ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2008. Том 15, № 1. 23–43

УДК 519.8

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО АЛГОРИТМА ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ СВЕРХУ ВХОДНЫХ ДАННЫХ*)

Э. Х. Гимади, А. Ле Галлу, А. В. Шахшнейдер

Представлен вероятностный анализ модификации алгоритма «Иди в ближайший непройденный город» для приближённого решения задачи коммивояжёра на минимум. Рассмотрен случай, когда элементы матрицы расстояний являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами, принимающими значения из неограниченной сверху области $[a_n, \infty)$, $a_n > 0$, и распределёнными по усечённому нормальному или показательному законам. Обоснованы оценки относительной погрешности, вероятности несрабатывания, а также условия асимптотической точности алгоритма. Предложенная модификация алгоритма позволила провести анализ унифицированным образом так, что полученные результаты оказываются справедливыми для задач коммивояжёра как на ориентированных, так и на неориентированных графах.

Введение

Задача коммивояжёра относится к числу типовых трудноредшаемых задач дискретной оптимизации [3, 8]. Математическую постановку задачи коммивояжёра можно записать в том виде, как она была представлена в одной их первых работ на эту тему [5]. Пусть задано n городов и расстояния между i-м и j-м городами равны c_{ij}, $i \neq j$; $1 \leqslant i, j, \leqslant n$. Требуется найти перестановку $\pi = (1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ целых чисел $1, \ldots, n$ такую, что длина обхода всех городов $c_{1\pi_2} + c_{\pi_2\pi_3} + \ldots + c_{\pi_n 1}$ достигает минимума.

Как и для многих NP-трудных задач дискретной оптимизации на случайных входах, для задачи коммивояжёра актуальным является вероятностный анализ быстрых приближённых алгоритмов. Среди характеристик алгоритмов выделяют относительную погрешность и вероятность несрабатывания. Оценки этих характеристик получены при пред-

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05–01–00395, 07–07–00222 и 08–01–00516) и INTAS (проект 04–77–7173).

положении, что входные данные всех индивидуальных задач имеют одинаковое распределение. Соответственно относительная погрешность и вероятность несрабатывания алгоритма зависят от вида распределения входных данных. При анализе алгоритма будем использовать следующие определения и обозначения из [1].

Алгоритм A *имеет оценки* $(\varepsilon_n, \delta_n)$ в классе $\mathcal{K}_n$ задач минимизации размерности n, если $\mathbf{P}\{f_A(I) > (1+\varepsilon_n)f^*(I)\} \leqslant \delta_n$ для каждого n, где $f^*(I)$ — оптимальное решение для индивидуальной задачи I, $f_A(I)$ — решение, полученное при помощи алгоритма A, $\mathbf{P}\{J\}$ — вероятность события J, ε_n — *относительная погрешность*, δ_n — *вероятность несрабатывания* алгоритма A.

Алгоритм называется *асимптотически точным* в классе задач $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$, если для него существуют такие оценки $(\varepsilon_n, \delta_n)$, что $\varepsilon_n \to 0$ и $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

В [2] представлен вероятностный анализ алгоритма «Иди в ближайший непройденный город» приближённого решения задачи коммивояжёра в случае, когда расстояния имеют дискретное распределение $p_k = \mathbf{P}\{c_{ij} = k\}$, где $k = 1, \ldots, r_n$. Получено следующее условие асимптотической точности алгоритма: $\sum\limits_{k=1}^{r_n} (\sum\limits_{i=1}^{k} p_i)^{-1} = o(n)$.

В [1] и [7] рассмотрена задача коммивояжёра на непрерывных случайных данных из ограниченного интервала $[a_n, b_n]$, $a_n > 0$. В случае равномерного распределения расстояний $c_{ij} \in [a_n, b_n]$ получены оценки относительной погрешности $\varepsilon_n = O\left(\frac{b_n/a_n}{n/\ln n}\right)$ и вероятности несрабатывания $\delta_n = n^{-\frac{3}{2}}$. Доказано, что алгоритм является асимптотически точным при $b_n/a_n = o(n/\ln n)$. В случае β-распределения с параметрами $\gamma = 0$ и $\alpha > 0$ асимптотическая точность имеет место при $b_n/a_n = o\big(n^{\alpha+1}\min(1,\alpha)\big)$.

В [6] для задачи коммивояжёра в полном n-вершинном неориентированном графе с весами рёбер c_{ij} — независимыми случайными величинами, равномерно распределёнными на отрезке $[0,1]$, показано, что $|f^* - f_2| = o(1)$ при $n \to \infty$, где f^* и f_2 значения целевых функций задачи коммивояжёра на соответственно оптимальном и приближённом решении, основанном на точном решении задачи о цикловом покрытии.

Данная статья посвящена вероятностному анализу модификации алгоритма ”Иди в ближайший непройденный город” для решения задачи коммивояжёра в случае, когда недиагональные элементы матрицы расстояний (c_{ij}) — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения из неограниченной сверху области $[a_n, \infty)$, $a_n > 0$. Анализ проведён для показательного и усечённого нормального законов распределения. Усечённым нормальным распределением назовём распределение случайных величин c_{ij}, когда элементы матрицы расстояний имеют плотность распределения, которая является правой симметричной половиной плотности распределения нормального закона, смещённой вправо на величину a_n. Далее в статье под нормальным распределением будем понимать именно такое усечённое нормальное распределение.

Предлагаемая модификация алгоритма «Иди в ближайший непройденный город» позволяет унифицированным образом получить одинаковые результаты как для задач на ориентированных, так и на неориентированных графах.

Доказательство асимптотической точности алгоритма основывается на оценивании предельных сумм независимых случайных величин [4]. В данной статье вероятностный анализ проведён с использованием неравенства Чебышёва, а также более сильного утверждения — теоремы Петрова.

В случае нормального распределения случайных величин c_{ij} возникли определённые трудности, связанные с тем, что функция распределения нормального закона не представима в явном виде. Это вызвало необходимость поиска подходящего вида функции, оценивающей снизу нормальный закон распределения.

1. Основные понятия и полученные результаты

1.1. Модификация алгоритма «Иди в ближайший непройденный город»

Рассмотрим следующую модификацию алгоритма "Иди в ближайший непройденный город" (далее модифицированный алгоритм обозначается через $\widetilde{A}$).

Пусть G — n-вершинный граф без петель и расстояния между разными его вершинами i и j равны соответствующим элементам матрицы (c_{ij}).

Алгоритм $\widetilde{A}$

Этап 1. Помечаются две произвольные вершины графа G. Для определённости пусть они имеют номера 1 и n: $\pi_1 = 1$, $\pi_n = n$.

Этап 2. Полагается $i = 1$. Если $1 \leqslant i \leqslant n-2$, то выполняется основной шаг.

Основной шаг. Помечается ранее непомеченная вершина $\pi_{i+1} < n$, ближайшая к вершине π_i. Значение i увеличивается на единицу.

Таким образом, в конце второго этапа (при $i = n-1$) построена цепь $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1}$.

Этап 3. Изолированная вершина $\pi_n = n$ соединяется с цепью $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1}$ так, чтобы образовался гамильтонов цикл $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1}, \pi_n, \pi_1$.

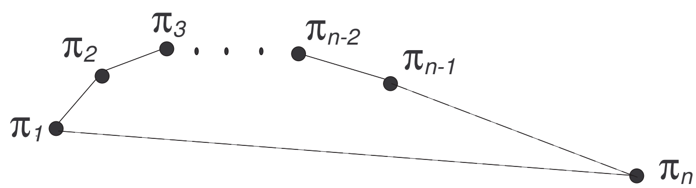

Рис. 1. Модификация $\widetilde{A}$ алгоритма «Иди в ближайший непройденный город»

Из описания алгоритма $\widetilde{A}$ следует, что его временна́я сложность равна $O(n^2)$. Веса рёбер (дуг) построенного гамильтонового цикла являются попарно независимыми случайными величинами как в случае ориентированого, так и в случае неориентированного графа.

1.2. Входные данные

Пусть недиагональные элементы матрицы расстояний c_{ij} — независимые случайные величины с одинаковой плотностью распределения.

В случае нормального закона плотность распределения имеет следующий вид: $p(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\dfrac{(x-a_n)^2}{2\sigma_n^2}\right), & \text{если } a_n \leqslant x < \infty; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

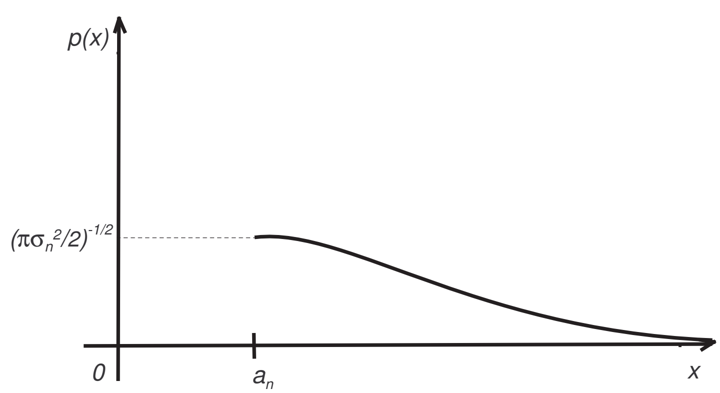

Рис. 2. Плотность нормального распределения

Обозначим через $F(x)$ функцию распределения случайных величин $\widetilde{c}_{ij} = c_{ij} - a_n$: $F(x) = \mathbf{P}\{\widetilde{c}_{ij} < x\} = \int\limits_0^x \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_n^2}\right) du.$

В случае показательного закона плотность распределения недиагональных элементов матрицы расстояний (c_{ij}) выглядит следующим образом: $p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_n} \exp\left(-\dfrac{x - a_n}{\alpha_n}\right), & \text{если } a_n \leqslant x < \infty; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

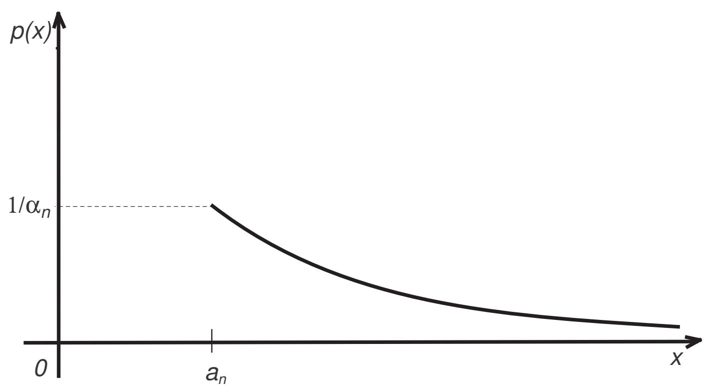

Рис. 3. Плотность показательного распределения

Соответствующая функция распределения случайных величин $\tilde{c}_{ij}$ имеет следующий вид: $F(x) = \mathbf{P}\{\tilde{c}_{ij} < x\} = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\alpha_n}\right)$.

1.3. Вспомогательные факты

При вероятностном анализе задачи потребуются неравенство Чебышёва и теорема Петрова.

Неравенство Чебышёва [1]. *Пусть* $\mathbb{E}f_A$, $\mathbb{D}f_A < \infty$ — *соответственно математическое ожидание и дисперсия случайной величины* f_A. *Тогда для любого* $\Delta_n > 0$ *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\{|f_A - \mathbb{E}f_A| \geqslant \Delta_n\} \leqslant \frac{\mathbb{D}f_A}{\Delta_n^2}.$$

Теорема Петрова [4]. *Пусть* $X_1, \ldots, X_n$ — *независимые случайные величины и существуют положительные постоянные* $g_1, \ldots, g_n$ *и* T *такие, что* $\mathbb{E}e^{tX_k} \leqslant e^{\frac{1}{2}g_k t^2}$ $(k = 1, \ldots, n)$ *при любых* t, $0 \leqslant t \leqslant T$. *Пусть*

$S = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ *и* $G = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\{S > x\} \leqslant \begin{cases} \exp\left(-\frac{x^2}{2G}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant GT, \\ \exp\left(-\frac{Tx}{2}\right) & \text{при } x > GT. \end{cases}$$

Также нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Для всех неотрицательных вещественных* x *и* $\gamma \geqslant 0{,}5$ *справедливо неравенство* $1 + x + \gamma x^2 \leqslant \exp(x)\exp((\gamma - 0{,}5)x^2)$.

Доказательство непосредственно следует из цепочки неравенств

$$\exp(x)\exp((\gamma - 0,5)x^2) \geqslant \left(1 + x + 0,5x^2\right)\left(1 + (\gamma - 0,5)x^2\right) \geqslant 1 + x + \gamma x^2.$$

1.4. Основной результат

Пусть $\beta_n = \alpha_n$ при показательном распределении, $\beta_n = \sigma_n$ при нормальном распределении.

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Пусть элементы матрицы расстояний являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, принимающими значения из неограниченной сверху области* $[a_n, \infty)$, $a_n > 0$, *согласно нормальному либо показательному распределению. Тогда модифицированный алгоритм* $\widetilde{A}$ *позволяет найти решение задачи коммивояжёра на минимум на ориентированных (неориентированных) графах с оценками относительной погрешности*

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{\beta_n/a_n}{n/\ln n}\right)$$

и вероятности несрабатывания алгоритма $\widetilde{A}$

$$\delta_n = \begin{cases} O\left(\ln^{-2} n\right) & \text{при использовании неравенства Чебышёва;} \\ O\left(n^{-1}\right) & \text{при использовании теоремы Петрова,} \end{cases}$$

и условием асимптотической точности алгоритма

$$\frac{\beta_n}{a_n} = o\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

2. Вероятностный анализ алгоритма $\widetilde{A}$ с использованием неравенства Чебышёва

2.1. Входные данные, распределённые по нормальному закону

Обозначим через ξ_k минимум из k элементов $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - a_n$, рассматриваемых на $(n-k-1)$-м основном шаге второго этапа алгоритма $\widetilde{A}$. Случайная величина ξ_k имеет функцию распределения

$$\Phi_k(x) = \mathbf{P}\{\xi_k \leqslant x\} = 1 - (1 - F(x))^k.$$

Обозначим через ξ_{n-1} и ξ_n случайные величины, соответствующие весам двух рёбер (дуг), присоединённых на третьем этапе алгоритма. Из описания алгоритма $\widetilde{A}$ следует, что величины ξ_{n-1}, ξ_n имеют такое же распределение, что и величина ξ_1. Обозначим через $\mathbb{E}\xi_k$ математическое ожидание величины ξ_k:

$$\mathbb{E}\xi_k = \begin{cases} \int\limits_0^\infty x d\Phi_k(x) & \text{при } k = 1, \ldots, n-2; \\ \mathbb{E}\xi_1 & \text{при } k = n-1, n. \end{cases}$$

Найдём верхние оценки $\hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}}$ и $\hat{\mathbb{D}} f_{\widetilde{A}}$ для математического ожидания $\mathbb{E} f_{\widetilde{A}}$ и дисперсии $\mathbb{D} f_{\widetilde{A}}$ случайной величины $f_{\widetilde{A}} = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k$, получаемой в результате работы алгоритма $\widetilde{A}$.

Лемма 2. *При любом положительном* γ_n

$$\mathbb{E} f_{\widetilde{A}} = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\xi_k \leqslant \mathcal{E}(\gamma_n) \ ,$$

где $\mathcal{E}(\gamma_n) = n\gamma_n + \dfrac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} + \displaystyle\int\limits_{\gamma_n}^\infty x \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \frac{1}{F^2(x)} dx.$

Доказательство. Математическое ожидание случайной величины ξ_k разобъём на две части: $\mathbb{E}\xi_k = \mathbb{E}'\xi_k + \mathbb{E}''\xi_k$, где $\mathbb{E}'\xi_k$ — интеграл от 0 до γ_n , а $\mathbb{E}''\xi_k$ — интеграл от γ_n до ∞.

Оценим сверху суммы $\sum\limits_{k=1}^n \mathbb{E}'\xi_k$ и $\sum\limits_{k=1}^n \mathbb{E}''\xi_k$:

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}'\xi_k = \sum_{k=1}^n \int\limits_0^{\gamma_n} x d\Phi_k(x) \leqslant \gamma_n \sum_{k=1}^n \int\limits_0^\infty d\Phi_k(x) = n\gamma_n.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}''\xi_k &= \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_n}^{\infty} x\,d\Phi_k(x)\\
&= \int_{\gamma_n}^{\infty} x\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n-2}k\Big(1-F(x)\Big)^{k-1}+2\right)dx\\
&= \int_{\gamma_n}^{\infty} x\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)\sum_{k=1}^{n-2}k\Big(1-F(x)\Big)^{k-1}dx\\
&\qquad + 2\int_{\gamma_n}^{\infty} x\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)dx.
\end{aligned}
$$

Воспользуемся неравенствами

$$
2\int_{\gamma_n}^{\infty} x\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)dx \leqslant \frac{4\sigma_n}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\exp(-z^2)dz^2 = \frac{4\sigma_n}{\sqrt{2\pi}},
$$

$$
\sum_{k=1}^{n-2}k\Big(1-F(x)\Big)^{k-1} \leqslant \frac{1}{F^2(x)}.
$$

Последнее неравенство следует из представления

$$
Q(t)=\sum_{k=1}^{\infty}kt^{k-1} = tQ(t)+\sum_{k=0}^{\infty}t^k = tS+\frac{1}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^2},\ |t|<1,
$$

и неравенства $\sum\limits_{k=1}^{n-2}k\Big(1-F(x)\Big)^{k-1} \leqslant Q\Big(1-F(x)\Big)$.

Таким образом,

$$
\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}''\xi_k \leqslant \frac{4\sigma_n}{\sqrt{2\pi}} + \int_{\gamma_n}^{\infty} x\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)\frac{1}{F^2(x)}dx,
$$

и

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}f_{\widetilde{A}} &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}'\xi_k + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}''\xi_k\\
&\leqslant n\gamma_n + \frac{4\sigma_n}{\sqrt{2\pi}} + \int_{\gamma_n}^{\infty} x\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)\frac{1}{F^2(x)}dx = \mathcal{E}(\gamma_n).
\end{aligned}
$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *При любом положительном* γ_n *справедливо неравенство* $\mathbb{D}f_{\widetilde{A}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k \leqslant \mathcal{D}(\gamma_n)$, *где*

$$\mathcal{D}(\gamma_n) \leqslant n{\gamma_n}^2 + \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sigma_n\gamma_n + 2\sigma_n^2 + \int\limits_{\gamma_n}^{\infty} x^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n}\right) \frac{1}{F^2(x)} dx.$$

Доказательство. Поступая аналогично доказательству леммы 2, получаем $\mathbb{D}\xi_k = \begin{cases} \int\limits_0^{\infty} x^2 d\Phi_k(x) - (\mathbb{E}\xi_k)^2 & \text{при } k = 1, \ldots, n-2, \\ \mathbb{D}\xi_1 & \text{при } k = n-1, n. \end{cases}$

Представим $\mathbb{D}\xi_k$ в следующем виде: $\mathbb{D}\xi_k = \mathbb{D}'\xi_k + \mathbb{D}''\xi_k - (\mathbb{E}\xi_k)^2$, где $\mathbb{D}'\xi_{k_1}$ — интеграл от 0 до γ_n, а $\mathbb{D}''\xi_{k_2}$ — интеграл от γ_n до ∞. Отбросим $(\mathbb{E}\xi_k)^2$.

Оценим сверху суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{D}'\xi_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{D}''\xi_k$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}'\xi_k = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{\gamma_n} x^2 d\Phi_k(x) \leqslant \gamma_n^2 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{\infty} d\Phi_k(x) = n\gamma_n^2.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}''\xi_k = \int\limits_{\gamma_n}^{\infty} x^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \left(\sum_{k=1}^{n-2} k\Big(1 - F(x)\Big)^{k-1} + 2\right) dx$$
$$\leqslant \int\limits_{\gamma_n}^{\infty} x^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \left(\frac{1}{F^2(x)} + 2\right) dx.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}'\xi_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}''\xi_k$$
$$\leqslant n{\gamma_n}^2 + \int\limits_{\gamma_n}^{\infty} x^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \left(\frac{1}{F^2(x)} + 2\right) dx.$$

Проинтегрируем по частям и оценим сверху следующий интеграл:

$$2\int\limits_{\gamma_n}^{\infty} x^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) dx$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sigma_n x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)\Big|_{\gamma_n}^{\infty} + \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sigma_n \int\limits_{\gamma_n}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) dx$$

$$\leqslant \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sigma_n\gamma_n + \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sigma_n \int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) dx = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sigma_n\gamma_n + 2\sigma_n^2.$$

Таким образом,

$$\mathbb{D}f_{\widetilde{A}} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k \leqslant n{\gamma_n}^2 + \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sigma_n\gamma_n + 2\sigma_n^2$$

$$+ \int\limits_{\gamma_n}^{\infty} x^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \frac{1}{F^2(x)} dx = \mathcal{D}(\gamma_n).$$

Лемма 3 доказана.

Пусть $\gamma_n^* = \frac{\sigma_n}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Перейдём к вычислению верхних оценок $\hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}} \geqslant \mathcal{E}(\gamma_n^*)$ и $\hat{\mathbb{D}} f_{\widetilde{A}} \geqslant \mathcal{D}(\gamma_n^*)$ соответственно для $\mathbb{E} f_{\widetilde{A}}$ и $\mathbb{D} f_{\widetilde{A}}$.

Заметим, что

$$F(\gamma_n^*) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\gamma_n^*/\sqrt{2}\sigma_n} \exp\left(-y^2\right) dy \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma_n^*}{\sqrt{2}\sigma_n} = \frac{1}{n}.$$

Лемма 4. $\hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}} = \sigma_n(C_1 \ln n + C_2)$, *где* $C_1 = 1,5;\ C_2 = 3,5.$

Доказательство. Для вычисления верхней оценки величины $\hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}}$ оценим следующий интеграл:

$$\int\limits_{\gamma_n^*}^{\infty} x \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \frac{1}{F^2(x)} dx$$

$$= \sigma_n \int\limits_{\sqrt{\pi}/\sqrt{2}n}^{\infty} y \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{1}{\tilde{F}^2(y)} dy,$$

где $\tilde{F}(y) = \int\limits_0^y \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$.

Разобъём интеграл на две части: от $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}n}$ до 1 и от 1 до ∞. Получим

$$\int\limits_{\sqrt{\pi}/\sqrt{2}n}^{1} y \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{1}{\tilde{F}^2(y)} dy \leqslant \frac{1}{\tilde{F}(1)} \int\limits_{1/n}^{1} \frac{1}{\tilde{F}} d\tilde{F} = \frac{\ln n}{\tilde{F}(1)};$$

$$\int\limits_1^\infty y \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{1}{\tilde{F}^2(y)} dy \leqslant \int\limits_1^\infty y \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{1}{\tilde{F}^2(1)} dy$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\tilde{F}^2(1)}.$$

Окончательно имеем

$$\mathbb{E} f_{\widetilde{A}}(\gamma_n^*) = n\gamma_n^* + \frac{4\sigma_n}{\sqrt{2\pi}} + \int\limits_{\gamma_n^*}^{\infty} x \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \frac{1}{F^2(x)} dx$$
$$\leqslant \frac{\sqrt{\pi}\sigma_n}{\sqrt{2}} + \frac{4\sigma_n}{\sqrt{2\pi}} + \sigma_n \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\tilde{F}^2(1)} + \sigma_n \frac{\ln n}{\tilde{F}(1)}$$
$$\leqslant \sigma_n (C_1 \ln n + C_2) = \hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}}.$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *$\hat{\mathbb{D}} f_{\widetilde{A}} = \sigma_n^2 C_3$, где C_3 — некоторая константа, причём $C_3 < 7$ при достаточно больших n.*

Доказательство. По определению имеем

$$\mathcal{D}(\gamma_n^*) = n\gamma_n^{*2} + \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sigma_n \gamma_n + 2\sigma_n^2 + \int\limits_{\gamma_n^*}^{\infty} x^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \frac{1}{F^2(x)} dx.$$

Оценим сверху интеграл

$$\int\limits_{\gamma_n^*}^{\infty} x^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \frac{1}{F^2(x)} dx$$
$$= \sigma_n^2 \int\limits_{\sqrt{\pi}/\sqrt{2}n}^{\infty} y^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{1}{\tilde{F}^2(y)} dy.$$

Разбъём интеграл на две части (см. доказательство леммы 4): от $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}n}$ до 1 и от 1 до ∞. Получим

$$\int\limits_{\sqrt{\pi}/\sqrt{2}n}^{1} y^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{1}{\tilde{F}^2(y)} dy \leqslant \frac{1}{\tilde{F}^2(1)} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\tilde{F}^2(1)};$$

$$\int\limits_{1}^{\infty} y^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{1}{\tilde{F}^2(y)} dy \leqslant \int\limits_{1}^{\infty} y^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{1}{\tilde{F}^2(1)} dy \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) \frac{1}{\tilde{F}^2(1)}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{D} f_{\widetilde{A}} \leqslant \mathcal{D}(\gamma_n^*) \leqslant \sigma_n^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\tilde{F}^2(1)} + \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right)}{\tilde{F}^2(1)} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2}{n} + 2 \right) = \sigma_n^2 C_3 = \hat{\mathbb{D}} f_{\widetilde{A}}.$$

Лемма 5 доказана.

Оценим сверху вероятность несрабатывания δ_n алгоритма $\widetilde{A}$, положив $\varepsilon_n = \lambda \hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}}/(na_n)$, $\lambda > 1$. Имеем

$$\mathbf{P}\{f_{\widetilde{A}} + na_n > (1+\varepsilon_n) f^*\} \leqslant \mathbf{P}\{f_{\widetilde{A}} > \varepsilon_n n a_n\} \leqslant \mathbf{P}\{f_{\widetilde{A}} > \mathbb{E} f_{\widetilde{A}} + \varepsilon_n n a_n - \hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}}\} \leqslant \mathbf{P}\{f_{\widetilde{A}} > \mathbb{E} f_{\widetilde{A}} + \Delta_n\},$$

где $\Delta_n = (\lambda - 1)\, \hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}}$.

Воспользовавшись неравенством Чебышёва, получим

$$\mathbf{P}\{f_{\widetilde{A}} > \mathbb{E} f_{\widetilde{A}} + \Delta_n\} \leqslant \mathbf{P}\{|f_{\widetilde{A}} - \mathbb{E} f_{\widetilde{A}}| > \Delta_n\} \leqslant \frac{\mathbb{D} f_{\widetilde{A}}}{\Delta_n^2} \leqslant \frac{\hat{\mathbb{D}} f_{\widetilde{A}}}{\Delta_n^2}.$$

Таким образом, имеем следующую оценку $\delta_n \leqslant \dfrac{\hat{\mathbb{D}} f_{\widetilde{A}}}{((\lambda - 1)\hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}})^2}$.

Алгоритм $\widetilde{A}$ является асимптотически точным, если $\varepsilon_n = \lambda \dfrac{\hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}}}{n a_n} \to 0$ и $\delta_n = \dfrac{\hat{\mathbb{D}} f_{\widetilde{A}}}{((\lambda-1)\hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}})^2} \to 0$ при $n \to \infty$; $\lambda > 1$.

По леммам 4 и 5 имеем $\hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}} = (C_1 \ln n + C_2)\sigma_n$; $\hat{\mathbb{D}} f_{\widetilde{A}} = \sigma_n^2 C_3$.

Следовательно,

$$\varepsilon_n = \lambda \frac{\hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}}}{n a_n} = \lambda \frac{\sigma_n (C_1 \ln n + C_2)}{n a_n} = O\left(\frac{\sigma_n}{a_n}\,\frac{\ln n}{n}\right);$$

$$\delta_n = \frac{\hat{\mathbb{D}} f_{\widetilde{A}}}{\big((\lambda-1)\,\hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}})^2} = \frac{C_3 \sigma_n^2}{\big((\lambda-1)\,\sigma_n\,(C_1 \ln n + C_2)\big)^2} = O(\ln^{-2} n).$$

Таким образом, с использованием неравенства Чебышёва доказано утверждение теоремы 1 для нормального распределения.

2.2. Входные данные, распределённые по показательному закону

Пусть, как в случае нормального распределения, ξ_k — минимум среди величин $\tilde{c}_{ij}$, рассматриваемых на $(n-k-1)$-м основном шаге второго этапа алгоритма $\widetilde{A}$. Обозначим через ξ_{n-1} и ξ_n случайные величины, характеризующие веса рёбер (дуг), присоединённых на третьем этапе алгоритма.

Найдём верхние оценки $\hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}}$ и $\hat{\mathbb{D}} f_{\widetilde{A}}$ для математического ожидания $\mathbb{E} f_{\widetilde{A}}$ и дисперсии $D f_{\widetilde{A}}$ случайной величины $f_{\widetilde{A}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$.

Лемма 6. *$\hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}} = (C_4 + \ln n)\alpha_n$, где $C_4 = 2{,}58$.*

Доказательство. При $k = 1, \ldots, n-2$ имеем

$$\mathbb{E}\xi_k = \int\limits_0^\infty x d\Phi_k(x) = \int\limits_0^\infty xk\Big(1 - F(x)\Big)^{k-1} dF(x) = \int\limits_0^\infty \frac{x}{\alpha_n} k \exp\left(-\frac{kx}{\alpha_n}\right) dx$$

$$= -\exp\left(-\frac{kx}{\alpha_n}\right) x\Bigg|_0^\infty + \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{kx}{\alpha_n}\right) dx = -\frac{\alpha_n}{k} \exp\left(-\frac{kx}{\alpha_n}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{\alpha_n}{k}.$$

При $k = n-1, n$ имеем $\mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\xi_{n-1} = \mathbb{E}\xi_1 = \alpha_n$. Используя эти равенства, получим верхнюю оценку для $\mathbb{E} f_{\widetilde{A}}$:

$$\mathbb{E} f_{\widetilde{A}} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\xi_k = \alpha_n \left(\frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \ldots + 1 + 2\right) \leqslant (C_4 + \ln n)\alpha_n = \hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}}.$$

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. $\hat{\mathbb{D}} f_{\widetilde{A}} = C_5 \alpha_n^2$, *где* $C_5 = 4 + \frac{\pi^2}{3}$.

Доказательство. Оценим сверху дисперсию $\mathbb{D}\xi_k$ случайной величины ξ_k, $k = 1, \ldots, n-2$. Имеем

$$\mathbb{D}\xi_k = \int\limits_0^\infty x d\Phi_k(x) - (\mathbb{E}\xi_k)^2 \leqslant \int\limits_0^\infty x^2 k\Big(1 - F(x)\Big)^{k-1} dF(x)$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{kx^2}{\alpha_n} \exp\left(-\frac{kx}{\alpha_n}\right) dx = -\exp\left(-\frac{kx}{\alpha_n}\right) x^2 \Bigg|_0^\infty + 2\int\limits_0^\infty x \exp\left(-\frac{kx}{\alpha_n}\right) dx$$

$$= \frac{2\alpha_n^2}{k^2}.$$

Оценки для $\mathbb{D}\xi_n$, $\mathbb{D}\xi_{n-1}$ и $\mathbb{D}\xi_1$ равны $2\alpha_n^2$. В итоге для суммы дисперсий получим

$$\mathbb{D} f_{\widetilde{A}} = \sum_{k=1}^n \mathbb{D}\xi_k = 2\alpha_n^2 \left(\frac{1}{(n-2)^2} + \ldots + 1 + 2\right) \leqslant C_5 \alpha_n^2 = \hat{\mathbb{D}} f_{\widetilde{A}}.$$

Лемма 7 доказана.

Из лемм 6 и 7 следует, что

$$\varepsilon_n = \lambda \frac{\hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}}}{n a_n} = \lambda \frac{\alpha_n (C_4 + \ln n)}{n a_n} = O\left(\frac{\alpha_n \ln n}{n a_n}\right);$$

$$\delta_n = \frac{\hat{\mathbb{D}} f_{\widetilde{A}}}{\big((\lambda - 1)\, \hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}}\big)^2} = \frac{C_5 \alpha_n^2}{\big((\lambda - 1)\, \alpha_n (C_4 + \ln n)\big)^2} = O(\ln^{-2} n).$$

Таким образом, доказано утверждение теоремы 1 с использованием неравенства Чебышёва для показательного закона распределения.

3. Вероятностный анализ алгоритма $\widetilde{A}$ с использованием теоремы Петрова

3.1. Входные данные, распределённые по нормальному закону

Вначале установим приемлемую для дальнейших целей нижнюю оценку функции распределения нормального закона.

Лемма 8. *При любом* $x \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \geqslant 1 - \exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du - \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{2}\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что $f(0) = 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Производная функции $f(x)$ равна $f'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)$. Заметим, что $f'(0) > 0$ и функция $f'(x)$ при $x \geqslant 0$ имеет только одну точку пересечения с осью координат $x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 12\ln(2) - 4\ln(\pi)} \geqslant 0$. Таким образом, $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$. Отсюда следует справедливость неравенства $\int\limits_0^x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \geqslant 1 - \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$ для любого $x \geqslant 0$. Лемма 8 доказана.

Рассмотрим более подробно второй этап алгоритма $\widetilde{A}$.

Обозначим через ξ_k минимум из k элементов $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - a_n$, который выбирается на $(n-k-1)$-м основном шаге второго этапа алгоритма. Оценим снизу величину $\mathbb{E}e^{\xi_k t}$ (см. теорему Петрова).

Лемма 9. *Пусть* $T = \dfrac{1}{3\sigma_n}$ *и* $g_1 = 1{,}8\sigma_n^2$, $g_k = \dfrac{60{,}8\sigma_n^2}{(k-1)^2}$, $2 \leqslant k \leqslant n-2$. *Тогда при любом* t, $0 \leqslant t \leqslant T$, *справедливы неравенства*:

$$\mathbb{E}e^{\xi_k t} \leqslant \begin{cases} \exp\left(\dfrac{\sqrt{2}\sigma_n}{\sqrt{\pi}} t\right) \exp\left(\dfrac{g_1 t^2}{2}\right) & \text{при } k = 1; \\ \exp\left(\dfrac{4\sigma_n}{k-1} t\right) \exp\left(\dfrac{g_k t^2}{2}\right) & \text{при } 2 \leqslant k \leqslant n-2. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbb{E}e^{\xi_k t} = \int\limits_0^\infty e^{tx} k\left(1 - F(x)\right)^{k-1} dF(x)$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^\infty \int\limits_0^\infty \frac{(tx)^m}{m!} k\left(1 - F(x)\right)^{k-1} dF(x).$$

Случай $k = 1,\ m \geqslant 1$:

$$\int_0^\infty \frac{(tx)^m}{m!} dF(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(t\sigma_n)^m}{m!} \int_0^\infty \left(\frac{x}{\sigma_n}\right)^m \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) d\left(\frac{x}{\sigma_n}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(t\sigma_n)^m}{m!} \int_0^\infty u^m \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(t\sigma_n\right)^m .$$

По условиям леммы $T = \frac{1}{3\sigma_n},\ 0 \leqslant t \leqslant T$. Воспользовавшись леммой 1, получаем

$$\mathbb{E}e^{\xi_1 t} \leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^\infty (t\sigma_n)^m = 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} t\sigma_n + \sqrt{\frac{2}{\pi}} (t\sigma_n)^2 \frac{1}{1 - t\sigma_n}$$

$$\leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} t\sigma_n + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} (t\sigma_n)^2 = 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} t\sigma_n + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} t\sigma_n\right)^2$$

$$\leqslant \exp\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_n t\right) \exp\left(0{,}9(t\sigma_n)^2\right) .$$

Далее используем лемму 8.

Случай $k \geqslant 5$, $m = 1$ или $k \geqslant 2$, $m \geq 2$:

$$\int_0^\infty \frac{(tx)^m}{m!} k \left(1 - F(x)\right)^{k-1} dF(x)$$

$$\leqslant \int_0^\infty \frac{(tx)^m}{m!} k \exp\left(-\frac{(k-1)x}{2\sigma_n}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) dx$$

$$\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{k-1} \left(\frac{2t\sigma_n}{k-1}\right)^m \frac{1}{m!} \int_0^\infty \left(\frac{(k-1)x}{2\sigma_n}\right)^m \exp\left(-\frac{(k-1)x}{2\sigma_n}\right) d\left(\frac{(k-1)x}{2\sigma_n}\right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{k-1} \left(\frac{2t\sigma_n}{k-1}\right)^m \frac{1}{m!} \int_0^\infty u^m \exp(-u)\, du = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{k-1} \left(\frac{2t\sigma_n}{k-1}\right)^m$$

$$\leqslant \begin{cases} 3,2 \left(\frac{2t\sigma_n}{k-1}\right)^m & \text{при } k \geqslant 2, m \geq 2; \\ \frac{4t\sigma_n}{k-1} & \text{при } k \geqslant 5,\ m = 1. \end{cases}$$

Случай $k = 2, 3, 4$ и $m = 1$:

$$\int\limits_0^\infty txk\,(1 - F(x))^{k-1}\,dF(x) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} kt\sigma_n \int\limits_0^\infty x \exp\left(-\frac{(k-1)x + x^2}{2}\right) dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\frac{(k-1)^2}{8}\right) kt\sigma_n \int\limits_0^\infty x \exp\left(-\frac{\left(x + \frac{k-1}{2}\right)^2}{2}\right) dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\frac{(k-1)^2}{8}\right) kt\sigma_n \int\limits_{\frac{k-1}{2}}^\infty \left(z - \frac{k-1}{2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

$$= k(k-1)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{k-1}{2} \exp\left(\frac{(k-1)^2}{8}\right)\left(1 - F\left(\frac{k-1}{2}\,\sigma_n\right)\right)\right)\frac{\sigma_n t}{k-1}$$

$$\leqslant C_k \frac{\sigma_n t}{k-1},$$

где $C_k \leqslant \begin{cases} 0{,}9 \leqslant 4 & \text{при } k = 2, \\ 1{,}65 \leqslant 4 & \text{при } k = 3, \\ 2{,}17 \leqslant 4 & \text{при } k = 4. \end{cases}$

Так как $T = \sigma_n/3$ и $0 \leqslant t \leqslant T$, то по лемме 1 имеем

$$\mathbb{E}e^{\xi_k t} \leqslant 1 + \frac{4t\sigma_n}{k-1} + 3.2 \sum_{m=2}^\infty \left(\frac{2t\sigma_n}{k-1}\right)^m = 1 + \frac{4t\sigma_n}{k-1} + 3.2\left(\frac{2t\sigma_n}{k-1}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{2t\sigma_n}{k-1}}$$

$$\leqslant 1 + \frac{4t\sigma_n}{k-1} + 9.6\left(\frac{2t\sigma_n}{k-1}\right)^2 = 1 + \frac{4t\sigma_n}{k-1} + 2.4\left(\frac{4t\sigma_n}{k-1}\right)^2$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{4\sigma_n}{k-1}t\right)\exp\left(\frac{30.4\sigma_n^2}{(k-1)^2}t^2\right).$$

Лемма 9 доказана.

Пусть $\tilde{\xi_1} = \xi_1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_n$; $\quad \tilde{\xi_k} = \xi_k - \frac{4\sigma_n}{k-1}$, $k = 2, \ldots, n-2$. Из леммы 9 непосредственно следует, что величины $\tilde{\xi_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n-2$, удовлетворяют условиям теоремы Петрова. Обозначим через ξ_{n-1} и ξ_n случайные величины, характеризующие веса двух рёбер (дуг), присоединённых на третьем шаге алгоритма. Из описания алгоритма $\widetilde{A}$ следует, что величины $\tilde{\xi}_k = \xi_k - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_n$; при $k = n-1, n$ имеют такое же распределение, что и величина $\tilde{\xi_1}$. Следовательно, случайные величины ξ_k, $k = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условиям теоремы Петрова.

Для параметров S, T и G теоремы Петрова имеем

$$S = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\xi}_k = \sum_{k=2}^{n-2} \tilde{\xi}_k + 3\tilde{\xi}_1;\ T = \frac{1}{3\sigma_n};\ G = \sum_{k=1}^{n} g_k = 3g_1 + \sum_{k=2}^{n-2} g_k$$
$$\leqslant \left(5,4 + 60,8\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)\right)\sigma_n^2 \leqslant 45\sigma_n^2.$$

Оценим сверху вероятность δ_n несрабатывания алгоритма $\widetilde{A}$. Имеем

$$\mathbf{P}\left\{f_{\widetilde{A}} + na_n > (1+\varepsilon_n)f^*\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{f_{\widetilde{A}} > na_n\varepsilon_n\right\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left\{3\xi_1 + \sum_{k=2}^{n-2} \xi_k > na_n\varepsilon_n\right\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left\{3\tilde{\xi}_1 + \sum_{k=2}^{n-2} \tilde{\xi}_k + 3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_n + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{4\sigma_n}{k-1} > na_n\varepsilon_n\right\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left\{S \geqslant na_n\varepsilon_n - (4,8 + 4\ln n)\sigma_n\right\}.$$

Положим $\varepsilon_n = \dfrac{10\sigma_n \ln n}{na_n}$, $x = na_n\varepsilon_n - (4{,}8 + 4\ln n)\sigma_n = (6\ln n - 4{,}8)\sigma_n$.

Так как $x \geqslant 15\sigma_n \geqslant GT$ при достаточно больших n, то по теореме Петрова имеем

$$\mathbf{P}\left\{f_{\widetilde{A}} > (1+\varepsilon_n)f^*\right\} \leqslant \exp\left(-\frac{Tx}{2}\right) = \exp\left(-\frac{(6\ln n - 4{,}8)\sigma_n}{6\sigma_n}\right)$$
$$= \exp(0{,}8)n^{-1} = \delta_n$$

Таким образом, теорема 1 для нормального распределения доказана.

3.2. Входные данные, распределённые по показательному закону

Рассмотрим более подробно основной шаг второго этапа алгоритма $\widetilde{A}$. Через ξ_k обозначим минимум из k элементов $\tilde{c}_{ij}$, который выбирается на $(n-k-1)$-м основном шаге алгоритма. Вычислим математическое ожидание этой случайной величины:

$$\mathbb{E}\xi_k = \int_0^\infty x\Big(1 - F(x)\Big)^{k-1} k dF(x) = \int_0^\infty \frac{xk}{\alpha_n} \exp\left(-\frac{xk}{\alpha_n}\right) dx$$
$$= -x\exp\left(-\frac{xk}{\alpha_n}\right)\Bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{xk}{\alpha_n}\right) dx = -\frac{\alpha_n}{k}\exp\left(\frac{xk}{-\alpha_n}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{\alpha_n}{k}.$$

Для доказательства асимптотической точности алгоритма $\widetilde{A}$ потребуется следующее утверждение.

Лемма 10. *Пусть* $T = \dfrac{1}{2\alpha_n}$ *и* $g_k = \dfrac{3\alpha_n^2}{k^2}, 1 \leqslant k \leqslant n-2$. *Тогда при любых* k *и* t, $k = 1, \ldots, n-2$ *и* $0 \leqslant t \leqslant T$, *справедливо неравенство*

$$\mathbb{E}e^{t[\xi_k - \mathbb{E}\xi_k]} \leqslant \exp\left(\frac{g_k t^2}{2}\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbb{E}e^{t\xi_k} = \int\limits_0^\infty e^{tx} \exp\left(-\frac{xk}{\alpha_n}\right)\frac{k}{\alpha_n}dx = \frac{\exp\left((t - k/\alpha_n)x\right)}{t - k/\alpha_n}\Bigg|_0^\infty = \frac{k/\alpha_n}{k/\alpha_n - t}$$
$$= \frac{1}{1 - t\alpha_n/k}.$$

Так как $0 \leqslant t \leqslant T$ и $T = \frac{1}{2\alpha_n}$, то, воспользовавшись леммой 1, имеем

$$\mathbb{E}e^{t\xi_k} = \frac{1}{1 - t\alpha_n/k} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{t\alpha_n}{k}\right)^m = 1 + \frac{t\alpha_n}{k} + \frac{t^2\alpha_n^2}{k^2}\left(\frac{1}{1 - t\alpha_n/k}\right)$$
$$\leqslant 1 + \frac{t\alpha_n}{k} + \frac{2\alpha_n^2 t^2}{k^2} \leqslant \exp\left(\frac{t\alpha_n}{k}\right)\exp\left(\frac{1,5\alpha_n^2 t^2}{k^2}\right).$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}e^{t[\xi_k - \mathbb{E}\xi_k]} \leqslant \exp\left(\frac{1,5\alpha_n^2}{k^2}t^2\right) = \exp\left(\frac{g_k}{2}t^2\right).$$

Лемма 10 доказана.

Обозначим через ξ_{n-1} и ξ_n случайные величины, характеризующие веса двух рёбер (дуг), присоединённых на третьем этапе алгоритма. Заметим, что величины $\tilde{\xi}_k = \xi_k - \mathbb{E}\xi_k$, при $k = n-1$ и $k = n$, имеют такое же распределение, что и величина $\tilde{\xi}_1$. Из леммы 10 непосредственно следует, что величины $\tilde{\xi}_k = \xi_k - \mathbb{E}\xi_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n$, удовлетворяют условиям теоремы Петрова.

Вычислим параметры S, T и G и оценим сверху $\mathbb{E}f_{\widetilde{A}}$:

$$S = \sum_{k=1}^{n}\tilde{\xi}_k;\ T = \frac{1}{2\alpha_n};\ G = \sum_{k=2}^{n-2} g_k + 3g_1 = 3\alpha_n^2\left(\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k^2} + 2\right) \leqslant \alpha_n^2(\frac{\pi^2}{2} + 6);$$

$$GT \leqslant \left(\frac{\pi^2}{4} + 3\right)\alpha_n;\ \mathbb{E}f_{\widetilde{A}} = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\xi_k = \sum_{k=2}^{n-2}\frac{\alpha_n}{k} + 3\alpha_n \leqslant \alpha_n(2{,}58 + \ln n).$$

Положим $\hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}} = \alpha_n(2{,}58 + \ln n)$.

Оценим сверху вероятность δ_n несрабатывания алгоритма $\widetilde{A}$ с учётом неравенства $f^* \geqslant n a_n$.

$$\mathbf{P}\{f_{\widetilde{A}} + n a_n > (1+\varepsilon_n) f^*\} \leqslant \mathbf{P}\{f_{\widetilde{A}} > \varepsilon_n n a_n\}$$
$$= \mathbf{P}\{S + \mathbb{E} f_{\widetilde{A}} > n\varepsilon_n a_n\} \leqslant \mathbf{P}\{S > n\varepsilon_n a_n - \hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}}\}.$$

Положим $\varepsilon_n = 5\alpha_n \frac{\ln n}{n}$ и $x = n\varepsilon_n a_n - \hat{\mathbb{E}} f_{\widetilde{A}} = \alpha_n(4\ln n - 2,58)$. Так как $x = \alpha_n(4\ln n - 2,58) > \left(\frac{\pi^2}{4} + 3q\right)\alpha_n \geqslant GT$ при достаточно больших n, то по теореме Петрова имеем

$$\mathbf{P}\{f_{\widetilde{A}} > (1+\varepsilon_n) f^*\} \leqslant \exp\left(-\frac{Tx}{2}\right) = \frac{\exp(0,645)}{n} = \delta_n.$$

Таким образом, теорема 1 доказана полностью.

Из вероятностного анализа алгоритма следует, что использование как неравенства Чебышёва, так и теоремы Петрова приводит к одинаковым оценкам относительной погрешности и асимптотической точности получаемого решения задачи. При этом использование теоремы Петрова даёт существенно меньшую вероятность несрабатывания алгоритма по сравнению с неравенством Чебышёва.

Заключительные замечания

Представляется интересным получение аналогичных результатов для задачи коммивояжёра на максимум. Исследование её более сложно по сравнению с задачей на минимум. Это связано с тем, что для задачи на минимум можно использовать нижнюю оценку вида $f^* \geqslant n a_n$, в то время как для задачи коммивояжёра на максимум с неограниченными сверху данными такого сорта верхней оценки в явном виде не имеется.

Неизученной также является задача коммивояжёра на минимум в случае, когда элементы матрицы расстояний являются случайными величинами, принимающими значения из области $[0, \infty)$. Напомним, что для задачи коммивояжёра на минимум в [6] была продемонстрирована техника вероятностного анализа в случае расстояний, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$. Было бы интересно обобщить эту технику на случай других распределений и на неограниченные сверху входы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гимади Э. Х., Перепелица В. А.** Задача нахождения минимального гамильтонова цикла в взвешенном графе // Дискретный анализ. Сб. научн. тр. Вып. 15. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1969. С. 57–65.

2. **Гимади Э. Х., Перепелица В. А.** Асимптотический подход к решению задачи коммивояжёра // Управляемые системы. Сб. научн. тр. Вып. 12. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1974. С. 35–45.

3. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

4. **Петров В. В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.

5. **Flood M.** The traveling salesman problem // Operations Research Proceedings 1956. V. 4, N 1. P. 61–75.

6. **Frieze A. M.** On random symmetric traveling salesman problems // Mathematics of Operations Research. 2004. V. 29, N 4. P. 878–890.

7. **Gimadi E. Kh.** On some probability inequalities for some discrete optimization problems // Operations Research Proceedings. Selected papers. International Conference OR 2005. Bremen, Berlin: Springer, 2006. P. 283–289.

8. **The traveling salesman problem and its variations.** Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.
E-mail: gimadi@math.nsc.ru

Статья поступила
24 июля 2007 г.