ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2008. Том 15, № 1. 11–16

УДК 519.172

ВЫСОТА ЦИКЛА ДЛИНЫ 4 В 1-ПЛАНАРНЫХ ГРАФАХ С МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ 5 БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ*)

О. В. Бородин, И. Г. Дмитриев, А. О. Иванова

Граф называется 1-планарным, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы каждое ребро скрещивалось не более чем с одним другим ребром. Известно, что в 1-планарном графе есть вершина степени не больше 7, а также либо вершина степени не больше 4, либо цикл длины не больше 4. Доказывается, что 1-планарный граф без треугольников и вершин степени меньше 5 содержит цикл длины 4, состоящий из вершин степени не больше 8.

Введение

Граф называется 1-планарным, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы каждое ребро скрещивалось не более чем с одним другим ребром. Это понятие было введено Г. Рингелем [8] при изучении вершинно-граневых раскрасок плоских графов. Он доказал, что для совместной раскраски вершин и граней любого плоского графа и вершинной раскраски любого 1-планарного графа достаточно 7 цветов и предположил, что достаточно 6 цветов. Там же он привёл конструкции, показывающие, что 5 цветами обойтись нельзя.

Эта гипотеза Рингеля была подтверждена О. В. Бородиным [1] лишь спустя 19 лет; в доказательстве использовалось 35 сводимых конфигураций. Позднее О. В. Бородин [3] нашёл более красивое доказательство, включающее меньше 20 конфигураций и частично проясняющее строение 1-планарных графов. (То, что любой 1-планарный граф содержит вершину степени не больше 7, причём эта оценка неулучшаема, было известно еще Г. Рингелю [8].)

И. Фабрици и Т. Мадараш [4] получили ряд результатов о существовании подграфов ограниченной степени в 1-планарных графах. В частности, они показали, что если минимальная степень $\delta(G)$ 1-планарного

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–00694 первого автора и проект 05–01–00816 третьего автора).

графа G не меньше 5, то его обхват $g(G)$ не больше 4, и привели пример с $\delta(G) = 5$ и $g(G) = 4$. Ниже мы уточняем этот результат следующим утверждением.

Теорема. *Если граф G 1-планарен, $\delta(G) \geqslant 5$ и $g(G) \geqslant 4$, то в G имеется цикл длины 4, все вершины которого имеют степень не больше 8.*

Для сравнения приведём ряд аналогичных результатов о строении плоских графов. Непосредственно из формулы Эйлера следует, что всегда $\delta \leqslant 5$, причём $\delta \geqslant 4$ влечёт $g = 3$. С другой стороны, пример двойной пирамиды показывает, что условие $\delta \geqslant 4$ не гарантирует наличия цикла длины 3 с ограниченными степенями всех его вершин.

Однако, как показал А. Лебег [7], из $\delta = 5$ уже вытекает наличие цикла длины 3 и высоты (максимальной степени вершин) не больше 9. Для плоских триангуляций А. Коциг [6] усилил эту оценку до 8 и высказал предположение, что верна оценка 7 (которая уже неулучшаема). О. В. Бородин [2] доказал (в других терминах), что в произвольном плоском графе с $\delta = 5$ существует цикл длины 3 и высоты не больше 7, одновременно подтвердив и гипотезу Грюнбаума [5] о циклической 11-связности 5-связных плоских графов (оценка 11 также достижима).

Можно заметить, что теорема является аналогом результата [2]: из отсутствия вершин малой степени следует, что в графе имеется короткий цикл ограниченной высоты. С другой стороны, доказательство этой теоремы имеет мало общего с приведённым в [2].

1. Доказательство теоремы

Пусть граф G — контрпример к теореме; в частности, каждый цикл длины 4 в графе G содержит вершину степени не менее 9. Можно считать, что G связен. Пусть G^+ — 1-плоское представление графа G, т. е. плоский граф, в котором вершины степени 4 являются точками скрещивания рёбер графа G, а вершины степени не менее 5 графа G^+ являются вершинами графа G.

Формулу Эйлера для G^+ можно переписать в виде:

$$\sum_{v \in V}(d(v) - 6) + \sum_{f \in V}(2r(f) - 6) = -12, \qquad (*)$$

где $d(v)$ — степень вершины v, $r(f)$ — ранг грани f.

Начальный заряд $\mu(v)$ каждой вершины v графа G^+ положим равным $d(v) - 6$; грань f имеет заряд $\mu(f) = 2r(f) - 6$. Заметим, что начальный заряд вершины степени 4 равен -2, заряд вершины степени 5 равен -1, а заряды остальных вершин и граней неотрицательны.

Отметим ряд простых структурных свойств графа G^+, непосредственно вытекающих из отстутствия циклов длины 3 в G.

Лемма. *В* G^+ *нет*:
(a) *двух смежных вершин степени* 4;
(b) *вершины степени* 4*, инцидентной подряд двум граням ранга* 3;
(c) *вершины, инцидентной подряд трём граням ранга* 3.

Опираясь на эту лемму, перераспределим μ-заряды вершин и граней в семь этапов по следующим ниже правилам R1–R7, а также проверим, что финальные заряды μ^* всех вершин и граней неотрицательны. Поскольку сумма зарядов вершин и граней сохраняется, то получим противоречие с $(*)$, что и завершит доказательство теоремы. Через μ_i будем обозначать заряд вершин и граней после применения правил R1–Ri и пусть $\mu^* = \mu_7$.

R1: Каждая вершина степени не менее 9 дает заряд $\frac{1}{3}$ каждой инцидентной ей грани.

Если v — вершина с $d(v) \geqslant 9$, то поскольку такие вершины будут участвовать лишь в правиле R1 (читатель должен в этом убедиться), имеем

$$\mu^*(v) = \mu_1(v) \geqslant d(v) - 6 - \frac{d(v)}{3} = \frac{2(d(v)-9)}{3} \geqslant 0.$$

Если $6 \leqslant d(v) \leqslant 8$, то v не участвует в перераспределении зарядов, поэтому $\mu^*(v) = \mu(v) = d(v) - 6 \geqslant 0$.

Назовём вершину степени 5 *сильной*, если она инцидентна не менее чем трём нетреугольным граням.

R2: Сильная вершина степени 5 получает от каждой инцидентной ей грани ранга 4 заряд $\frac{1}{3}$.

Очевидно, что всякая сильная вершина v степени 5 имеет

$$\mu^*(v) = \mu_2(v) \geqslant 5 - 6 + 3 \times \frac{1}{3} = 0.$$

Назовём вершину степени 4 *слабой*, если она инцидентна двум граням ранга 3, не идущим подряд (не смежным между собой), а остальные вершины степени 4 будем называть *сильными*.

R3: Любая сильная вершина степени 4 получает от каждой инцидентной ей грани ранга 4 заряд $\frac{2}{3}$.

Любая сильная вершина v степени 4 инцидентна по утверждению (b) леммы не менее чем трём нетреугольным граням, а значит,

$$\mu^*(v) = \mu_3(v) \geqslant 4 - 6 + 3 \times \frac{2}{3} = 0.$$

Грань ранга не менее 4 назовём *сверхмощной*, если она инцидентна по крайней мере двум вершинам степени не менее 9.

R4: Каждая грань ранга не менее 5 даёт заряд $\frac{2}{3}$ каждой инцидентной ей вершине степени 5, а каждой инцидентной вершине степени 4 — заряд $\frac{4}{3}$, если она является сверхмощной, и заряд 1 — в противном случае. Каждая сверхмощная грань ранга 4 даёт заряд $\frac{4}{3}$ каждой инцидентной ей слабой вершине степени 4 и каждой вершине степени 5.

Пусть грань f имеет $r(f) \geqslant 5$. Если f не является сверхмощной, то согласно утверждению (a) леммы заряд 1 отдаётся не более чем половине инцидентных ей вершин, поэтому

$$\mu^*(f) = \mu_4(f) \geqslant \begin{cases} 2r(f) - 6 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 0 & \text{при } r(f) = 5, \\ 2r(f) - 6 - r(f) \cdot 1 \geqslant 0 & \text{при } r(f) \geqslant 6. \end{cases}$$

Пусть f — сверхмощная грань. Тогда

$$\mu^*(f) = \mu_4(f) \geqslant \begin{cases} 2 + 2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{4}{3} = 0 & \text{при } r(f) = 4, \\ 4 + 2 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{4}{3} > 0 & \text{при } r(f) = 5, \\ 2r(f) - 6 + 2 \cdot \frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{r(f)}{2} \right\rfloor \cdot \frac{4}{3} & \\ \;+(r(f) - \left\lfloor \frac{r(f)}{2} \right\rfloor - 2) \cdot \frac{2}{3} & \\ \;> 2r(f) - 6 - \frac{r(f)}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) & \\ \;= r(f) - 6 \geqslant 0 & \text{при } r(f) \geqslant 6. \end{cases}$$

Итак, остаётся проверить неотрицательность μ^*-заряда для несверхмощных граней ранга 4, слабых вершин степени 4, а также вершин степени 5, не являющихся сильными. Для этого нужно ввести ещё несколько определений и специальных правил распределения.

R5: Если грань ранга 3 содержит вершину степени 4 наряду с вершиной степени не менее 9, то эта грань даёт заряд $\frac{1}{3}$ этой вершине степени 4, если она слабая, а в противном случае — инцидентной ей вершине степени 5, если такая имеется.

R6: Пусть слабая вершина v степени 4 инцидентна грани f ранга 4, не являющейся сверхмощной. Тогда v получает от f:

1, если f инцидентна вершине степени не менее 9;

0, если v смежна с двумя вершинами степени не менее 9, не лежащими в f;

$\frac{2}{3}$ в остальных случаях.

Заметим, что слабая вершина v степени 4 входит в цикл длины 4 графа G, поэтому она смежна хотя бы с одной вершиной степени не менее 9, а значит, получает хотя бы раз заряд $\frac{1}{3}$ по правилам R1 и R5.

Тогда ввиду R4 и R6 имеем $\mu^*(v) = \mu_6(v) \geqslant 4 - 6 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0$ либо $\mu^*(v) = \mu_6(v) \geqslant 4 - 6 + 0 + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 0$.

Уточним классификацию несверхмощных граней ранга 4. Грань f ранга 4 назовём *мощной*, если она инцидентна не более чем одной слабой вершине v степени 4, причём (i) v получает от f заряд 0 согласно правилу R6, либо (ii) f инцидентна в точности одной вершине степени не менее 9.

R7: Каждая грань ранга 4 даёт каждой инцидентной ей вершине степени 5 заряд $\frac{2}{3}$, если эта грань является мощной, и $\frac{1}{3}$ — в противном случае.

Если f — мощная грань ранга 4 типа (i), то $\mu^*(f) = 2 \cdot 4 - 6 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 0$, а если типа (ii), то $\mu^*(f) = 2 \cdot 4 - 6 + \frac{1}{3} - 1 - 2 \cdot \frac{2}{3} = 0$.

Пусть грань f ранга 4 не является ни мощной, ни сверхмощной. Если f инцидентна вершине степени не менее 9, то $\mu^*(f) \geqslant 2 + \frac{1}{3} - 2 \times 1 - \frac{1}{3} = 0$, а если не инцидентна такой вершине, то $\mu^*(f) = 2 - 2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} = 0$.

Остаётся проверить, что вершина v степени 5, не являющаяся сильной, имеет $\mu^*(v) \geqslant 0$. Предположим, что это не так, и пусть вершины v_1, v_5 встречаются подряд при обходе соседних с v вершин по часовой стрелке. Согласно лемме и ввиду симметрии можно считать, что гранями ранга 3 при v являются vv_2v_3, vv_3v_4 и vv_5v_1, а $d(v_2) = d(v_4) = d(v_5) = 4$.

Если хотя бы одна из двух оставшихся нетреугольных граней при v имеет ранг не менее 5, то $\mu^*(v) \geqslant -1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0$ по R4. Итак, далее будем полагать, что при v имеются грани $v_1v_{12}v_2v$ и $v_4v_{45}v_5v$ ранга 4.

Поскольку G — контрпример к теореме, то цикл $v_1v_{12}v_3v$ длины 4 графа G содержит вершину степени не менее 9. Разберём два случая. Если $d(v_{12}) \geqslant 9$ либо $d(v_1) \geqslant 9$, то грань $v_1v_{12}v_2v$ — мощная либо сверхмощная, а значит, v получает от неё заряд $\frac{2}{3}$, откуда следует, что $\mu^*(v) \geqslant -1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0$.

Остаётся допустить, что $d(v_{12}) \leqslant 8$, $d(v_1) \leqslant 8$, а $d(v_3) \geqslant 9$. Теперь обратим внимание на вершину v_2 степени 4: если она является сильной, то v получает от v_3 заряд $\frac{1}{3}$ через грань vv_2v_3 согласно правилу R5, откуда следует, что $\mu^*(v) \geqslant -1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$.

Итак, мы убедились, что предположение $\mu^*(v) < 0$ влечёт наличие второго треугольника $zv_{12}v_2$ при вершине v_2. Теперь выясняется, что в G существует цикл zvv_1v_{12} длины 4, не покрытый вершиной v_3, причём $d(z) \geqslant 9$ ввиду сделанных ранее допущений о степенях вершин v_1 и v_{12}. Последнее означает, что вершина v_2 инцидентна сверхмощной грани $\ldots zv_2v_3 \ldots$, т. е. грань $v_1v_{12}v_2v$ — опять-таки является мощной гранью, на этот раз типа (i), откуда следует, что $\mu^*(v) \geqslant -1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0$. Теорема доказана.

Авторы благодарят А. Н. Глебова за внимательное прочтение рукописи и сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бородин О. В.** Решение задач Рингеля о вершинно-граневой раскраске плоских графов и о раскраске 1-планарных графов // Методы дискретного анализа в изучении реализации логических функций: Сб. науч. тр. Вып. 41. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. С. 12–26.
2. **Бородин О. В.** Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоских графах // Матем. заметки. 1989. Т. 46, Вып. 5. С. 9–12.
3. **Borodin O. V.** A new proof of 6 color theorem // J. Graph Theory. 1995. V. 19, N 4. P. 507–521.
4. **Fabrici I., Madaras T.** The structure of 1-planar graphs // Discrete Math. 2007. V. 307, N 7–8. P. 854–865.
5. **Grünbaum B.** Polytopal graphs // Studies in Graph Theory. Part II. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1975. P. 201–204 (Studies in Math.; Vol. 12).
6. **Kotzig A.** From the theory of Euler polyhedra // Mat.-Fyz. Casopis. 1963. V. 13, N 1. P. 20–34.
7. **Lebesgue H.** Quelques cosequences simple de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 9. P. 27–43.
8. **Ringel G.** Ein Sechsfarbenproblem auf der Kugel // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1965. Bd. 29. P. 107–117.

Адрес авторов:

О. В. Бородин

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.
E-mail: brdnoleg@math.nsc.ru

И. Г. Дмитриев, А. О. Иванова

Якутский государственный университет
им. М.К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48,
677000 Якутск, Россия.
E-mail: mf_igd@mail.ru,
shmgnanna@mail.ru

Статья поступила
24 декабря 2007 г.