбцами матрицы Y. Пусть M-арный 2-предикат (a, b) такой, что предикату a удовлетворяют всевозможные наборы $g^{[M]}Y$, где $g \in R$, а предикату b удовлетворяют всевозможные наборы $g^{[M]}Y$, где $g \in P$. Непосредственно проверяется, что 2-предикат (a, b) принадлежит множеству A. Следовательно, функция f сохраняет этот 2-предикат. Отсюда следует, что набор $f^{[M]}Y$ удовлетворяет предикату b. В силу определения предиката b получаем, что $f^{[M]}Y = g^{[M]}Y$ для некоторой функции $g \in P$. В силу определения матрицы Y, содержащей в качестве строк все наборы из E^m, функции f и g совпадают. Итак, функция f принадлежит классу P. Теорема 1 доказана.

Замечание 3. Идея задания функциональных систем с помощью пар предикатов предложена А. И. Мальцевым в [4]. В дальнейшем эта идея в разных формах использовалась и другими авторами, например, в [1], где рассматриваются алгоритмы, распознающие свойство сохранения 2-предикатов дискретными функциями.

4. Конечно описываемые наследственные системы

В связи с теоремой 1 целесообразно следующее определение. Подмножество $A \subseteq \Pi_{E,D} \cap (\mathrm{inv}_E(R) \times \mathrm{inv}_D(L))$ назовём (2-*предикатным*) *описанием* класса P относительно пары (L, R), если $P = \mathrm{pol}_{E,D}(A)$. Это подмножество назовём *описанием класса* P *в множестве* Q относительно пары (L, R), если $P = Q \cap \mathrm{pol}_{E,D}(A)$. Во втором случае, очевидно, $P \subseteq Q$. Особый интерес вызывают (L, R)-замкнутые классы, имеющие конечные описания. Оказывается, что эти классы совпадают с (L, R)-замкнутыми классами, имеющими конечное запрещающее множество. Это следует из следующей теоремы 2, являющейся обобщением теоремы Яблонского из [9] о предикатно описываемых классах.

Теорема 2. *Для (L, R)-замкнутых классов P и Q таких, что $P \subseteq Q$, следующие условия равносильны*:

(i) *класс P имеет в Q конечное описание A относительно пары (L, R) такое, что $A \subseteq \Pi_{E,D} \cap (\mathrm{inv}_E(R) \times \mathrm{inv}_D(L))$ и $P = Q \cap \mathrm{pol}_{E,D}(A)$*;

(ii) *класс P имеет в Q конечное запрещающее множество T относительно пары (L, R) такое, что $T \subseteq Q \setminus P$ и $P = Q \cap \rangle T \langle_{L,R}$*;

(iii) существует конечная система (L, R)-замкнутых классов, содержащихся в Q и строго включающих P, такая, что любой (L, R)-замкнутый класс, содержащийся в Q и строго включающий P, содержит хотя бы один класс этой системы.

Доказательство этой теоремы в значительной степени аналогично доказательству соответствующей теоремы из [9] и доказательству теоремы 2.5 из [6]. Однако в приводимом ниже доказательстве имеются некоторые особенности, связанные с необходимостью рассмотрения 2-предикатов вместо предикатов и с появлением условия (ii). Пусть выполняется условие (i). Обозначим через m наибольшее число наборов, удовлетворяющих предикату a при всевозможных 2-предикатах (a, b) из A. Такое m существует, так как множество A конечно. Так как любая функция из множества $Q \setminus P$ не сохраняет некоторый 2-предикат $(a, b) \in A$, то путём отождествления переменных (т. е. замены некоторых переменных подходящими функциями из S_E) из неё можно получить функцию, зависящую не более чем от m переменных и не сохраняющую 2-предикат (a, b), т. е. принадлежащую классу $Q \setminus P$. Это означает, что множество всех функций из $Q \setminus P$, зависящих не более чем от m переменных, образует запрещающее множество для P в Q относительно пары (L, R) (в действительности даже относительно пары (S_D, S_E)). Таким образом, из условия (i) следует условие (ii). Теперь пусть выполняется условие (ii), т. е. P имеет в Q конечное запрещающее множество T, состоящее из функций $t_1, \ldots, t_m$. В этом случае (L, R)-замкнутые классы

$$P_1 = [P \cup \{t_1\}]_{L,R}, \ldots, P_m = [P \cup \{t_m\}]_{L,R}$$

строго включают класс P и содержатся в Q. С другой стороны, любой (L, R)-замкнутый класс P', строго включающий P и содержащийся в Q, содержит некоторую функцию $f \in Q \setminus P$. Тогда множество $[f]_{L,R}$ содержит некоторую функцию t_i. Это следует из определения запрещающего множества T. Но тогда класс P' включает систему P_i. Таким образом, из условия (ii) следует условие (iii). Предположим теперь, что выполняется условие (iii), и пусть $P_1, \ldots, P_m$ — система классов, о которой говорится в этом условии. В каждом множестве $P_i \setminus P$ выберем функцию f_i. Можно считать, что все функции f_i зависят от одинакового числа n переменных. Пусть также $N = |E|^n$. В множестве E^N выберем такие наборы $y_1, \ldots, y_n$, чтобы в строках матрицы $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ содержались все наборы из E^n. Ясно, что такой выбор возможен. Рассмотрим N-арный 2-предикат (a, b) такой, что предикату a удовлетворяют всевозможные наборы $f^{[N]}Y$, где $f \in R$, а предикату b удовлетворяют всевозможные наборы $f^{[N]}Y$, где $f \in P$. Несложно видеть, что 2-предикат $\alpha = (a, b)$ принадлежит множеству $\mathrm{inv}_{E,D}(P) \cap (\mathrm{inv}_E(R) \times \mathrm{inv}_D(L))$; аналогичная ситуация уже встречалась при доказательстве теоремы 1. В частности, имеет место включение $P \subseteq \mathrm{pol}_{E,D}(\alpha)$. Тогда имеет место и включение $P \subseteq Q \cap \mathrm{pol}_{E,D}(\alpha)$. Последнее включение не является строгим, так как в противном случае множество $\mathrm{pol}_{E,D}(\alpha)$ включает некоторый класс P_i, а значит, и некоторую функцию f_i, которая в этом случае сохраняет 2-предикат $\alpha = (a, b)$. Тогда набор $f_i^{[N]}Y$ удовлетворяет предикату b, т. е.

совпадает с набором $g^{[N]}Y$ для некоторой функции $g \in P$. Но в силу определения матрицы Y функции f_i и g совпадают, что невозможно. Теорема 2 доказана.

Как уже отмечалось, всякий (L, R)-замкнутый класс P является одновременно (L', R')-замкнутым, если клоны L' и R' содержатся в соответствующих клонах L и R. При этом множество, являющееся запрещающим для P относительно пары(L', R'), является и запрещающим относительно пары (L, R); обратное может не выполняться. Для описаний имеет место обратная ситуация: описание относительно пары (L, R) остаётся описанием относительно пары (L', R'). Учитывая это и теорему 2, получаем

Следствие 1. *Пусть L' и R' — такие клоны на соответствующих множествах E и D, что $L' \subseteq L$ и $R' \subseteq R$. Пусть P и Q — такие (L, R)-замкнутые классы, что $P \subseteq Q$. Тогда существование конечного запрещающего множества для P в Q относительно пары (L', R') равносильно существованию конечного запрещающего множества для P в Q относительно пары (L, R); существование конечного описания для P в Q относительно пары (L', R') равносильно существованию конечного описания для P в Q относительно пары (L, R).*

Незначительно изменив доказательство последней теоремы, можно получить доказательство следующей теоремы, также обобщающей теорему Яблонского из [9].

Теорема 3. *Для замкнутых классов P и Q в P_E таких, что $P \subseteq Q$, и клонов L и R в $S_E \cup P$ следующие условия равносильны:*

(i) *P имеет в Q конечное описание A относительно пары (L, R) такое, что $A \subseteq \Pi_{E,E} \cap (inv_E(R) \times inv_E(L))$ и $P = Q \cap \mathrm{pol}_{E,E}(A)$;*

(ii) *P имеет в Q конечное запрещающее множество T относительно пары (L, R) такое, что $T \subseteq Q \setminus P$ и $P = Q \cap \rangle T \langle_{L,R}$;*

(iii) *существует такая конечная система замкнутых классов, содержащихся в Q и строго включающих P, что всякий замкнутый класс, содержащийся в Q и строго включающий P, содержит хотя бы один класс этой системы.*

Эта теорема даёт условия существования конечного 2-описания для замкнутого класса (в том числе не являющегося клоном, т. е. не содержащего селекторных функций). Доказательство этой теоремы можно получить из доказательства теоремы 2, если положить $L = R = S_E \cup P$, вместо (L, R)-замкнутых систем $[P \cup \{t_i\}]_{L,R}$ рассмотреть замкнутые системы $[P \cup \{t_i\}]$ и проверить, что множество $\mathrm{pol}_{E,E}(\alpha)$ является замкнутым классом. Последнее несложно, если заметить, что для 2-предиката $\alpha = (a, b)$ в сформулированных условиях имеет место включение $b \subseteq a$. В завершение данного раздела сделаем

Замечание 4. Имеется аналогия между свойствами (L, R)-наследственных систем функций и свойствами наследственных систем конечных графов, замкнутых относительно взятия миноров. Например, следствие 1 в какой-то мере аналогично известному свойству, состоящему в том, что запрещение любого минора равносильно запрещению конечного числа некоторых топологических миноров (упражнение 28 из гл. 12 в [3]). В связи с этим представляют интерес условия, при которых для (L, R)-наследственных систем имеет место аналог теоремы Робертсона–Сеймура [3]. Иными словами, речь идёт об условиях, когда все (L, R)-наследственные системы в $P_{E,D}$ имеют конечное запрещающее множество. Вследствие теоремы 2 и замечания 1 в случае, когда L не содержит функций, существенно зависящих не менее чем от двух переменных, равносильным образом можно говорить об условиях, при которых каждый (L, R)-замкнутый класс обладает конечным описанием. В некоторых случаях ответ получить несложно. Например, известно, что клон всех булевых функций, удовлетворяющих условию 1^∞, не является предикатно описываемым [6]. Отсюда следует, что при $E = D = \{0, 1\}$ (т. е. в случае булевых функций) для классов $L = S_{\{0,1\}}$ и $R = S_{\{0,1\}} \cup \{0\}$ аналог теоремы Робертсона–Сеймура не выполняется. Однако если множество R пополнить константой 1, то ответ в этой задаче уже не известен.

5. Замкнутые классы 2-предикатов

Определим операции проектирования и конъюнкции, а также операции перестановки и отождествления переменных над 2-предикатами, обобщающие одноимённые операции над предикатами. *Конъюнкцией* 2-предикатов (a, b) и (c, d) будем называть 2-предикат $(a \wedge c, b \wedge d)$. *Проекцией* 2-предиката (a, b) по i-й координате назовём 2-предикат (a', b'), где a' и b' — проекции по i-й координате соответствующих предикатов a и b. Наконец, для любой функции $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ и n-арного 2-предиката (a, b) будем говорить, что m-арный 2-предикат (a^f, b^f) получен из (a, b) *перестановкой и отождествлением переменных*. Будем называть 2-*диагональю* (на паре множеств E и D) любой 2-предикат (a, b), в котором предикаты a и b тождественно истинны или тождественно ложны, или выражаются одной формулой вида $x_i = x_j \wedge \ldots \wedge x_k = x_l$, где $\{i, j, \ldots, k, l\} = \{1, \ldots, n\}$ для некоторого n; эта формула интерпретируется для предикатов a и b на множествах E и D соответственно.

Далее понадобятся следующие обозначения. Для предикатов a и b из Π_E (или из Π_D), имеющих одинаковую арность m, будем писать $a \subseteq b$, если любой набор, удовлетворяющий предикату a, удовлетворяет предикату b; если при этом $a \neq b$, то будем писать $a \subset b$. Через $a \cap b$ будем обозначать m-арный предикат из Π_E (соответсвенно из Π_D), выражаемый формулой

$$a(x_1, \ldots, x_m) \wedge b(x_1, \ldots, x_m).$$

Предикат $a \cap b$ будем называть *пересечением* предикатов a и b. Этот предикат может быть получен отождествением переменных в конъюнкции $a \wedge b$. Поэтому замкнутые классы предикатов замкнуты также и относительно операции пересечения. *Пересечением* 2-предикатов (a, b) и (c, d) будем называть 2-предикат $(a \cap c, b \cap d)$.

Множество A 2-предикатов из $\Pi_{E,D}$ будем называть *замкнутым относительно* пары (L, R), если для него выполняются следующие условия:

I. A содержит все 2-диагонали на паре множеств E и D;

II. $A \subseteq \mathrm{inv}_E(R) \times \mathrm{inv}_D(L)$;

III. для любых 2-предикатов (a, b) и (c, d) одинаковой арности из $\mathrm{inv}_E(R) \times \mathrm{inv}_D(L)$ таких, что $a \subseteq c$ и $d \subseteq b$, имеет место импликация

$$(c, d) \in A \Rightarrow (a, b) \in A;$$

IV. множество A замкнуто относительно операций проектирования и конъюнкции, а также перестановки и отождествления переменных.

Имеет место следующая

Теорема 4. *Для любого множества F функций из $P_{E,D}$ множество $\mathrm{inv}_{E,D}(F) \cap (\mathrm{inv}_E(R) \times \mathrm{inv}_D(L))$ является замкнутым относительно пары (L, R). Если множество A 2-предикатов из $\Pi_{E,D}$ замкнуто относительно пары (L, R) и $F = \mathrm{pol}_{E,D}(A)$, то*

$$A = \mathrm{inv}_{E,D}(F) \cap (\mathrm{inv}_E(R) \times \mathrm{inv}_D(L)).$$

Справедливость первого утверждения теоремы проверяется непосредственно; справедливость второго утверждения может быть установлена с использованием теоремы 1 из [2] или теоремы 2.2 из [6]. Приведём независимое доказательство второго утверждения теоремы. Пусть

$$A' = \mathrm{inv}_{E,D}(F) \cap (\mathrm{inv}_E(R) \times \mathrm{inv}_D(L)).$$

Нетрудно видеть, что в условиях второго утверждения $A \subseteq A'$. Нужно доказать обратное включение. Выберем произвольный 2-предикат (a, b)

из множества A' и покажем, что он принадлежит множеству A. Пусть r — арность 2-предиката (a, b), и пусть предикату a удовлетворяют наборы $y_1, \dots, y_m$ и только они. Вследствие замкнутости множества A относительно пары (L, R) можно считать, что для любого предиката b' из $\mathrm{inv}_D(L)$ такого, что $b' \subset b$, 2-предикат (a, b') уже не принадлежит множеству A'. В этом случае предикату b удовлетворяют всевозможные наборы $f^{[r]}(y_1, \dots, y_m)$, где $f \in \mathrm{pol}_{E,D}(A)$, и только они. Для некоторого $M \geq |E|^m$ наборы $y_1, \dots, y_m$ дополним до таких наборов $z_1, \dots, z_m$ из E^M, чтобы в строках матрицы $Z = (z_1, \dots, z_m)$ содержались все наборы из E^m; очевидно, это можно сделать. Рассмотрим M-арный 2-предикат (a', b'), где предикату a' удовлетворяют всевозможные наборы $g^{[M]}Z$, где $g \in R$, и предикату b' удовлетворяют всевозможные наборы $g^{[M]}Z$, где $g \in \mathrm{pol}_{E,D}(A)$. Можно проверить, что 2-предикат (a', b') принадлежит множеству $\mathrm{inv}_E(R) \times \mathrm{inv}_D(L)$ и 2-предикат (a, b) является проекцией 2-предиката (a', b') по добавленным $M - r$ координатам. Так как множество A предполагается замкнутым относительно операции проектирования, то для завершения доказательства достаточно показать, что 2-предикат (a', b') принадлежит множеству A. Обозначим через C множество всех таких 2-предикатов (c_1, c_2), содержащихся в A, что $a' \subseteq c_1$. Это множество непусто, так как содержит 2-диагональ (E^M, D^M). Далее рассмотрим 2-предикат (e_1, e_2), являющийся пересечением всевозможных 2-предикатов (c_1, c_2) из C. Отметим, что 2-предикат (e_1, e_2) принадлежит множеству A в силу замкнутости последнего относительно операции пересечения. Осталось показать, что $a' \subseteq e_1$ и $e_2 \subseteq b'$; отсюда и в силу третьего условия в определении замкнутого относительно пары (L, R) множества A будет следовать, что $(a', b') \in A$. Первое из этих включений очевидно, докажем второе. С этой целью выберем произвольный набор $z \in e_2$ и рассмотрим функцию $h \in P_{E,D}$ такую, что $h^{[M]}Z = z$. Такая функция существует. Действительно, если у наборов в Z совпадают две какие-то координаты, скажем i-я и j-я, то вследствие определения a' эти две координаты совпадают у всех наборов, удовлетворяющих предикату a'. Значит, в множестве C содержится 2-диагональ (d_1, d_2), где d_1 и d_2 выражаются формулой $x_i = x_j \wedge x_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge x_M = x_M$. Но тогда у всех наборов, удовлетворяющих предикату e_2, и, в частности, у набора z, координаты с номерами i и j совпадают. Таким образом, функция h определена корректно. Приведённое рассуждение можно интерпретировать как доказательство того, что функция h сохраняет 2-диагональ (d_1, d_2), принадлежащую множеству A. Незначительно изменив это рассуждение, можно получить доказательство того, что h сохраняет любой

2-предикат из A, т. е. принадлежит множеству $\mathrm{pol}_{E,D}(A)$. Следовательно, набор z должен содержаться в b'. Теорема 4 доказана.

Из теорем 1 и 4 следует, что между решёткой (L,R)-замнутых классов функций из $P_{E,D}$ и решёткой замкнутых относительно пары (L,R) классов 2-предикатов из $\Pi_{E,D}$ существует следующий инверсный изоморфизм: $P \mapsto \mathrm{inv}_{E,D}(P) \cap (\mathrm{inv}_E(R) \times \mathrm{inv}_D(L))$, а отображение

$$A \mapsto \mathrm{pol}_{E,D}(A)$$

является обратным инверсным изоморфизмом. В случае $L = S_D$ и $R = S_E$ (т. е. когда рассматриваются наследственные системы) множества $\mathrm{inv}_E(R)$ и $\mathrm{inv}_D(L)$ совпадают с соответствующими множествами Π_E и Π_D. Поэтому пара инверсных изоморфизмов здесь такая:

$$P \mapsto \mathrm{inv}_{E,D}(P), A \mapsto \mathrm{pol}_{E,D}(A).$$

6. Объединения и пересечения наследственных систем

Известно (см., например, [6]), что пересечение предикатно описываемых замкнутых классов $P_1 = \mathrm{pol}_E(a)$ и $P_2 = \mathrm{pol}_E(b)$, где a и b — непустые (т. е. не тождественно ложные) предикаты из Π_E, является предикатно описываемым замкнутым классом $P_1 \cap P_2 = \mathrm{pol}_E(a \wedge b)$. Аналогичное свойство имеет место и для наследственных систем. Более того, объединение наследственных систем с конечным описанием является наследственной системой с конечным описанием. При этом имеется возможность получить явное описание не только для пересечения (как в случае замкнутых классов), но и для объединения наследственных систем. Чтобы сформулировать этот результат, потребуется новая операция дизъюнкции предикатов, а также операция сложения 2-предикатов. *Дизъюнкцией* предикатов a и b арностей n и m соответственно назовём $(n+m)$-арный предикат c такой, что

$$c(x_1, \ldots, x_{n+m}) \equiv a(x_1, \ldots, x_n) \vee b(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}).$$

Будем обозначать через $a \vee b$ дизъюнкцию предикатов a и b. Для 2-предикатов $\alpha = (a,b)$ и $\beta = (c,d)$ через $\alpha + \beta$ обозначается 2-предикат $(a \wedge c, b \vee d)$. Поскольку $b \wedge d \subseteq b \vee d$, замкнутые классы 2-предикатов замкнуты относительно операции $+$. Справедлива

Теорема 5. *Пусть $\alpha = (a,b)$ и $\beta = (c,d)$ — 2-предикаты из $\Pi_{E,D}$ такие, что предикаты a, b, c и d непусты. Тогда*

$$\mathrm{pol}_{E,D}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{pol}_{E,D}(\alpha) \cap \mathrm{pol}_{E,D}(\beta),$$

$$\mathrm{pol}_{E,D}(\alpha+\beta) = \mathrm{pol}_{E,D}(\alpha) \cup \mathrm{pol}_{E,D}(\beta).$$

Доказательство. В условиях доказываемой теоремы n-местная функция f из $P_{E,D}$ не сохраняет 2-предикат $\alpha+\beta$ ($\alpha\wedge\beta$) тогда и только тогда, когда найдутся наборы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие предикату a, а также такие наборы $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющие предикату c (т. е. найдутся такие наборы $x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n$, удовлетворяющие $a\wedge c$), что набор

$$f(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

не удовлетворяет 2-предикату $b\vee d$ (2-предикату $b\wedge d$). Последнее означает, что набор $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не удовлетворяет b и (или) набор $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ не удовлетворяет d. Из сказанного следуют оба доказываемых равенства. Теорема 5 доказана.

Как и в случае замкнутых классов получаем

Следствие 2. *Если наследственная система имеет конечное описание, то она имеет описание, состоящее из единственного 2-предиката.*

7. Условия конечной порождаемости

Из теоремы Кузнецова о полноте в P_E [10] следует, что существует такая конечная система S замкнутых классов, собственным образом содержащихся в P_E, что всякий замкнутый класс, содержащийся собственным образом в P_E, содержится в некотором из классов этой системы. Систему S в условиях этой теоремы называют *критериальной* для P_E, поскольку она даёт критерий полноты в P_E. Действительно, несколько переформулировав эту теорему, получаем, что произвольная система F функций из P_E полна в P_E тогда и только тогда, когда F не содержится целиком ни в одном из классов системы S. Доказательство теоремы Кузнецова основано на факте конечной порождаемости класса P_E. Поэтому аналогичную теорему можно сформулировать для любого конечно порождаемого замкнутого класса функций из P_E. Отметим, что теорема Кузнецова неоднократно обобщалась, например, в [4, 5, 7, 8]. В этом разделе докажем обобщение теоремы Кузнецова для (L,R)-замкнутых классов в $P_{E,D}$.

Теорема 6. *Для (L,R)-замкнутого класса P следующие условия равносильны*:

(i) *класс P имеет конечное порождающее множество $F\subseteq P$ такое, что $[F]_{L,R}=P$*;

(ii) *существует такая конечная система S (L,R)-замкнутых классов, строго содержащихся в P, что каждый (L,R)-замкнутый класс, строго* *содержащийся в P, содержится в некотором классе этой системы.*

Приведём независимое доказательство этой теоремы, не опирающееся на известное доказательство теоремы Кузнецова [10]. Из условия (ii) следует условие (i), так как, выбрав функцию $f_A \in P \setminus A$ для каждого класса $A \in S$, получим конечное множество $\{f_A | A \in S\}$, порождающее P как (L, R)-замкнутый класс. Докажем обратное. Предположим, что выполнено первое условие, т. е. P имеет конечное порождающее множество. Заметим, что в этом случае не существует бесконечной строго возрастающей в P последовательности (L, R)-замкнутых классов. Поэтому всякий (L, R)-замкнутый класс, строго содержащийся в P, можно расширить до некоторого максимального по отношению включения класса (в множестве всех (L, R)-замкнутых классов, строго содержащихся в P). Для завершения доказательства нужно показать, что множество всех таких максимальных классов конечно. Будем обозначать через $A^{(m)}$ множество всех функций, зависящих от m переменных и принадлежащих множеству $A \subseteq P_{E,D}$. Так как P имеет конечное порождающее множество, то найдётся такое m, что $[P^{(m)}]_{L,R} = P$. Сначала покажем, что для любого максимального класса P_1 и любой функции $g \in P \setminus P_1$ верно следующее равенство

$$[P_1^{(m)} \cup [g]_{L,R}{}^{(m)}]_{L,R} = P. \tag{1}$$

Для этого выберем произвольную функцию h из $P^{(m)}$. Так как класс P_1 максимальный в P и $g \in P \setminus P_1$, то $h \in [P_1 \cup \{g\}]_{L,R}$. Это означает, что функцию h можно выразить суперпозицией

$$h = l(f_1(r_{1,1}, r_{1,2}, \ldots), f_2((r_{2,1}, r_{2,2}, \ldots), \ldots),$$

где функция $l \in L$, функции $f_i \in P_1 \cup \{g\}$, а функции $r_{i,j} \in R$. Заметим, что функции $F_i = f_i(r_{i,1}, \ldots)$ зависят от m переменных и принадлежат множеству $P_1^{(m)} \cup [g]_{L,R}{}^{(m)}$. Следовательно, функция h содержится в множестве $[P_1^{(m)} \cup [g]_{L,R}{}^{(m)}]_{L,R}$. Поскольку h была выбрана произвольно из порождающего класс P множества $P^{(m)}$, включение (1) доказано. Из этого включения следует, что всякий максимальный класс однозначно определяется всеми своими функциями, зависящими от m переменных. Действительно, пусть P_1 и P_2 — такие максимальные классы, что $P_1^{(m)} = P_2^{(m)}$. Тогда для любой функции $g \in P_2 \setminus P_1$ имеем

$$P = [P_1^{(m)} \cup [g]_{L,R}{}^{(m)}]_{L,R} = [P_2^{(m)} \cup [g]_{L,R}{}^{(m)}]_{L,R} \subseteq P_2.$$

Но это невозможно. Следовательно, такой функции g не существует. Поэтому классы P_1 и P_2 совпадают. Таким образом, число максимальных классов не превосходит величины 2^M, где $M = |P^{(m)}|$. Теорема 6 доказана.

Замечание 5. Отметим, что для класса P такого, что $[P^{(m)}]_{L,R} = P$, включение (1), справедливое для любого максимального в P (L, R)-замкнутого класса P_1 и любой функции $g \in P \setminus P_1$, влечёт для любой функции $g \in P$ выполнение свойства

$$(g \in P_1) \Leftrightarrow ([g]_{L,R}{}^{(m)} \cap (P \setminus P_1)^{(m)} = \varnothing).$$

Это означает, что множество $(P \setminus P_1)^{(m)}$ является (конечным) запрещающим множеством для P_1 в P относительно пары (L, R). Следовательно, если выполняется условие (ii) теоремы 6, то систему S можно выбрать так, что её классы эффективно описываются в P при помощи запрещающих множеств (а также при помощи 2-предикатов по теореме 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Б.** От метода Карацубы для быстрого умножения чисел к быстрым алгоритмам для дискретных функций // Аналитическая теория чисел и её приложения. М.: Изд-во «Наука–МИАМ «Наука», 1997. С. 20–27. (Труды МИАН, Т. 218.)
2. **Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.** Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1–10; № 5. С. 1–9.
3. **Дистель Р.** Теория графов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002.
4. **Мальцев А. И.** Итеративные алгебры Поста. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976.
5. **Мальцев А. И.** Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 2. С. 5–24.
6. **Марченков С. С.** Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000.
7. **Марченков С. С.** Функциональные системы с операциями суперпозиции. М.: Физматлит, 2004.
8. **Парватов Н. Г.** Замечания о конечной порождаемости замкнутых классов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, № 3. С. 32–47.
9. **Яблонский С. В.** О строении верхней окрестности для предикатно-описуемых классов в P_k // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218, № 2. С. 304–307.
10. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.
11. **Pöschel R., Kalužnin L. A.** Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979.

12. **Rosenberg I. G.** Galois theory for partial algebras // Universal algebra and lattice theory. Berlin: Springer, 1983. P. 257–272. (Lecture Notes Math.; V. 1004.)

Адрес авторов:

Томский гос. университет,
фак-т прикл. матем. и киб.,
пр. Ленина, 36,
634050 Томск,
Россия.
E-mail: parvatov@mail.tsu.ru

Статья поступила
19 декабря 2006 г.
Переработанный вариант —
3 ноября 2007 г.