ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2008. Том 15, № 1. 58–81

УДК 519.8

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ С ВЕТВЛЕНИЕМ ПО ДРОБНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ*)

Р. М. Колпаков, М. А. Посыпкин

Изучается сложность решения одномерной булевой задачи о ранце методом ветвей и границ в случае ветвления по дробной переменной. Построено семейство задач, для элементов которого получена рекуррентная формула для сложности. Получена верхняя асимптотическая оценка для сложности задач этого семейства.

1. Введение и постановка задачи

Задача о ранце [7, 9] с одним ограничением является одной из классических задач дискретной оптимизации, применяющейся при моделировании различных экономических процессов, решении проблем, возникающих в промышленном производстве, планировании, управлении и других сферах. Различным вопросам, связанным с данной задачей, посвящено большое число исследований, статей и монографий.

Задача о ранце формулируется следующим образом. Даны n предметов. Предмет i характеризуется весом w_i и ценой p_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Требуется положить в ранец грузоподъемностью C набор предметов максимальной стоимости. Данное неформальное описание может быть математически записано следующим образом: найти максимум функции

$$f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{1}$$

при ограничениях $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant C, \quad x_i \in \{0, 1\}$ и условиях на коэффициенты w_i, $p_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

При решении задачи о ранце размерности n полным перебором потребуется просмотреть в наихудшем случае 2^n булевых векторов. Сделать

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05–01–00495 и 06–07–89079).

поиск решения более эффективным позволяет метод ветвей и границ. Этот метод заключается в последовательной декомпозиции исходной задачи на подзадачи с отсевом подзадач, решение которых заведомо не приведёт к нахождению оптимума исходной задачи. Приведём общую формулировку метода.

Метод ветвей и границ

Данные: список подзадач.

Шаг 1. В пустой список подзадач помещается исходная задача.

Шаг 2. Если список подзадач пуст, то завершить алгоритм. В противном случае из списка выбирается и удаляется подзадача P.

Шаг 3. Для подзадачи P проверяется выполнимость условий отсева, которые будут описаны ниже. Если подзадача P удовлетворяет хотя бы одному из условий отсева, то осуществляется возврат к шагу 2.

Шаг 4. Подзадача P подвергается декомпозиции. Полученные в результате подзадачи помещаются в список подзадач, после чего осуществляется возврат к шагу 2.

Отсев может существенно сократить объём перебора. Идея отсева заключается в том, что решается так называемая *оценочная задача*, которая позволяет получить верхнюю оценку для оптимального значения целевой функции рассматриваемой подзадачи. В качестве оценочной часто выбирают линейную релаксацию задачи (1), которая получается заменой дискретных ограничений задачи линейными: найти максимум функции

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{2}$$

при ограничениях $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant C, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n.$

Задача релаксации решается за линейное относительно числа переменных количество операций методом Данцига [7, 9]. Известно, что её решение достигается на наборе значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, содержащем не более одного дробного (не целого) значения. Эту переменную будем называть *дробной переменной*. Отсев подзадачи на шаге 3 производится в следующих случаях:

1) Оценочная задача не имеет решения.

2) Решение оценочной задачи не превосходит наилучшее из найденных на данный момент значений целевой функции f, называемое *рекордом*.

3) Оптимальное решение рассматриваемой оценочной задачи является полностью целочисленным. Тогда это решение, очевидно, является

оптимальным решением текущей подзадачи.

Если на допустимом решении, полученном в случае 3, целевая функция f принимает значение, превосходящее рекорд, то рекордом становится значение функции f.

Декомпозиция состоит в разбиении исходной задачи на две путём присваивания одной из переменных значений 0 и 1 соответственно и называется *ветвлением* задачи по переменной. Наиболее распространёнными способами выбора переменной для ветвления являются выбор первой переменной в соответствии с некоторым порядком или выбор дробной переменной в задаче релаксации. Пример использования первого подхода можно найти в [8], а второго — в [6]. Ветвление по дробной переменной считается стандартным и предлагается в качестве основного в некоторых учебных курсах [3].

Процесс решения задачи методом ветвей и границ можно представить в виде *дерева ветвления*, вершинам которого соответствуют создаваемые подзадачи. Сложность решения задачи методом ветвей и границ принято определять как число вершин V_a в дереве ветвления или как число концевых вершин V_t этого дерева [1]. В обоих случаях эта величина имеет один и тот же порядок, так как число концевых вершин связано с общим числом вершин в дереве ветвления соотношением $V_a = 2V_t - 1$. В дальнейшем в качестве меры сложности используется число концевых вершин. Проиллюстрируем работу метода ветвей и границ на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу P о ранце: найти максимум функции

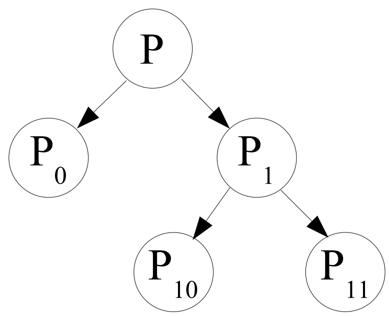
$$2x_1 + 2x_2 \tag{3}$$

при ограничениях

$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 3, \quad x_1 \in \{0, 1\},\ x_2 \in \{0, 1\}.$$

Решим эту задачу методом ветвей и границ. Задача релаксации имеет решение $x_1 = 1;\ x_2 = \frac{1}{2}$. Оценка при этом составляет 3. Согласно шагу 3 метода ветвей и границ порождаются две подзадачи P_0 и P_1, полученные присваиванием дробной переменной x_2 значений 0 и 1 соответственно: $P_0 : 2x_1 \to \max; 2x_1 \leqslant 3; x_1 \in \{0, 1\}$, $P_1 : 2x_1 \to \max; 2x_1 \leqslant 1; 2x_1 \in \{0, 1\}$. Решим задачу P_0. Решение задачи релаксации имеет вид $x_1 = 1$, является целочисленным и, следовательно, даёт допустимое решение задачи P_0. Итоговое решение имеет вид $x_1 = 1, x_2 = 0$, значение целевой функции равно 2. Решим теперь задачу P_1. Решение задачи релаксации имеет вид

$x_1 = \frac{1}{2}$. Оценка при этом составляет 3. Так как $3 > 2$, то данная задача не удовлетворяет условию отсева и подвергается дальнейшей декомпозиции. Присваиванием переменной x_1 значений 0 и 1 порождаются две новые задачи P_{10} и P_{11} с пустым множеством переменных и ограничениями $C_{10} = 1$, $C_{11} = -1$. Вторая задача несовместна. Итоговое решение, получаемое из задачи P_{10}, имеет вид $x_1 = 0;\ x_2 = 1$. В этом случае значение целевой функции равно 2. Таким образом, максимум целевой функции равен 2. Дерево ветвления имеет следующий вид:



В этом дереве имеются 3 концевые вершины. Следовательно, сложность решения задачи P равна 3.

Для задачи о ранце доказано существование случаев, в которых сложность решения задачи методом ветвей и границ близка к полному перебору. В [4] приводится пример следующей задачи: найти максимум функции

$$f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} 2x_i \tag{4}$$

при ограничениях $\sum\limits_{i=1}^{n} 2x_i \leqslant 2\lfloor n/2 \rfloor + 1;\ x_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, n$. Показывается, что сложность решения этой задачи методом ветвей и границ при любом способе выбора очередной подзадачи и переменной для ветвления равна $\binom{n+1}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$. Задача (4) играет существенную роль в дальнейшем изложении. Будем называть её *задачей Финкельштейна* в соответствии с фамилией автора монографии [4] и обозначать сложность её решения через $\Phi(n)$. В [2] показано, что если для ветвления выбирается переменная с наибольшим весом, то сложность решения задачи о ранце с n переменными не превосходит $\Phi(n)$, т. е. задача (4) имеет максимальную сложность решения. В [1] также получены верхние оценки сложности решения задачи о ранце методом ветвей и границ при ветвлении по переменной, выбираемой в определённом порядке. Для этого варианта метода ветвей

и границ пример (4) также оказывается наиболее сложным. Авторам не известны работы, содержащие оценки для сложности метода ветвей и границ при выборе дробной переменной для ветвления. Исследованию этого случая посвящена настоящая статья.

В статье рассмотрено семейство задач $P(T,m,k)$ о ранце, где k — целое число, m — целое неотрицательное число, а $T = \{t_1,\dots,t_n\} \in \mathbb{N}^n$ — упорядоченный набор натуральных чисел длины n. Задача $P(T,m,k)$ имеет следующий вид: найти максимум функции $\sum\limits_{i=1}^{m+n} w_i x_i$ при ограничениях $\sum\limits_{i=1}^{m+n} w_i x_i \leqslant ka+1, \quad x_i \in \{0,1\}, \quad i=1,\dots,n$, где $a \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$, $w_i = \begin{cases} a \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant m, \\ t_{n+m+1-i}\cdot a \text{ при } m < i \leqslant m+n. \end{cases}$

Очевидно, что сложность решения задачи $P(T,m,k)$ не зависит от параметра a. Поэтому эту сложность обозначаем через $S(T,m,k)$. В работе получена реккурентная формула для $S(T,m,k)$. Показано, что для любого $T = \{t_1,\dots,t_n\}$ справедливо соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\max\limits_{k\in\mathbb{Z}} S(T,m,k)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}} = 2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right).$$

Отсюда следует, что сложность решения задачи $P(T,m,k)$ методом ветвей и границ при ветвлении по дробной переменной асимптотически не превосходит $\frac{3}{2}\binom{n+m+1}{\lfloor (n+m)/2\rfloor+1}$, но может быть сколь угодно близкой к этому числу. Таким образом, для рассмотренного варианта метода ветвей и границ существуют задачи $P(T,m,k)$, сложность решения которых превосходит асимптотически в $\frac{3}{2}-\varepsilon$ раз сложность решения задачи (4) с тем же числом переменных.

2. Рекуррентные соотношения для сложности метода ветвей и границ

Применение метода ветвей и границ к задачам из рассматриваемого семейства имеет некоторые особенности. Указанные задачи относятся к частному случаю задачи о ранце — задаче о сумме подмножеств [7, 9].

Задача о сумме подмножеств формулируется следующим образом: найти максимум функции

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \tag{5}$$

при ограничениях $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant C, \quad x_i \in \{0,1\},\ i = 1,\ldots,n$. Ей соответствует следующая линейная задача релаксации: найти максимум функции

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \tag{6}$$

при ограничениях $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant C, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1,\ldots,n.$

Оптимум задачи (6) не меньше оптимума задачи (5). Поэтому если оптимальное решение задачи (6) достигается на целочисленном наборе значений переменных $x_1,\ldots,x_n$, то оно является также оптимальным решением задачи (5).

Задача (6) представляет собой одномерную задачу линейного программирования и может быть решена методом Данцига [3] следующим образом. Сначала определяется номер s *дробной переменной* по следующему правилу: $s = \min\left\{ j \in \{1,\ldots,n\} \mid \sum\limits_{i=1}^{j} w_i > C \right\}$.

Если такого s не существует, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \leqslant C$, то решением задачи (6) является единичный набор значений $x_1,\ldots,x_n$. В противном случае решение задачи (6) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} &x_i = 1 \text{ при } i < s,\\ &x_i = 0 \text{ при } s < i \le n,\\ &x_s = \left(C - \sum_{i=1}^{s-1} w_i \right) \Big/ w_s. \end{aligned}$$

Остановимся подробнее на методе ветвей и границ для задачи (5). Особенностью задач из семейства $P(T,m,k)$ является то, что сумма любой комбинации весов не совпадает со значением границы C. Несложно убедиться, что в этом случае условие 2 для отсева подзадачи на шаге 3 метода ветвей и границ выполняется только тогда, когда $\sum\limits_{i=0}^{n} w_i < C$. Действительно, если $\sum\limits_{i=0}^{n} w_i \geqslant C$, то оптимум в задаче релаксации равняется C, что, очевидно, больше оптимума рассматриваемой подзадачи. Из сказанного следует, что подзадача исключается на шаге 3 из дальнейшего рассмотрения в следующих случаях:

1) решения для подзадачи не существует, т. е. $C < 0$;

2) найденное оптимальное решение задачи релаксации (6) для подзадачи целочисленно, т. е. $\sum\limits_{i=0}^{n} w_i < C$.

Получим теперь рекуррентные соотношения для $S(T, m, k)$. Пусть $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Через $|T|$ обозначим число элементов в наборе T, через $\varnothing$ — набор, не содержащий ни одного элемента, и через $T^{(i)}$ — набор $\{t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n\}$, полученный из T удалением i-го элемента. Выпишем следующие соотношения для $S(T, m, k)$ при различных k.

Базовые рекуррентные соотношения:

1. Пусть $k < 0$. В этом случае задача не имеет решения, поэтому $S(T, m, k) = 1$.

2. Пусть $0 \leqslant k < m$. Тогда дробная переменная имеет номер $l = k + 1 \leqslant m$. При присваивании переменной x_l значения 0 получается подзадача $P(T, m-1, k)$, а при присваивании переменной x_l значения 1 — подзадача $P(T, m-1, k-1)$. Следовательно, $S(T, m, k) = S(T, m-1, k) + S(T, m-1, k-1)$.

3. Пусть[*)] $m + \sum\limits_{j=i+1}^{n} t_j \leqslant k < m + \sum\limits_{j=i}^{n} t_j$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда при присваивании значений 0 и 1 дробной переменной x_{m+i} исходная задача $P(T, m, k)$ распадается на подзадачи $P(T^{(i)}, m, k)$ и $P(T^{(i)}, m, k - t_i)$ соответственно. Поэтому $S(T, m, k) = S(T^{(i)}, m, k) + S(T^{(i)}, m, k - t_i)$.

4. Пусть $m + \sum\limits_{j=1}^{n} t_j \leqslant k$. В этом случае задача $P(T, m, k)$ имеет целочисленное решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_{m+n} = 1$, т. е. $S(T, m, k) = 1$.

Данные соотношения позволяют получить рекуррентную формулу, выражающую $S(T, m, k)$ через $S(T', m, k)$, где $|T'| = |T| - 1$. Сначала рассмотрим случай $|T| = 0$, т. е. $T = \varnothing$.

Утверждение 1. *При всех m, k таких, что $k \geqslant -1$, $m \geqslant \max\{0, k\}$, справедливо равенство*

$$S(\varnothing, m, k) = \binom{m+1}{k+1}. \tag{7}$$

Доказательство. Рекуррентные соотношения для $S(\varnothing, m, k)$ имеют следующий вид

$$S(\varnothing, m, k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k < 0 \text{ и } k = m, \\ S(\varnothing, m-1, k) & \\ \quad + S(\varnothing, m-1, k-1) & \text{при } 0 \leqslant k < m. \end{cases} \tag{8}$$

[*)] Здесь и далее сумму по пустому множеству полагаем равной 0.

Выписанные рекуррентные соотношения можно наглядно представить в виде треугольной таблицы, в ячейках которой расположены значения $S(\varnothing, m, k)$:

$m \backslash k$	-1	0	1	2	…
0	1	1			
1	1	2	1		
2	1	3	3	1	
3	1	4	6	4	1
$\vdots$			…		

На границах данной таблицы ($k = -1$ и $m = k$) имеем $S(\varnothing, m, k) = 1$, а в остальных ячейках значения $S(\varnothing, m, k)$ вычисляются согласно правилу $S(\varnothing, m, k) = S(\varnothing, m-1, k) + S(\varnothing, m-1, k-1)$. Несложно заметить, что данная таблица идентична треугольнику Паскаля, поэтому $S(\varnothing, m, k) = \binom{m+1}{k+1}$. Утверждение 1 доказано.

В дальнейшем нам понадобится следующее обобщение треугольника Паскаля.

Определение 1. *Аддитивным треугольником* с вершиной (m_0, k_0) называется такая функция Δ, принимающая целые значения и заданная на множестве пар целых чисел $\{(m, k) | k \geqslant k_0, m > m_0, m - m_0 \geqslant k - k_0\}$, что $\Delta(m, k) = \Delta(m-1, k) + \Delta(m-1, k-1)$ для $k > k_0$ и $m - m_0 > k - k_0$. Множество $\{(m, k) | k = k_0, m > m_0\}$ называется *левой границей*, а множество $\{(m, k) | m - m_0 = k - k_0, k > k_0\}$ — *правой границей* треугольника Δ. Объединение левой и правой границ образует *границу* треугольника Δ. Множество пар $\{(m, k) | k > k_0, m - m_0 > k - k_0\}$ называется *внутренностью треугольника* Δ.

Аддитивные треугольники удобно изображать в виде треугольных таблиц. В следующей таблице представлен треугольник с вершиной (m_0, k_0), в которой элементы границы выделены серым тоном:

$m \backslash k$	…	k_0	$k_0 + 1$	…	
$\vdots$	…	$\vdots$	$\vdots$		
m_0	…				
$m_0 + 1$	…	*	*		
$m_0 + 2$	…	*	*	*	
$m_0 + 3$	…	*	*	*	*
$\vdots$			…		

Над аддитивными треугольниками можно определить операции суммы и разности.

Определение 2. Пусть Δ' и Δ'' — аддитивные треугольники с вершиной (m_0, k_0). Функция Δ такая, что $\Delta(m,k) = \Delta'(m,k) + \Delta''(m,k)$ на множестве $\{(m,k) | k \geqslant k_0, m > m_0, m - m_0 \geqslant k - k_0\}$, называется *суммой* треугольников Δ' и Δ''. В этом случае будем писать $\Delta = \Delta' + \Delta''$.

Аналогично определяется понятие *разности* двух аддитивных треугольников. Несложно показать, что если Δ' и Δ'' — аддитивные треугольники с вершиной (m_0, k_0), то $\Delta' - \Delta''$ и $\Delta' + \Delta''$ также удовлетворяют определению аддитивного треугольника с вершиной (m_0, k_0).

Заметим, что поскольку внутренние значения аддитивного треугольника однозначно определяются значениями на его границе, то из выполнения соотношения $\Delta(m,k) = \Delta'(m,k) + \Delta''(m,k)$ на границе следует выполнение этого соотношения во всей области определения, т. е. $\Delta = \Delta' + \Delta''$. Это наблюдение позволяет проверять, что один треугольник является суммой или разностью двух других треугольников на основании сравнения значений треугольников на границе. Определим также понятие *подтреугольника*.

Определение 3. Пусть Δ — аддитивный треугольник с вершиной (m_0, k_0). Тогда его *подтреугольником* Δ' с вершиной (m_1, k_1), $m_1 \geqslant m_0$ и $k_1 \geqslant k_0$, называется такой аддитивный треугольник с вершиной (m_1, k_1), что $\Delta'(m,k) = \Delta(m,k)$ при всех m, k таких, что $m > m_1$, $k \geqslant k_1$, $m - m_1 \geqslant k - k_1$.

Перейдём к рассмотрению рекуррентных соотношений для $S(T, m, k)$ в случае $|T| > 0$.

Утверждение 2. *Справедливы следующие соотношения:*
если $0 \leqslant k < \min(m, t_n - 1)$, *то*

$$S(T, m, k) = S(T^{(n)}, m, k) + \binom{m}{k}; \tag{9}$$

если $t_n - 1 \leqslant k \leqslant m - 1$, *то*

$$S(T, m, k) = S(T^{(n)}, m, k) + S(T^{(n)}, m, k - t_n) + \binom{m}{k} - \binom{m - t_n + 1}{k - t_n + 1}; \tag{10}$$

если существует такое i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *что* $m + \sum\limits_{j=i+1}^{n} t_j \leqslant k < m + \sum\limits_{j=i}^{n} t_j$, *то*

$$S(T, m, k) = S(T^{(i)}, m, k) + S(T^{(i)}, m, k - t_i). \tag{11}$$

Доказательство. Соотношение (11) является непосредственным следствием полученных ранее базовых рекуррентных соотношений. Докажем справедливость соотношений (9) и (10).

Рассмотрим рекуррентные соотношения для $S(T, m, k)$ при $|T| > 0$ и $k \leqslant m$:

$$S(T, m, k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k < 0, \\ S(T, m-1, k) & \\ \quad +S(T, m-1, k-1) & \text{при } 0 \leqslant k < m, \\ S(T^{(n)}, m, k) + S(T^{(n)}, m, k - t_n) & \text{при } k = m. \end{cases} \tag{12}$$

Этим рекуррентным соотношениям соответствует аддитивный треугольник Δ_1 следующего вида:

m \ k	-1	0	1	2	…
0	1	$S(T^{(n)},0,0)+$ $S(T^{(n)},0,-t_n)$			
1	1		$S(T^{(n)},1,1)+$ $S(T^{(n)},1,1-t_n)$		
2	1			$S(T^{(n)},2,2)+$ $S(T^{(n)},2,2-t_n)$	
⋮	…				

Треугольник Δ_1 может быть представлен в виде суммы двух треугольников Δ_2 и Δ_3. Треугольник Δ_2 имеет следующий вид:

m \ k	-1	0	1	2	…
0	1	$S(T^{(n)}, 0, 0)$			
1	1		$S(T^{(n)}, 1, 1)$		
2	1			$S(T^{(n)}, 2, 2)$	
⋮	…				

Этот треугольник совпадает с треугольником для $S(T^{(n)}, m, k)$. Поэтому $\Delta_2(m, k) = S(T^{(n)}, m, k)$. Треугольник Δ_3 имеет вид:

m \ k	-1	0	1	2	…
0	0	$S(T^{(n)}, 0, -t_n)$			
1	0		$S(T^{(n)}, 1, 1 - t_n)$		
2	0			$S(T^{(n)}, 2, 2 - t_n)$	
⋮	…				

Так как $S(T^{(n)}, m, k) = 1$ при $k < 0$, то первые t_n ячеек правой границы содержат 1. Этот треугольник может быть разложен на сумму двух треугольников Δ_4 и Δ_5. Треугольник Δ_5 будет рассмотрен далее в статье, а треугольник Δ_4 имеет следующий вид:

m \ k	-1	0	1	$\ldots$	t_n-2	t_n-1	t_n	$\ldots$
0	0	1						
1	0		1					
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$				
t_n-2	0		$\cdots$		1			
t_n-1	0			$\cdots$		0		
t_n	0				$\cdots$		0	
$\vdots$					$\cdots$			

Левая граница этого треугольника представляет собой последовательность, состоящую из нулей. Первые $t_n - 1$ ячеек правой границы содержат единицы, а остальные содержат нули. Этот треугольник может быть представлен в виде разности двух треугольников: $\Delta_4 = \Delta_7 - \Delta_8$. Треугольник Δ_7 представлен на рис. 1.

Левая граница этого треугольника представляет собой последовательность, состоящую из нулей, а правая граница состоит из единиц. Несложно заметить, что $\Delta_7(m, k) = \binom{m}{k}$ при $k \geqslant 0$. Треугольник Δ_8 представлен на рис. 2.

Левая граница треугольника Δ_8 представляет собой последовательность, состоящую из нулей. Первые $t_n - 1$ ячеек правой границы содержат нули, а остальные содержат единицы. Этот треугольник также представляет собой треугольник Паскаля, сдвинутый на $t_n - 1$ вправо и вниз. Поэтому $\Delta_8(m,k) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \leqslant k < t_n - 1; \\ \binom{m-t_n+1}{k-t_n+1} & \text{при } k \geqslant t_n - 1. \end{cases}$

Так как $\Delta_4 = \Delta_7 - \Delta_8$, то

$$\Delta_4(m,k) = \begin{cases} \binom{m}{k} & \text{при } 0 \leqslant k < t_n - 1; \\ \binom{m}{k} - \binom{m-t_n+1}{k-t_n+1} & \text{при } k \geqslant t_n - 1. \end{cases}$$

$m \backslash k$	-1	0	1	$\ldots$	t_n-2	t_n-1	t_n	$\ldots$
0	0	1						
1	0		1					
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$				
t_n-2	0		$\cdots$		1			
t_n-1	0			$\cdots$		1		
t_n	0				$\cdots$		1	
$\vdots$					$\ldots$			

Рис. 1

$m \backslash k$	-1	0	1	$\ldots$	t_n-2	t_n-1	t_n	$\ldots$
0	0	0						
1	0		0					
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$				
t_n-2	0		$\cdots$		0			
t_n-1	0			$\cdots$		1		
t_n	0				$\cdots$		1	
$\vdots$					$\ldots$			

Рис. 2

Треугольник Δ_5 имеет следующий вид:

$m \backslash k$	-1	0	1	$\ldots$	t_n-2	t_n-1	t_n	t_n+1	$\ldots$
0	0	0							
1	0	0	0						
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$					
t_n-2	0		$\cdots$		0				
t_n-1	0		$\cdots$		0	1			
t_n	0		$\cdots$		0	1	$S(T^{(n)}, t_n, 0)$		
t_n+1	0		$\cdots$		0	1		$S(T^{(n)}, t_n+1, 1)$	
$\vdots$						$\ldots$			

Левая граница треугольника Δ_5 содержит только нули. Правая граница является последовательностью вида:

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{t_n-1}, 1, S(T^{(n)}, t_n, 0), S(T^{(n)}, t_n+1, 1), \ldots, S(T^{(n)}, t_n+i, i), \ldots$$

Очевидно, что $\Delta_5(m,k) = 0$ при $k \leqslant t_n - 2$ и $\Delta_5(m,k) = 1$ при $k = t_n - 1$. Легко заметить, что подтреугольник с вершиной $(t_n - 1, t_n - 1)$ треугольника Δ_5 является подтреугольником аддитивного треугольника для $S(T^{(n)}, m, k)$ с вершиной $(t_n - 1, -1)$. Следовательно,

$$\Delta_5(m,k) = \begin{cases} 0, \text{ если } -1 \leqslant k < t_n - 1; \\ S(T^{(n)}, m, k - t_n), \text{ если } t_n - 1 \leqslant k. \end{cases}$$

Суммируя выражения, полученные для треугольников Δ_2, Δ_4 и Δ_5, получаем

$$S(T,m,k) = \left\{ \begin{array}{l} \quad S(T^{(n)}, m, k) + \binom{m}{k}, \text{ если } 0 \leqslant k < t_n - 1; \\ S(T^{(n)}, m, k) + S(T^{(n)}, m, k - t_n) + \binom{m}{k} - \binom{m - t_n + 1}{k - t_n + 1}, \\ \qquad \text{если } t_n - 1 \leqslant k < m. \end{array} \right.$$

Тем самым утверждение 2 доказано.

Утверждение 2 можно применять при получении точных и асимптотических формул для $S(T, m, k)$. Получение точных формул продемонстрируем на следующем примере.

Пример 2. Пусть требуется вычислить сложность решения задачи $P(\{2\}, m, k)$. Рассмотрим различные варианты значения k. Пусть $0 \leqslant k < 2$. Согласно утверждению 2 имеем

$$S(\{2\}, m, k) = S(\varnothing, m, k) + \binom{m}{k}.$$

Используя утверждение 1, получаем

$$S(\{2\}, m, k) = \binom{m+1}{k+1} + \binom{m}{k}.$$

Пусть теперь $2 \leqslant k < m$. Согласно утверждениям 1 и 2 получим

$$\begin{aligned} S(\{2\}, m, k) &= S(\varnothing, m, k) + S(\varnothing, m, k-2) + \binom{m}{k} - \binom{m-1}{k-1} \\ &= \binom{m+1}{k+1} + \binom{m+1}{k-1} + \binom{m-1}{k}. \end{aligned}$$

Если $m \leqslant k < m + 2$, то аналогичным образом получаем

$$S(\{2\}, m, k) = S(\varnothing, m, k) + S(\varnothing, m, k-2) = \binom{m+1}{k+1} + \binom{m+1}{k-1}.$$

3. Асимптотическая оценка сложности

В этом разделе изучается асимптотическое поведение функции $\max\limits_k S(T,m,k)$ при $m \to \infty$. Для этого потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 3. *Пусть γ и γ' — вещественные числа такие, что $0 < \gamma' < \gamma \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m}{\lfloor \gamma' m\rfloor}}{\binom{m}{\lfloor \gamma m\rfloor}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m}{\lceil (1-\gamma')m\rceil}}{\binom{m}{\lceil (1-\gamma)m\rceil}} = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Из соотношений

$$\begin{aligned}
&\tbinom{m}{\lfloor \gamma' m\rfloor}/\tbinom{m}{\lfloor \gamma m\rfloor} = \tfrac{m!}{(\lfloor \gamma' m\rfloor)!(m-\lfloor \gamma' m\rfloor)!}\Big/\tfrac{m!}{(\lfloor \gamma m\rfloor)!(m-\lfloor \gamma m\rfloor)!} = \frac{\prod\limits_{i=\lfloor \gamma' m\rfloor}^{\lfloor \gamma m\rfloor} i}{\prod\limits_{i=m-\lfloor \gamma m\rfloor}^{m-\lfloor \gamma' m\rfloor} i} \\
&= \prod_{i=0}^{\lfloor \gamma m\rfloor-\lfloor \gamma' m\rfloor} \tfrac{i+\lfloor \gamma' m\rfloor}{i+m-\lfloor \gamma m\rfloor} \leqslant \prod_{i=0}^{\lfloor \gamma m\rfloor-\lfloor \gamma' m\rfloor} \tfrac{\lfloor \gamma m\rfloor}{m-\lfloor \gamma' m\rfloor} \\
&\leqslant \prod_{i=0}^{\lfloor \gamma m\rfloor-\lfloor \gamma' m\rfloor} \tfrac{\gamma m}{(1-\gamma')m} \leqslant \left(\tfrac{\gamma}{1-\gamma'}\right)^{\lfloor \gamma m\rfloor-\lfloor \gamma' m\rfloor+1}
\end{aligned}$$

и $\frac{\gamma}{1-\gamma'} < 1$ вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m}{\lfloor \gamma' m\rfloor}}{\binom{m}{\lfloor \gamma m\rfloor}} \leqslant \lim_{m\to\infty} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma'}\right)^{\lfloor \gamma m\rfloor-\lfloor \gamma' m\rfloor+1} = 0.$$

Аналогично показывается, что $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\binom{m}{\lceil (1-\gamma')m\rceil}}{\binom{m}{\lceil (1-\gamma)m\rceil}} = 0.$

Утверждение 4. *Пусть a и b — целые числа, γ — вещественное число такое, что $0 < \gamma < 1$. Тогда*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m+b}{\lfloor \gamma m\rfloor+a}}{\binom{m}{\lfloor \gamma m\rfloor}} = \frac{(1-\gamma)^{a-b}}{\gamma^a}. \tag{14}$$

Доказательство. Обозначим через $C(a,b)$ выражение, стоящее под знаком предела. Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned}
C(a,b) &= \frac{\binom{m+b}{\lfloor \gamma m\rfloor+a}}{\binom{m}{\lfloor \gamma m\rfloor}} = \frac{\frac{(m+b)!}{(\lfloor \gamma m\rfloor+a)!(m-\lfloor \gamma m\rfloor+b-a)!}}{\frac{m!}{\lfloor \gamma m\rfloor!(m-\lfloor \gamma m\rfloor)!}} \\
&= \frac{(m+b)!}{m!}\cdot\frac{\lfloor \gamma m\rfloor!}{(\lfloor \gamma m\rfloor+a)!}\cdot\frac{(m-\lfloor \gamma m\rfloor)!}{(m-\lfloor \gamma m\rfloor+b-a)!)}.
\end{aligned}$$

Преобразуем первый сомножитель:

$$\frac{(m+b)!}{m!} = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{b}(m+i), \text{ если } b \geqslant 0; \\ \frac{1}{\prod\limits_{i=b+1}^{0}(m+i)}, \text{ если } b < 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что при любом b справедливо соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\frac{(m+b)!}{m!}}{m^b} = 1.$$

Будем писать $f(m) \sim g(m)$, если $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{f(m)}{g(m)} = 1$. Тогда $\frac{(m+b)!}{m!} \sim m^b$. Аналогично показывается справедливость следующих соотношений:

$$\begin{aligned} &\frac{\lfloor \gamma m \rfloor !}{(\lfloor \gamma m \rfloor + a)!} \sim \lfloor \gamma m \rfloor^{-a} \sim (\gamma m)^{-a}, \\ &\frac{(m - \lfloor \gamma m \rfloor)!}{(m - \lfloor \gamma m \rfloor + b - a)!} \sim (m - \lfloor \gamma m \rfloor)^{a-b} \sim ((1-\gamma)m)^{a-b}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} C(a,b) &\sim m^b \cdot (\gamma m)^{-a} \cdot ((1-\gamma)m)^{a-b} \\ &= m^{b-a+a-b} \cdot \frac{(1-\gamma)^{a-b}}{\gamma^a} = \frac{(1-\gamma)^{a-b}}{\gamma^a}. \end{aligned}$$

Утверждение 4 доказано.

В случае $\gamma = \frac{1}{2}$ формула (14) приобретает более простой вид:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m+b}{\lfloor m/2 \rfloor + a}}{\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}} = 2^b. \tag{15}$$

Покажем, как применять соотношение (15) для асимптотического анализа сложности задачи из примера 2 при $k = \lfloor m/2 \rfloor$. Для этого, учитывая соотношение (15), сравним её сложность с числом $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$:

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \frac{S(\{2\}, m, \lfloor m/2 \rfloor)}{\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}} &= \frac{\binom{m+1}{\lfloor m/2 \rfloor + 1} + \binom{m+1}{\lfloor m/2 \rfloor - 1} + \binom{m-1}{\lfloor m/2 \rfloor}}{\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}} \\ &= 2 + 2 + 1/2 = 9/2. \end{aligned}$$

Задача Финкельштейна с тем же числом переменных имеет сложность $\Phi(m+1) = \binom{m+2}{\lfloor (m+1)/2 \rfloor + 1}$. Используя снова соотношение (15), можно показать, что $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\binom{m+2}{\lfloor (m+1)/2 \rfloor + 1}}{\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}} = 4$. Таким образом, $S(\{2\}, m, \lfloor m/2 \rfloor) \sim \frac{9}{8}\Phi(m+1)$. Другими словами, сложность задачи $P(\{2\}, m, \lfloor m/2 \rfloor)$ в 9/8 раз отличается асимптотически от сложности задачи Финкельштейна, имеющей одинаковое с $P(\{2\}, m, \lfloor m/2 \rfloor)$ число переменных.

Утверждение 5. *Для любого набора $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ натуральных чисел и любого целого t справедливо соотношение*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S(T, m, \lfloor m/2 \rfloor + t)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2 \rfloor}} = 2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}} \right).$$

Доказательство. Проведём доказательство методом математической индукции по длине n набора T. Пусть $n = 0$. Согласно утверждению 1 имеем $S(\varnothing, m, \lfloor m/2 \rfloor + t) = \binom{m+1}{\lfloor m/2 \rfloor + t + 1}$. Поэтому согласно формуле (15) получаем

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S(\varnothing, m, \lfloor m/2 \rfloor + t)}{\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m+1}{\lfloor m/2 \rfloor + t + 1}}{\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}} = 2.$$

Теперь предположим, что доказываемое утверждение справедливо для всех наборов $|T|$ длины $n-1$. Пусть $|T| = n$. Заметим, что найдётся M такое, что при $m > M$ выполняются неравенства $t_n - 1 \leqslant \lfloor m/2 \rfloor + t \leqslant m - 1$. Поэтому согласно формуле (10) имеем

$$\frac{S(T, m, \lfloor m/2 \rfloor + t)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2 \rfloor}} = \frac{1}{\binom{m+n}{\lfloor m/2 \rfloor}} \cdot \Bigg(S(T^{(n)}, m, \lfloor m/2 \rfloor + t)$$
$$+ S(T^{(n)}, m, \lfloor m/2 \rfloor + t - t_n) + \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor + t} - \binom{m - t_n + 1}{\lfloor m/2 \rfloor + t - t_n + 1} \Bigg).$$

Согласно предположению индукции и соотношению (15) получаем

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S(T^{(n)}, m, \lfloor m/2 \rfloor + t)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2 \rfloor}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m+n-1}{\lfloor m/2 \rfloor}}{\binom{m+n}{\lfloor m/2 \rfloor}} \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{S(T^{(n)}, m, \lfloor m/2 \rfloor + t)}{\binom{m+n-1}{\lfloor m/2 \rfloor}}$$
$$= \frac{1}{2} \left(2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}} \right) \right).$$

Аналогично доказывается справедливость соотношения

$$\lim_{m\to\infty}\frac{S(T^{(n)},m,\lfloor m/2\rfloor+t-t_n)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}}=\frac{1}{2}\cdot\left(2+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right)\right).$$

С помощью формулы (15) можно также установить справедливость равенства

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor+t}-\binom{m-t_n+1}{\lfloor m/2\rfloor+t-t_n+1}}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}}=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+t_n-1}}.$$

Суммируя полученные выражения, получаем

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\frac{S(T,m,\lfloor m/2\rfloor+t)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}}&=2+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right)+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+t_n-1}}\\&=2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right).\end{aligned}$$

Утверждение 5 доказано.

Утверждение 6. *Для любого набора $T=\{t_1,\ldots,t_n\}$ натуральных чисел, любого вещественного γ, $0<\gamma<\frac{1}{2}$, и любого целого t справедливо соотношение*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m}S(T,m,k+t)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}}=2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right).$$

Доказательство. Проведём доказательство методом математической индукции по длине n набора T. Пусть $n=0$. Согласно утверждению 1 имеем

$$\max_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m}S(\varnothing,m,k+t)=\max_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m}\binom{m+1}{k+t+1}\leqslant\binom{m+1}{\lfloor(m+1)/2\rfloor}.$$

С другой стороны, найдётся M такое, что $\gamma m\leqslant\lfloor m/2\rfloor\leqslant(1-\gamma)m$ при любом $m>M$. Таким образом, для всех $m>M$ выполнено неравенство

$$S(\varnothing,m,\lfloor m/2\rfloor+t)\leqslant\max_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m}S(\varnothing,m,k+t).$$

Согласно утверждению 5 имеем $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{S(\varnothing, m, \lfloor m/2\rfloor + t)}{\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}} = 2$. Согласно формуле (15) получаем $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\binom{m+1}{\lfloor (m+1)/2\rfloor}}{\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}} = 2$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant (1-\gamma)m} S(\varnothing, m, k+t)}{\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}} = 2.$$

Тем самым утверждение доказано для случая $n = 0$.

Предположим, что утверждение справедливо для всех наборов T длины $n-1$. Рассмотрим набор T длины n. Пусть

$$V(m) = \frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant (1-\gamma)m} S(T, m, k+t)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}}.$$

Заметим, что существует M' такое, что при $m > M'$ из $\gamma m \leqslant k \leqslant (1-\gamma)m$ вытекает, что $t_n - 1 \leqslant k + t \leqslant m - 1$. Поэтому при $m > M'$ мы можем оценить $V(m)$ сверху согласно формуле (10):

$$V(m) \leqslant V_1(m) + V_2(m) + V_3(m),$$

где

$$V_1(m) = \frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant (1-\gamma)m} S(T^{(n)}, m, k+t)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}},$$

$$V_2(m) = \frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant (1-\gamma)m} S(T^{(n)}, m, k+t-t_n)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}},$$

$$V_3(m) = \frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant (1-\gamma)m} \left(\binom{m}{k+t} - \binom{m-t_n+1}{k+t-t_n+1}\right)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}}.$$

Покажем существование предела $\lim\limits_{m\to\infty} V_1(m)$. Так как $|T^{(n)}| = n-1$, то согласно предположению индукции и формуле (15) получаем

$$\lim_{m\to\infty} V_1(m) = \left(2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right) \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{\binom{m+n-1}{\lfloor m/2\rfloor}}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right)\right).$$

Аналогично доказывается существование предела $\lim\limits_{m\to\infty} V_2(m)$:

$$\lim_{m\to\infty} V_2(m) = \frac{1}{2}\left(2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right)\right).$$

Из очевидного равенства $\binom{m}{k+t} - \binom{m-t_n+1}{k+t-t_n+1} = \sum\limits_{i=1}^{t_n-1}\binom{m-i}{k+t-i+1}$ следует, что

$$V_3(m) = \frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m}\left(\binom{m}{k+t} - \binom{m-t_n+1}{k+t-t_n+1}\right)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}} \leqslant \sum_{i=1}^{t_n-1}\frac{\max\limits_{\substack{\max\\ \gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m}}\binom{m-i}{k+t-i+1}}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}}.$$

Обозначим сумму $\sum\limits_{i=1}^{t_n-1}\frac{\max\limits_{\substack{\max\\ \gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m}}\binom{m-i}{k+t-i+1}}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}}$ через $V_3'(m)$, а сумму $V_1(m) + V_2(m) + V_3'(m)$ через $V'(m)$. Очевидно, что $V(m) \leqslant V'(m)$. В силу формулы (15) справедливо соотношение

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m}\binom{m-i}{k+t-i+1}}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}} = \lim_{m\to\infty}\frac{\binom{m-i}{\lfloor(m-i+1)/2\rfloor}}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}} = \frac{1}{2^{n+i}}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} V_3'(m) = \sum\limits_{i=1}^{t_n-1}\frac{1}{2^{n+i}} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+t_n-1}}$. Суммируя выражения для $\lim\limits_{m\to\infty} V_1(m)$, $\lim\limits_{m\to\infty} V_2(m)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} V_3'(m)$, получим

$$\lim_{m\to\infty} V'(m) = 2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right) + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+t_n-1}}$$
$$= 2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right).$$

Заметим, что существует M'' такое, что $\gamma m < \lfloor m/2\rfloor < (1-\gamma)m$ при $m > M''$. Поэтому

$$V(m) = \frac{\max\limits_{\gamma m\leqslant k\leqslant(1-\gamma)m} S(T,m,k)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}} \geqslant \frac{S(T,m,\lfloor m/2\rfloor + t)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}}.$$

Выражение $\dfrac{S(T,m,\lfloor m/2\rfloor+t)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}}$ обозначим через $V''(m)$. Согласно утверждению 5 имеем $\lim\limits_{m\to\infty} V''(m) = 2+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right)$. Таким образом,

$$\lim_{m\to\infty} V'(m) = \lim_{m\to\infty} V''(m) = 2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right)$$

и при $m>\max(M',M'')$ имеем $V''(m)\leqslant V(m)\leqslant V'(m)$. Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} V(m) = 2+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right)$. Утверждение 6 доказано.

Утверждение 7. *Для любого набора $T=\{t_1,\ldots,t_n\}$ натуральных чисел, любого вещественного γ, $0<\gamma<\frac{1}{2}$, и любого целого t справедливо соотношение*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\cup[(1-\gamma)m,\infty)} S(T,m,k+t)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}} = 0.$$

Доказательство. Проведём доказательство методом математической индукции по длине n набора T. Пусть $n=0$. Выберем произвольное γ', удовлетворяющее соотношению $0<\gamma<\gamma'<\frac{1}{2}$. Тогда найдётся M такое, что при любом $m>M$ выполнено соотношение $\gamma' m\leqslant\lfloor m/2\rfloor\leqslant(1-\gamma')m$ и $k+t\in[0,\gamma' m]\cup[(1-\gamma')m,\infty)$. Поэтому при $m>M$ согласно формуле (7) получим

$$\frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\cup[(1-\gamma)m,\infty)} S(\varnothing,m,k+t)}{\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}} \leqslant \frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma' m]\cup[(1-\gamma')m,\infty]}\binom{m+1}{k+1}}{\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}}$$
$$\leqslant \frac{\max\left(\binom{m+1}{\lfloor\gamma' m\rfloor+1},\binom{m+1}{\lfloor(1-\gamma')m\rfloor-1}\right)}{\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}} = \max\left(\frac{\binom{m+1}{\lfloor\gamma' m\rfloor+1}}{\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}},\frac{\binom{m+1}{\lfloor(1-\gamma')m\rfloor-1}}{\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}}\right).$$

Применяя формулу (13), несложно показать, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\binom{m+1}{\lfloor\gamma' m\rfloor+1}}{\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}} = \lim_{m\to\infty}\frac{\binom{m+1}{\lfloor(1-\gamma')m\rfloor-1}}{\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\cup[(1-\gamma)m,\infty)} S(\varnothing,m,k)}{\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}} = 0.$$

Пусть утверждение доказано для любого набора T длины $n-1$. Докажем справедливость утверждения при $|T| = n$. Из соотношений (9)–(11) следует, что при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant n$, справедливо соотношение

$$S(T, m, k+t) \leqslant S(T^{(i)}, m, k+t) + S(T^{(i)}, m, k+t-t_i) + \binom{m}{k+t}. \quad (16)$$

Так как $|T^{(i)}| = n-1$, то согласно предположению индукции и формуле (15) получаем

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\cup[(1-\gamma)m,\infty)} S(T^{(i)}, m, k+t)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{m\to\infty} \frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\cup[(1-\gamma)m,\infty)} S(T^{(i)}, m, k+t)}{\binom{m+n-1}{\lfloor m/2\rfloor}} = 0. \quad (17)$$

Аналогично показывается, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\cup[(1-\gamma)m,\infty)} S(T^{(i)}, m, k+t-t_i)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}} = 0. \quad (18)$$

Аналогично случаю $n = 0$ доказывается справедливость соотношения

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\cup[(1-\gamma)m,\infty)} \binom{m}{k+t}}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}} = 0. \quad (19)$$

Из соотношений (16) –(19) следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\max\limits_{k\in[0,\gamma m]\cup[(1-\gamma)m,\infty)} S(T, m, k)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}} = 0.$$

Утверждение 7 доказано.

Следующая теорема является непосредственным следствием утверждений 5, 6 и 7.

Теорема. *Для любого набора $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ натуральных чисел справедливо соотношение*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\max\limits_{k} S(T, m, k)}{\binom{m+n}{\lfloor m/2\rfloor}} = 2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right). \quad (20)$$

Формула (20) может быть использована непосредственно для вычисления асимптотической сложности $\max\limits_k S(T,m,k)$ при $m \to \infty$ для заданного набора T. В частности, для задачи из примера 2, используя формулу (20), получим

$$\max_k S\left(\{2\},m,k\right) \sim \left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\binom{m+1}{\lfloor m/2\rfloor} = \frac{9}{4}\binom{m+1}{\lfloor m/2\rfloor}.$$

Теорема позволяет получить

Следствие. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *для любого набора T натуральных чисел*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_k S\left(T,m,k\right)}{\binom{m+n}{[m/2]}} \leqslant 3, \text{ где } n = |T|;$$

(ii) *для любого $\varepsilon > 0$ существует набор T натуральных чисел такой, что*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_k S\left(T,m,k\right)}{\binom{m+n}{[m/2]}} \geqslant 3-\varepsilon, \text{ где } n = |T|.$$

Справедливость утверждения (i) устанавливается следующим образом:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_k S\left(T,m,k\right)}{\binom{m+n}{[m/2]}} = 2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right) \leqslant 2+\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \leqslant 3.$$

Докажем утверждение (ii). Пусть $M = 1+\log_2(\frac{1}{\varepsilon})$. Положим $n = M$ и $t_1 = \cdots = t_n = M$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\max\limits_k S\left(T,m,k\right)}{\binom{m+n}{[m/2]}} = 2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+t_i-1}}\right)$$
$$= 2+\left(1-\frac{1}{2^M}\right)^2 \geqslant 3-\frac{1}{2^{M-1}} = 3-\varepsilon.$$

Следствие доказано.

Заметим, что $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\Phi(m+n)}{\binom{m+n}{[m/2]}} = 2$. Поэтому содержательно следствие означает, что в рассматриваемого классе нет задач, сложность решения которых асимптотически в $3/2$ раза превосходит сложность решения задачи Финкельштейна с тем же числом переменных, при этом существуют задачи, сложность решения которых как угодно близко приближается асимптотически к $\frac{3}{2}$ сложности решения задачи Финкельштейна с тем же числом переменных.

4. Заключение

В статье показано, что в случае ветвления по дробной переменной сложность решения задачи о сумме подмножеств может быть асимптотически в $1{,}5 - \varepsilon$ раза выше, чем сложность решения примера (4), предложенного в [4]. Тем самым показано, что этот пример не является наиболее сложным для рассматриваемого варианта метода ветвей и границ. В то же время, если ветвление производится по переменной с максимальным весом, то пример (4) оказывается самым сложным [2].

Авторы выражают благодарность профессору А. Б. Угольникову за плодотворное обсуждение данной работы, профессору И. Х. Сигалу за внимание к работе, а также участникам семинара «Синтез управляющих систем» под руководством профессора О. М. Касим-Заде за полезные замечания и плодотворное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гришухин В. П.** Эффективность метода ветвей и границ в задачах с булевыми переменными // Исследования по дискретной оптимизации. М.: Наука, 1976. С. 203–230.
2. **Колпаков Р. М., Посыпкин М. А., Сигал И. Х.** О сложности решения задачи о булевом ранце // Труды VII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». М.: МАКС Пресс, 2006. С. 166–171.
3. **Сигал И. Х., Иванова А. П.** Введение в прикладное дискретное программирование. М.: Физматлит, 2002.
4. **Финкельштейн Ю. Ю.** Приближённые методы и прикладные задачи дискретного программирования. М.: Наука, 1976.
5. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
6. **Greenberg H., Hegerich R. L.** A branch and bound algorithm for the knapsack problem // Management Science. 1970. V. 16, N 5. P. 327–332.
7. **Kellerer H., Pfershy U., Pisinger D.** Knapsack problems. Berlin: Springer, 2004.
8. **Kolesar P. J.** A branch and bound algorithm for the knapsack problem // Management Science. 1967. V. 13, N 9. P. 723–735.

9. **Martello S., Toth P.** Knapsack problems. Algorithms and computer implementations. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 1990.

Адрес авторов:

МГУ, мех.-мат. факультет,
Воробьёвы горы,
119992 Москва,
Россия.
E-mail: foroman@mail.ru

Статья поступила
15 мая 2007 г.

Переработанный вариант —
10 января 2008 г.