ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2008. Том 15, № 1. 3–10

УДК 519.178

КЛАССЫ ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ С ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМОЙ ЗАДАЧЕЙ О НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ

В. Е. Алексеев, Д. С. Малышев

Доказывается полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве для бесконечного семейства подмножеств класса планарных графов.

Введение

Класс графов X будем называть НМ-*простым*, если существует алгоритм, решающий задачу о независимом множестве для графов из X за полиномиальное время. Если задача о независимом множестве остаётся NP-полной для графов из X, то X назовём НМ-*сложным*. Известно, что класс всех планарных графов является НМ-сложным. Цель настоящей статьи — доказать НМ-простоту некоторых его подмножеств.

Направление, в котором ведётся поиск НМ-простых классов, подсказано результатами из работ [2, 3]. В них исследовалась сложность задачи о независимом множестве на наследственных классах графов, т. е. классах, замкнутых относительно удаления вершин. Каждый наследственный (и только наследственный) класс X определяется некоторым множеством запрещённых порождённых подграфов Y, в этом случае пишем $X = \mathrm{Free}(Y)$. Если при этом Y конечно, то X называется *конечно определённым*.

В [3] введено понятие *граничного класса* графов — минимального по включению класса, являющегося пересечением убывающей последовательности НМ-сложных классов, и доказана

Теорема 1. *Конечно определённый класс является* НМ-*сложным тогда и только тогда, когда в нём содержится какой-либо граничный класс.*

Таким образом, знание всех граничных классов позволяет полностью охарактеризовать конечно определённые НМ-сложные классы. В [3] также доказано (в предположении P≠NP), что некоторый конкретный класс является граничным. Это класс T всех графов, в каждом из

которых каждая компонента связности является деревом не более чем с тремя листьями. До сих пор неизвестно, существуют ли другие граничные классы. Вопрос о существовании таких классов эквивалентен вопросу о существовании графа $G \in T$ такого, что класс $\mathrm{Free}(G)$ является НМ-сложным [3]. О трудности проблемы говорит тот факт, что в настоящее время неизвестен сложностной статус задачи о независимом множестве для класса $\mathrm{Free}(P_5)$. В то же время, если рассматривать не всё семейство наследственных классов, а какую-либо его часть, можно надеяться на исчерпывающий ответ на этот вопрос. Так, в [3] доказано, что класс T является единственным граничным классом в семействе сильно наследственных классов, т. е. классов графов, замкнутых относительно удаления вершин и рёбер.

В настоящей статье рассматриваются наследственные подклассы класса планарных графов Planar. Класс X конечно определён относительно Planar, если $X = \mathrm{Planar} \cap \mathrm{Free}(Y)$, где Y — конечное множество графов. Можно определить также понятие относительного граничного класса: наследственный класс графов Y назовём *граничным для* (*относительно*) класса X, если существует такая последовательность $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$ НМ-сложных подмножеств класса X, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Y_i = Y$ и Y — минимальный класс с этим свойством. Доказательства аналога теоремы 1 для относительных граничных классов, а также того факта, что T является граничным классом для Planar, почти дословно повторяют соответствующие доказательства из [3]. Хотя пока не удалось выяснить, есть ли другие граничные классы относительно Planar, но имеется более заметный прогресс в продвижении к этой цели, чем в случае просто граничных классов.

Обозначим через $T_{i,j,k}$ дерево с тремя листьями, находящимися на расстояниях i, j, k от (единственной) вершины степени 3 (если $i = 0$, то это граф P_{j+k}) и рассмотрим классы $\mathrm{Planar}(i, j, k) = \mathrm{Planar} \cap \mathrm{Free}(T_{i,j,k})$. Граничные классы относительно Planar, отличные от T, существуют в том и только том случае, когда среди классов $\mathrm{Planar}(i, j, k)$ имеются НМ-сложные. Докажем, что класс $\mathrm{Planar}(1, 2, k)$ является НМ-простым при любом k.

В статье приняты следующие обозначения: $N(a)$ — множество вершин, смежных с вершиной a; $N_2(a)$ — множество вершин, находящихся на расстоянии 2 от вершины a; $N(a, b)$ — множество вершин, смежных с обеими вершинами a и b; $d(x, y)$ — расстояние между вершинами x и y в графе.

1. Планарные графы без $T_{2,2,2}$

Неизвестно, является ли класс $\mathrm{Planar}(2,2,2)$ НМ-простым или НМ-сложным. В этом разделе только доказано, что задача о независимом множестве для этого класса полиномиально эквивалентна этой же задаче для графов из этого класса, степени которых ограничены некоторой константой. Этот факт затем используется при доказательстве основного результата настоящей статьи.

На первом этапе нашим главным алгоритмическим инструментом будут *сжатия*, описанные в [1]. *Сжатием* называется отображение множества вершин графа в себя, не являющееся автоморфизмом, при котором любые две различные несмежные вершины переходят в различные несмежные вершины. Таким образом, сжатие преобразует граф в его порождённый подграф; при этом, очевидно, сохраняется число независимости. Здесь будем использовать только сжатия первого и второго порядков, т. е. такие сжатия, что все вершины, кроме одной или двух, остаются неподвижными.

Сжатие φ первого порядка записывается в виде $\binom{a}{b}$: это означает, что $\varphi(a) = b$, а остальные вершины неподвижны. Такое преобразование действительно является сжатием тогда и только тогда, когда вершины a и b смежны и каждая вершина, смежная с b и отличная от a, смежна с a. Иначе говоря, $N(b) - \{a\} \subseteq N(a) - \{b\}$.

Преобразование $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ($\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$, остальные вершины неподвижны) является сжатием второго порядка, если:

(i) $c \neq d$;

(ii) в графе есть рёбра (a, c) и (b, d) и нет рёбер (a, b) и (c, d);

(iii) вершина, смежная с вершиной c, кроме a и b, смежна и с a;

(iv) вершина, смежная с вершиной d, кроме a и b, смежна и с b.

Граф назовём *несжимаемым*, если для него нет сжатий первого и второго порядка. Несжимаемый подграф графа G, получающийся из G последовательностью сжатий первого и второго порядка, называется 2-*основой* графа. Граф может иметь несколько 2-основ (например, граф C_4 имеет две основы), но, как показано в [1], они изоморфны. Очевидно, 2-основа графа может быть найдена за полиномиальное время.

Лемма 1. *Пусть G — несжимаемый граф из* $\mathrm{Planar}(2,2,2)$, *a и b — его вершины такие, что $d(a, b) = 2$. Тогда $|N(a, b)| \leqslant 12$.*

Доказательство. Вершину $x \in N(a, b)$ назовём *особой*, если каждая смежная с x вершина, кроме a и b, принадлежит $N(a, b)$; *a-чистой* (*b-чистой*), если существует вершина, смежная с x и несмежная с вершиной a (с вершиной b).

Отметим, что каждая вершина из $N(a,b)$ принадлежит к одной из этих трёх категорий. Оценим число вершин каждого типа.

Если x и y — две несмежные особые вершины, то отображение $\binom{a\ b}{x\ y}$ является сжатием. Значит, особые вершины образуют полный подграф. Он не может содержать более трёх вершин, так как иначе образуется подграф K_5. Если же есть ровно три особых вершины, то других вершин в $N(a,b)$ нет, так как иначе образуется подграф, гомеоморфный графу K_5. Следовательно, либо имеется не больше двух особых вершин, либо $|N(a,b)| = 3$.

Допустим, что в G имеются шесть a-чистых вершин. Рассмотрим какую-нибудь плоскую укладку графа G. Она определяет циклическое упорядочение рёбер, инцидентных каждой вершине, а следовательно, и смежных вершин. Пусть $x_1, \ldots, x_6$ — a-чистые вершины, расположенные в циклическом порядке, определяемом данной укладкой, относительно вершины a. Пусть y_i — вершина, смежная с x_i и несмежная с a, $i = 1, \ldots, 6$. Среди y_i могут быть одинаковые, например, может быть $y_1 = y_2$, но y_1, y_3, y_5 попарно различны и не смежны между собой. Но тогда множество $\{a, x_1, x_3, x_5, y_1, y_3, y_5\}$ порождает подграф $T_{2,2,2}$. Таким образом, в $N(a,b)$ имеются не более пяти a-чистых и не более пяти b-чистых вершин, а всего не более 12 вершин. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *В несжимаемом графе из* Planar(2, 2, 2) *степень каждой вершины не превосходит* 120.

Доказательство. Пусть a — вершина степени d в несжимаемом графе $G \in \mathrm{Planar}(2,2,2)$. Рассмотрим двудольный подграф H, образованный множествами вершин $A = N(a)$, $B = N_2(a)$ и всеми рёбрами графа G, соединяющими вершины из A с вершинами из B. Пусть π — мощность наибольшего паросочетания, а β — мощность наименьшего вершинного покрытия графа H. По теореме Кенига $\pi = \beta$.

Если вершина $x \in A$ не смежна ни с одной вершиной из B, то отображение $\binom{a}{x}$ является сжатием. Следовательно, каждая вершина из A смежна хотя бы с одной вершиной из B и в графе H имеется d рёбер, попарно не имеющих общих вершин в множестве A. По лемме 1 каждая вершина из множества B имеет в графе H степень не более 12. Значит, для того чтобы покрыть эти d рёбер, требуются не менее $d/12$ вершин. Следовательно, $\pi \geqslant d/12$.

Возьмём в графе H какое-либо паросочетание с π рёбрами и рассмотрим граф H', полученный из графа H стягиванием всех рёбер этого паросочетания. Если $d > 120$, то в графе H' имеется не менее 11 вершин. Так как он планарен, то в нём есть вершина b степени не более 5. Сре-

ди вершин, не смежных с b, имеется пара вершин, не смежных между собой (иначе образуется подграф K_5). Следовательно, в графе H' имеется независимое множество, состоящее из трёх вершин. Вершинам этого множества в графе H соответствуют три ребра, образующие вместе с инцидентными им вершинами порождённый подграф $3K_2$. Но тогда эти шесть вершин вместе с вершиной a порождают в графе G подграф $T_{2,2,2}$. Лемма 2 доказана.

В работе [5] доказано, что при любых Δ и k класс всех графов, в которых степени вершин не превосходят Δ и которые не содержат $T_{1,k,k}$ в качестве порождённого подграфа, НМ-простой. Отсюда и из леммы 2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Класс* $\mathrm{Planar}(1,2,2)$ *является* НМ-*простым.*

В следующем разделе будет доказано более общее утверждение.

2. Планарные графы без $T_{1,2,k}$

Теорема 2. *Класс* $\mathrm{Planar}(1,2,k)$ *является* НМ-*простым при любом* k.

Доказательство. Клика в графе G называется *разделяющей*, если после удаления всех её вершин из G увеличивается число компонент связности G. В [3] доказано следующее: если существует полиномиальный алгоритм, решающий задачу о независимом множестве для связных и не имеющих разделяющих клик графов из наследственного класса X, то и весь класс X является НМ-простым. Поэтому рассмотрим связный планарный граф $G \in \mathrm{Planar}(1,2,k)$ без разделяющих клик. Если в графе G нет порождённого подграфа $T_{1,2,2}$, то к G можно применить полиномиальный алгоритм для класса $\mathrm{Planar}(1,2,2)$, существующий согласно лемме 3. Далее покажем, что если в графе G имеется подграф $T_{1,2,2}$, то радиус графа G не превосходит $k+2$.

Итак, пусть в графе G имеется подграф $T_{1,2,2}$, порождённый множеством вершин $S = \{a, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2\}$ и имеющий рёбра (a, b_1), (a, b_2), (a, b_3), (b_1, c_1), (b_2, c_2). Докажем, что в графе G расстояние от вершины a до любой другой вершины не превосходит $k+2$.

Пусть d — вершина, не принадлежащая множеству S. Среди кратчайших путей, соединяющих вершины a и d, выберем путь, проходящий через наибольшее число вершин множества S. Очевидно, число таких вершин не может быть больше трёх. Пусть $P = x_0, x_1, \ldots, x_t$ — этот путь, $x_0 = a$, $x_t = d$. Ребро, не принадлежащее пути P и соединяющее вершину этого пути с вершиной из S, будем называть *хордой*. Если (x_i, y) — хорда $(y \in S)$, то $i \leqslant 3$, иначе получился бы более короткий путь из a в d. Предположим, что $t \geqslant k+3$. Рассмотрим различные варианты взаи-

моотношений пути P с вершинами из S и покажем, что в любом случае в графе имеется либо порождённый подграф $T_{1,2,k}$, либо разделяющая клика.

1. Путь P проходит через три вершины множества S. Имеется два эквивалентных варианта. Рассмотрим один из них: $x_1 = b_1$, $x_2 = c_1$.

1.1. Хорд нет. Тогда множество S вместе с вершинами $x_3, \ldots, x_k$ порождает $T_{1,2,k}$.

1.2. Имеются хорды. Единственной хордой в этом случае может быть ребро (x_3, c_2), любая другая хорда привела бы к образованию более короткого пути из a в d. Если эта хорда есть, то вершины $c_2, x_1, x_2, \ldots, x_{k+3}$ порождают $T_{1,2,k}$.

В дальнейшем для краткости будем просто перечислять вершины, которые нужно удалить для того, чтобы оставшиеся вершины множества S вместе с вершинами пути P (не обязательно всеми) порождали $T_{1,2,k}$. Например, в рассматриваемом случае нужно удалить вершины a, b_2, b_3.

2. Путь P проходит через две вершины множества S, причём $x_1 = b_1$. Если хорды отсутствуют, удаляем b_3. Если есть хорда, соединяющая вершину x_3 с одной из вершин c_1, c_2, то получается путь из a в d той же длины, проходящий через три вершины множества S. Наличие хорды, соединяющей x_3 с одной из вершин b_2, b_3, привело бы к образованию более короткого пути из a в d. Следовательно, могут быть только хорды, инцидентные вершине x_2.

2.1. Если есть хорда (x_2, c_2), то удаляем вершины b_2, b_3, c_1.

2.2. Нет хорды (x_2, c_2), есть хорда (x_2, b_2). Удаляем вершины a, b_3, c_1.

2.3. Нет хорд (x_2, c_2) и (x_2, b_2), есть хорда (x_2, b_3). Если есть хорда (x_2, c_1), то удаляем вершины b_1, b_2, c_2, а если её нет, удаляем a, b_2, c_2.

2.4. Нет хорд (x_2, c_2), (x_2, b_2), (x_2, b_3). Удаляем вершину c_1.

3. Путь P проходит через вершину b_3 и не существует путей той же длины из a в d, проходящих через b_1 или b_2. Если нет хорд, то удаляем c_1. Хорд, инцидентных вершине x_3, быть не может по тем же причинам, что и в п. 2. Значит, могут быть только хорды, инцидентные вершине x_2. Если такая хорда соединяет x_2 с одной из вершин b_1, b_2, то образуется путь той же длины, проходящий через эту вершину. Остаётся рассмотреть хорды (x_2, c_1) и (x_2, c_2). Если есть обе эти хорды, то удаляем вершины a, b_2, b_3, а если есть только хорда (x_2, c_1), удаляем c_2.

4. Путь P не проходит через вершины множества S, кроме вершины a. Если нет хорд, удаляем b_1 и c_1. По тем же причинам, что и выше, не может быть хорд, инцидентных вершине x_3, а из вершины x_2 — только в c_1 и в c_2. Если есть только одна из этих хорд, то удаляем вершину x_1, а

если есть обе хорды, удаляем x_1, a, b_2, b_3. Остаётся рассмотреть случай, когда есть только хорды из вершины x_1.

4.1. Есть хорда (x_1, b_1), нет хорд (x_1, b_2), (x_1, b_3). Если есть хорда (x_1, c_2), то удаляем вершины a, b_3, c_1, а если её нет, удаляем вершины b_1 и c_1.

4.2. Есть хорда (x_1, b_3), нет хорд (x_1, b_1), (x_1, b_2). Если есть хорда (x_1, c_1), то удаляем вершины a, b_2, c_2, а если её нет, удаляем вершины b_3 и c_2.

4.3. Есть хорды (x_1, b_1) и (x_1, b_2), нет хорды (x_1, b_3). Если есть хорда (x_1, c_1), то удаляем вершины b_1, b_2, c_2, а если её нет, удаляем вершины a, b_3, c_2.

4.4. Есть хорды (x_1, b_1) и (x_1, b_3), нет хорды (x_1, b_2). Если есть хорда (x_1, c_1), то удаляем вершины b_1, b_3, c_2, а если её нет, удаляем вершины a, b_2, c_2.

4.5. Есть хорды (x_1, b_1), (x_1, b_2), (x_1, b_3). В этом случае в графе имеются три треугольника, содержащие ребро (a, x_1). В плоской укладке каждое ребро инцидентно не более чем двум граням. Следовательно, в любой плоской укладке хотя бы один из этих треугольников не является границей грани. Но тогда он является разделяющей кликой.

Итак, радиус графа G не превосходит $k + 2$. В [6] доказано, что планарный граф с радиусом r имеет древесную ширину не более $3r + 1$. Известно также [4], что задача о независимом множестве разрешима за полиномиальное время в классе графов, у которых древесная ширина ограничена константой. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** О сжимаемых графах // Проблемы кибернетики. Вып. 36. М.: Наука, 1979. С. 23–31.
2. **Алексеев В. Е.** О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьковский гос. ун-т, 1983. С. 3–13.
3. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Math. 2004. V. 132, N 1–3. P. 17–26.
4. **Bodlaender H. L.** Dynamic programming on graphs with bounded treewidth // Automata, languages and programming (Tampere, 1988). Proc. Berlin: Springer, 1988. P. 105–118. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 317)
5. **Lozin V., Milanic M.** A polynomial algorithm to find an independent set of maximum weight in fork-free graphs // Proceedings of the eighteenth annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms.

6. **Robertson N., Seymour P.** Graph minors. III. Planar tree-width // J. Combin. Theory. Ser. B. 1984. V. 36, N 1. P. 49–64.

Адрес авторов:

Нижегородский гос. ун-т,
факультет ВМК,
пр. Гагарина, 23, корп. 2
603950 Нижний Новгород,
Россия.
E-mail: ave@uic.nnov.ru

Статья поступила
20 сентября 2007 г.

Переработанный вариант —
29 января 2008 г.