ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2008. Том 15, № 1. 17–22

УДК 519.718

О РАСКРАСКЕ ИНЦИДЕНТОРОВ В ЧАСТИЧНО ОРИЕНТИРОВАННОМ МУЛЬТИГРАФЕ

В. Г. Визинг

Приводится алгоритмически эффективная процедура для отыскания инциденторного хроматического числа частично ориентированного мультиграфа.

1. Основные понятия. Постановка задачи

Пусть $G = (V, E)$ — смешанный (частично ориентированный) мультиграф без петель [2], в котором V — множество вершин, E — множество рёбер, $E = A \bigcup L$, где A — множество дуг (ориентированных рёбер), L — множество звеньев (неориентированных рёбер). Не исключается, что одно из множеств A или L может быть пустым; таким образом, понятие смешанного мультиграфа рассматривается как обобщение понятия ориентированного или неориентированного мультиграфа. Если нет уточняющих пояснений, то под мультиграфом понимается смешанный мультиграф.

Запись $e = ab$, где e — ребро, a и b — вершины, означает, что ребро e инцидентно вершинам a и b; при этом если e — дуга, то a — начало, а b — конец. Пары (a, e) и (b, e) называются *инциденторами* ребра e, примыкающими соответственно к вершинам a и b; если $e = ab$ — дуга, то (a, e) называется *начальным*, (b, e) — *конечным инцидентором* дуги. Два различных инцидентора одного и того же ребра называются *сопряжёнными*. Два различных инцидентора, примыкающие к одной и той же вершине, называются *смежными*.

Будем считать, что цветами являются натуральные числа. Раскраска инциденторов называется *правильной*, если смежные инциденторы окрашены различно. Введём понятие p-раскраски ицидентов, где $p \geqslant 0$ — целое. Правильная раскраска инциденторов называется *p-раскраской*, если модуль разности между цветами любых двух сопряжённых инциденторов не меньше p, причём цвет конечного инцидентора каждой дуги не меньше цвета начального инцидентора этой дуги. Инциденторное p-хроматическое число мультиграфа G обозначается через $\chi I(p, G)$ и

© 2008 **Визинг В. Г.**

определяется как наименьшее натуральное c, при котором существует p-раскраска всех инциденторов мультиграфа G с помощью цветов из интервала $[1, c]$.

Для вершины v через $d_G^-(v)$, $d_G^+(v)$ и $d_G(v)$ обозначаются соответственно полустепень захода, полустепень исхода и степень вершины v в мультиграфе G. Максимальные значения этих величин в мультиграфе G обозначаются соответственно через $\triangle^-(G)$, $\triangle^+(G)$ и $\triangle(G)$.

Известны точные формулы для $\chi I(p, G)$ в случае, когда G является либо ориентированным, либо неориентированным мультиграфом. В [3] доказано, что если G — ориентированный мультиграф, то

$$\chi I(p, G) = \max\{\Delta(G), \Delta^-(G) + p, \Delta^+(G) + p\}. \tag{1}$$

Для неориентированного мультиграфа G в [1] доказано, что $\chi I(p, G) = \max\{\Delta(G), \lceil \Delta(G)/2 \rceil + p\}$.

В настоящей статье приводится алгоритмически эффективная процедура, позволяющая найти точное значение инциденторного p-хроматического числа смешанного мультиграфа. Сначала рассмотрим вопрос об ориентации звеньев мультиграфа с соблюдением заданных полустепенных ограничений.

2. Ориентация звеньев с соблюдением полустепенных ограничений

Пусть $G = (V, A \bigcup L)$ — мультиграф, причём $L \neq \varnothing$. Предположим, что каждой вершине $v \in V$ сопоставлена пара неотрицательных целых чисел $(s^-(v), s^+(v))$, которые будем называть *полустепенными* ограничениями. Ориентацию всех или некоторых звеньев из L назовём *допустимой*, если после ориентации получается такой мультиграф G', что $d_{G'}^-(v) \leq s^-(v)$ и $d_{G'}^+(v) \leq s^+(v)$ для любой вершины $v \in V$. Задание полустепенных ограничений будем для краткости называть *предписанием*. Предписание называется *корректным*, если существует допустимая ориентация всех звеньев мультиграфа G.

Теорема. *Для того чтобы предписание для мультиграфа $G = (V, A \bigcup L)$ было корректным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

а) *для любой вершины $v \in V$*

$$s^-(v) \geqslant d_G^-(v), \quad s^+(v) \geqslant d_G^+(v), \quad s^-(v) + s^+(v) \geqslant d_G(v); \tag{2}$$

б) *для любого подмножества $Z \subseteq V$ число звеньев в подграфе H, порождённом вершинами Z, не больше*

$$\min\left\{\sum_{z\in Z}(s^-(z)-d_G^-(z)),\ \sum_{z\in Z}(s^+(z)-d_G^+(z))\right\}.$$

Доказательство. Сначала докажем теорему в случае, когда мультиграф G является неориентированным, т. е. $A=\varnothing$. Тогда $d_G^-(v)=0$ и $d_G^+(v)=0$ для любой вершины $v\in V$.

Необходимость. Очевидно, что выполнение неравенств (2) необходимо для корректности предписания. Далее, пусть G' — мультиграф, получающийся из G в результате допустимой ориентации всех звеньев, а H и H' — подграфы мультиграфов G и G' соответственно, порождённые вершинами из Z. Так как число дуг в H' равно $\sum\limits_{z\in Z}d_{H'}^-(z)\leqslant\sum\limits_{z\in Z}s^-(z)$, то число звеньев в H не больше $\sum\limits_{z\in Z}s^-(z)$. Аналогично, число звеньев в H не больше $\sum\limits_{z\in Z}s^+(z)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Опишем алгоритм, который при выполнении условий а) и б) строит допустимую ориентацию всех звеньев мультиграфа G. Предположим, что в результате допустимой ориентации некоторых звеньев получился мультиграф $G'=(V,A'\bigcup L')$, и пусть $e=xy$ — произвольное звено из L'. Для каждой вершины v вычисляем

$$r^-(v)=s^-(v)-d_{G'}^-(v);\quad r^+(v)=s^+(v)-d_{G'}^+(v).$$

В силу (2) все вычисленные величины неотрицательны, причём $r^-(x)+r^+(x)\geqslant 1$, $r^-(y)+r^+(y)\geqslant 1$. Приступим к ориентации звена e. Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. $r^-(x)\geqslant 1$, $r^+(y)\geqslant 1$. Тогда ориентируем звено e от y к x, превратив его в дугу $e'=yx$.

Случай 2. $r^+(x)\geqslant 1$, $r^-(y)\geqslant 1$. Тогда ориентируем звено e от x к y , превратив его в дугу $e'=xy$.

Случай 3. $r^+(x)=r^+(y)=0$. Тогда в силу (2) имеем $r^-(x)\geqslant 1$, $r^-(y)\geqslant 1$.

Пусть Z — множество вершин мультиграфа G', достижимых путями из x и y. Очевидно, что $\{x,y\}\subseteq Z$. Обозначим через H и H' подграфы мультиграфов G и G' соответственно, порождённые вершинами множества Z. Покажем, что найдётся такая вершина $t\in Z$, что $r^+(t)\geqslant 1$. Действительно, если для всех вершин $z\in Z$ выполняется равенство $r^+(z)=0$, т. е. $d_{G'}^+(z)=d_{H'}^+(z)=s^+(z)$, то число дуг в H' равно $\sum\limits_{z\in Z}s^+(z)$. А так как звено e принадлежит H', то число рёбер в H' и звеньев в H, больше $\sum\limits_{z\in Z} s^+(z)$, что противоречит условию б). Таким образом, в множестве Z есть вершина t (отличная от x и y) такая, что $r^+(t) \geqslant 1$. Пусть u — та из вершин x или y, из которой достижима путём вершина t. Изменим на противоположную ориентацию всех дуг пути $[u,t]$. Получится допустимая ориентация некоторых звеньев мультиграфа G, при которой выполняется условие случая 1 или 2, и звено e ориентируется требуемым образом.

Случай 4. $r^-(x) = r^-(y) = 0$. Этот случай аналогичен случаю 3. Через Z обозначается множество вершин мультиграфа G', из которых достижимы путями вершины x и y.

После ориентации звена e получается дуга e'. Полагаем $A' = A' \bigcup \{e'\}$; $L' = L' \backslash \{e\}$; $G' = (V, A' \bigcup L')$; $r^-(v) = s^-(v) - d^-_{G'}(v)$; $r^+(v) = s^+(v) - d^+_{G'}(v)$. Затем выбираем произвольное звено из L' (если $L' \neq \varnothing$) и действуем описанным способом. Так продолжается до тех пор, пока не будет получена допустимая ориентация всех звеньев мультиграфа G. Достаточность доказана.

Теперь предположим, что $G = (V, A \cup L)$ смешанный мультиграф такой, что $A \neq \varnothing$ и $L \neq \varnothing$. Удалим из G все дуги, полученный неориентированный мультиграф обозначим через $K = (V, L)$. Очевидно, что предписание $\{(s^-(v), s^+(v)) \mid v \in V\}$ будет корректным для мультиграфа G тогда и только тогда, когда предписание $\{(s^-(v) - d^-_G(v), s^+(v) - d^+_G(v)) \mid v \in V\}$ является корректным для мультиграфа K. По доказанному корректность последнего предписания для неориентированного мультиграфа K равносильна выполнению условий:

а$'$) для любой вершины $v \in V$: $s^-(v) - d^-_G(v) \geqslant 0$, $s^+(v) - d^+_G(v) \geqslant 0$, $s^-(v) - d^-_G(v) + s^+(v) - d^+_G(v) \geqslant d_K(v)$;

б$'$) для любого подмножества $Z \subset V$ число звеньев в подграфе H мультиграфа K, порождённого вершинами Z, не больше

$$\min\left\{\sum_{z\in Z}(s^-(z) - d^-_G(z)),\ \sum_{z\in Z}(s^+(z) - d^+_G(z))\right\}.$$

Легко видеть, что условия а$'$) и б$'$) совпадают с условиями а) и б) теоремы. Теорема доказана.

Для того чтобы определить, является ли корректным предписание, нет необходимости проверять выполнение условия б) теоремы. Достаточно проверить, выполняются ли неравенства (2) и применить алгоритм, описанный при доказательстве достаточности. Если окажется (в случае 3 или 4), что какое-либо звено нельзя сориентировать допустимым образом, то дополним алгоритм сообщением о некорректности предписания. Такой «дополненный» алгоритм назовём алгоритмом А.

Оценим число операций алгоритма А. Легко видеть, что для ориентирования любого звена или определения невозможности допустимого ориентирования алгоритм производит не более $O(m)$ действий, где m — число рёбер в G. Таким образом, если в G имеется q звеньев, то число операций алгоритма равно $O(qm)$.

Замечание 1. Если вместо неравенств (2) потребовать, чтобы для любой вершины $v \in V$ выполнялись соотношения

$$s^-(v) \geqslant d_G^-(v),\ s^+(v) \geqslant d_G^+(v),\ s^-(v) + s^+(v) = d_G(v),$$

то теорема указывает условия существования ориентации мультиграфа G, в результате которой получается ориентированный мультиграф G' такой, что $s^-(v) = d_{G'}^-(v)$, $s^+(v) = d_{G'}^+(v)$ для каждой вершины $v \in V$.

Замечание 2. В книге [2] на странице 422 предлагается следующая проблема для исследования. Имеется связный частично ориентированный мультиграф. Найти условия, при которых существует эйлеров обход мультиграфа (при обходе дуга проходится с соблюдением ориентации, а звено — в любом направлении).

Теорема и алгоритм А дают исчерпывающий ответ. Так, если речь идет о циклическом обходе, то такой обход существует тогда и только тогда, когда существует ориентация всех звеньев, при которой полустепень захода каждой вершины равна полустепени её исхода. Вопрос о нахождении эйлерова пути очевидным образом сводится к нахождению эйлерова циклического обхода.

3. О p-раскраске инциденторов смешанного мультиграфа

Пусть $G = (V, A \bigcup L)$ — смешанный мультиграф, p — целое неотрицательное число. Требуется определить $\chi I(p, G)$. Очевидно, что $\chi I(p, G) \geqslant \Delta$. Задача состоит в отыскании такой ориентации всех звеньев мультиграфа G, при которой получается ориентированный мультиграф с наименьшим инциденторным p-хроматическим числом.

Если $p = 0$, то $\chi I(0, G) = \Delta(G)$. Действительно, сориентируем произвольным образом звенья мультиграфа G, получим ориентированный мультиграф, инциденторы которого можно в силу формулы (1) 0-раскрасить $\Delta(G)$ цветами.

Если же $p \geqslant 1$, то в силу формулы (1) задача сводится к отысканию такой ориентации всех звеньев мультиграфа G, в результате которой получается ориентированный мультиграф G' с наименьшим значением величины $\mu(G) = \max\{\Delta^-(G'),\ \Delta^+(G')\}$. Ясно, что $\mu(G) \geqslant \max\{\Delta^-(G),$

$\Delta^+(G), \lceil \Delta(G)/2 \rceil\}$. Алгоритм для отыскания $\mu(G)$ и построения соответствующей ориентации звеньев состоит в следующем.

Полагаем $k = \max\{\Delta^-(G),\ \Delta^+(G),\ \lceil \Delta(G)/2 \rceil\}$, $s^-(v) = s^+(v) = k$ при всех $v \in V$. Затем применяем алгоритм A. Если алгоритм построит допустимую ориентацию всех звеньев, то задача решена. Если же встретится звено e, которое не удаётся ориентировать допустимым образом, то полагаем $k = k + 1$ (после этого мы окажемся в условиях случая 1 или 2 теоремы), ориентируем допустимым образом звено e и продолжаем строить допустимую ориентацию. Алгоритм останавливается, когда будут сориентированы все звенья. Значение k, при котором это произойдёт, будет равно $\mu(G)$.

Число операций описанного алгоритма равно $O(qm)$, где m — число рёбер, а q — число звеньев мультиграфа G. Действительно, для ориентации одного звена при корректности предписания требуется $O(m)$ действий. Если же звено нельзя сориентировать допустимым образом, то это устанавливается с помощью $O(m)$ действий, затем полагается $k = k + 1$, пересчитываются значения $r^-(v)$ и $r^+(v)$ для всех вершин $v \in V$ и ориентируется звено. Это тоже потребует $O(m)$ действий. Таким образом, ориентация одного звена независимо от того, изменяется ли перед этим k или нет, требует $O(m)$ действий. Так как G имеет q звеньев, то в результате $O(qm)$ действий будет получена требуемая ориентация всех звеньев мультиграфа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г., Тофт Б.** Раскраска инцидентов и вершин неориентированного мукльтиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 3. С. 3–14.

2. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004.

3. **Пяткин А. В.** Задачи раскраски инцидентов и их приложения.: Дис ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1999.

Адрес автора:

ул. Варненская, 18/2, кв. 26,
65070 Одесса,
Украина.
E-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
1 декабря 2007 г.