ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2008. Том 15, № 1. 82–97

УДК 519.716

ЭКВАЦИОНАЛЬНО ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ ЧАСТИЧНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ*)

С. С. Марченков

Изучаются эквационально замкнутые классы частичных булевых функций. Найдено, что число этих классов равно 16. В каждом из классов данного типа указан эквациональный базис. Построена диаграмма включений эквационально замкнутых классов частичных булевых функций.

Частичные булевы функции широко изучаются в дискретной математике и математической кибернетике. Исследование классификации множества P_2^* частичных булевых функций по отношению к оператору суперпозиции начато Р. В. Фрейвалдом [5, 6], который нашёл все предполные в P_2^* классы. В дальнейшем было обнаружено [1], что число всех замкнутых классов в P_2^* континуально. Это обстоятельство значительно затрудняет изучение структуры множества P_2^*.

Вместе с тем в теории функций многозначной логики известно несколько «сильных» операторов замыкания, которые при любом $k \geqslant 2$ на множестве функций k-значной логики порождают конечные классификации. Один из таких операторов — оператор эквационального замыкания — предложен автором в работе [3] (см. также [4]). В [3], в частности, показано, что имеется только 7 эквационально замкнутых классов булевых функций: $T_0, T_1, S, T_{01}, S_{01}, C_0, C_1$ (обозначения замкнутых классов взяты из книги [2]).

В настоящей статье исследуются эквационально замкнутые классы частичных булевых функций. Устанавливается, что при любом $k \geqslant 2$ число эквационально замкнутых классов в множестве частичных функций k-значной логики конечно. Находятся все 16 эквационально замкнутых классов частичных булевых функций. В каждом из этих классов указывается эквациональный базис. Строится диаграмма включений эквационально замкнутых классов частичных булевых функций.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–00438).

1. Основные понятия

Пусть $k \geqslant 2, E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}, P_k$ — множество всех функций на E_k (множество функций k-значной логики), P_k^* — множество всех частичных функций на E_k (множество частичных функций k-значной логики). Если $Q \subseteq P_k^*$ и $n \geqslant 1$, то через $Q^{(n)}$ обозначаем множество всех функций от n переменных из Q. Для любого $n \geqslant 1$ и любого $i, 1 \leqslant i \leqslant n$, пусть $e_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ обозначает селекторную функцию, равную x_i. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^*$, $(a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$ и функция f не определена на наборе $(a_1, \ldots, a_n)$, то этот факт записываем в виде $f(a_1, \ldots, a_n) = *$. Символом $*$ обозначаем также нигде не определённую функцию (от любого числа переменных). Одноместную функцию $f(x)$ из P_2^* будем иногда записывать в виде вектора $(f(0)f(1))$, а двуместную функцию из P_2^* — в виде вектора $(f(0,0)f(0,1)f(1,0)f(1,1))$.

Так же, как для множества P_k функций k-значной логики [7], с использованием понятия формулы над множеством функций определяем на множестве P_k^* операцию суперпозиции. При этом пользуемся дополнительным условием: если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(g_1(x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1), \ldots, g_m(x_1^m, \ldots, x_{n_m}^m)), \tag{1}$$

где $\{x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1, \ldots, x_1^m, \ldots, x_{n_m}^m\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, то значение функции f на наборе $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ определено только в том случае, когда на наборе $\tilde{a}$ определены значения всех функций $g_1, \ldots, g_m$ и на наборе $(g_1(\tilde{a}), \ldots, g_m(\tilde{a}))$ определено значение функции g. Отметим, что в суперпозиции (1) вместо некоторых функций g_l могут быть переменные x_j^l. Если $Q \subseteq P_k^*$, то через $[Q]$ обозначаем замыкание (по суперпозиции) множества функций Q — совокупность всех функций, реализуемых формулами над Q.

Перейдём к определению оператора эквационального замыкания [3, 4]. Предполагаем, что каждая функция из P_k^* имеет индивидуальное обозначение. Для обозначения функций из P_k^* используем символ f с индексами (функциональные константы). Символы $\varphi^{(n)}$ (возможно, с индексами) будут использоваться в качестве функциональных переменных с областью значений $P_k^{*(n)}$.

Пусть $Q \subseteq P_k^*$. Обычным образом вводим понятие терма над множеством функций Q. Пусть $f^{(n)}$ — функциональная константа (обозначающая функцию из множества $Q^{(n)}$), $\varphi^{(n)}$ — функциональная переменная, а $t_1, \ldots, t_n$ — индивидные переменные (не обязательно различные). Тогда

$$f^{(n)}(t_1, \ldots, t_n), \quad \varphi^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) \tag{2}$$

суть термы над Q. Далее, если $t_1, \ldots, t_n$ — термы над Q либо символы индивидных переменных, то выражения (2) также суть термы над Q.

Если t_1, t_2 — термы над Q, то выражение $t_1 = t_2$ называем равенством над Q. Равенства $t_1 = t_2$ и $t_2 = t_1$ в дальнейшем не различаем. Частным случаем равенства $t_1 = t_2$ называем любое равенство вида $t_1' = t_2'$, где выражения t_1', t_2' получаются из термов t_1, t_2 подстановкой вместо всех индивидных переменных некоторых значений из E_k. При этом все вхождения одной и той же индивидной переменной в термы t_1, t_2 заменяются одним и тем же значением из E_k.

Пусть Ξ — конечная система равенств над Q. Последовательность $F_1, \ldots, F_s$ равенств, не содержащих индивидных переменных, называем выводом из системы равенств Ξ, если каждое равенство F_i этой последовательности удовлетворяет одному из следующих условий:

(1) F_i есть частный случай одного из равенств системы Ξ;

(2) для некоторого $j < i$ равенство F_i получается из равенства F_j заменой выражения вида $f^{(n)}(a_1, \ldots, a_n)$ значением a, где $a = f^{(n)}(a_1, \ldots, a_n)$ и $a \neq *$;

(3) для некоторых $j, l < i$ равенство F_i получается из равенства F_j заменой выражения вида $\varphi^{(n)}(a_1, \ldots, a_n)$ значением a, при этом равенство F_l имеет вид $a = \varphi^{(n)}(a_1, \ldots, a_n)$.

Равенство F, не содержащее индивидных переменных, называем выводимым из системы равенств Ξ, если существует вывод из системы равенств Ξ, который содержит равенство F. Систему равенств Ξ называем корректной, если из неё невозможно вывести два равенства вида

$$\varphi^{(n)}(a_1, \ldots, a_n) = a, \quad \varphi^{(n)}(a_1, \ldots, a_n) = b,$$

где $a \neq b$.

Пусть $Q \subseteq P_k^*$, Ξ — корректная система равенств над Q, $\varphi^{(n)}$ — функциональная переменная, входящая в Ξ. Говорим, что функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k^* определяется системой равенств Ξ над Q, если для любого набора $(a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$, принадлежащего области определения функции g, из системы равенств Ξ выводимо равенство $\varphi^{(n)}(a_1, \ldots, a_n) = a$, где $a = g(a_1, \ldots, a_n)$. Множество всех функций, определяемых системой равенств Ξ, обозначим через $\Xi(Q)$. Положим

$$\mathrm{Eq}[Q] = \bigcup \Xi(Q),$$

где объединение берётся по всем корректным системам равенств Ξ над Q. Множество $\mathrm{Eq}[Q]$ называем *эквациональным замыканием* (или Eq-*замыканием*) множества Q. Для оператора Eq-замыкания обычным

образом вводим понятия Eq-замкнутого множества (класса), Eq-порождающей системы, Eq-полного множества и Eq-предполного класса. Отметим [3], что всякий Eq-замкнутый класс замкнут также относительно операции суперпозиции.

Пусть $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — набор из E_k^n. Обозначим через $\ker(\tilde{a})$ следующее отношение эквивалентности на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\{(i, j) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ a_i = a_j\}.$$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^*$. Обозначим через $f^{\tilde{a}}$ функцию, которая получается из функции f следующим отождествлением переменных. В каждом классе эквивалентности отношения $\ker(\tilde{a})$ берём наименьший элемент и обозначаем их в порядке возрастания $i_1, i_2, \ldots, i_l$, где $i_1 = 1$. Функция $f^{\tilde{a}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})$ получается из функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ заменой каждой переменной x_m переменной x_{i_j}, где $(m, i_j) \in \ker(\tilde{a})$.

Легко видеть, что имеет место равенство (в том числе и для значения $*$)

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f^{\tilde{a}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}). \tag{3}$$

2. Частичные функции k-значной логики

Очевидно, что из равенства

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

невозможно вывести ни одного равенства вида $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = a$, где $a_1, \ldots, a_n, a \in E_k$. Поэтому данное равенство «определяет» функцию $*$. Таким образом, всякий Eq-замкнутый класс функций содержит функцию $*$. В частности, $\mathrm{Eq}[\varnothing] = \{*\}$.

Отметим ещё одно простое свойство оператора Eq-замыкания. Пусть $f(x_1, \ldots, x_m)$ — произвольная функция из P_k^* и мы хотим «добавить» к функции f фиктивные переменные, например, переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Это можно сделать с помощью равенства

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_m).$$

Следовательно, всякий Eq-замкнутый класс функций замкнут относительно операции введения фиктивных переменных.

Следующее утверждение обобщает предложение 1 из [3] на случай частичных функций.

Утверждение 1. *При любом $k \geqslant 2$ система всех констант $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ Eq-полна в классе P_k^*.*

Доказательство. Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — функция из P_k^*, отличная от функции $*$. Тогда её можно определить системой всех равенств вида

$$\varphi(a_1,\dots,a_n)=a,$$

где набор $(a_1,\dots,a_n)$ принадлежит области определения функции f и $a=f(a_1,\dots,a_n)$. Утверждение 1 доказано.

Теорема 1 является распространением теоремы 2 из [4] на случай частичных функций.

Теорема 1. *При любом $k\geqslant 2$ любой* Eq-*замкнутый класс функций Q из P_k^* эквационально порождается множеством всех функций из Q, зависящих не более чем от k переменных.*

Доказательство. Пусть Q — эквационально замкнутый класс функций из P_k^* и $f(x_1,\dots,x_n)\in Q$, где $n>k$. Рассмотрим произвольный набор $\tilde a=(a_1,\dots,a_n)$ из E_k^n. Если числа $i_1,\dots,i_l$ определяются по эквивалентности $\ker(\tilde a)$ так, как это сделано в конце раздела 1, то функция f удовлетворяет равенству (3). Очевидно, что помимо равенства (3) для любого набора $\tilde b=(b_1,\dots,b_n)$ функция f будет удовлетворять также равенству

$$f(b_1,\dots,b_n)=f^{\tilde a}(b_{i_1},\dots,b_{i_l}),$$

если только $\ker(\tilde b)=\ker(\tilde a)$. Иными словами, если при получении функции $f^{\tilde a}$ из функции f переменные $x_1,\dots,x_n$ заменяются соответственно переменными $x_{j_1},\dots,x_{j_n}$, где $\{j_1,\dots,j_n\}=\{i_1,\dots,i_l\}$ и $j_1=1$, то равенство

$$\varphi(x_{j_1},\dots,x_{j_n})=f^{\tilde a}(x_{i_1},\dots,x_{i_l}) \qquad (4)$$

позволяет правильно определять значения функции f на всех наборах $\tilde b$, удовлетворяющих условию $\ker(\tilde b)=\ker(\tilde a)$. Отсюда сразу следует, что система всех равенств вида (4), построенных для всех наборов $\tilde a$ из E_k^n, корректно определяет функцию f через функции класса Q, зависящие не более чем от k переменных. Теорема 1 доказана.

Следствие. *При любом $k\geqslant 2$ число эквационально замкнутых классов в P_k^* конечно.*

Идея, применённая в доказательстве теоремы 1, позволяет несколько упростить вид равенств, используемых в определении оператора Eq-замыкания. Рассмотрим произвольное равенство

$$t_1(x_1,\dots,x_n)=t_2(x_1,\dots,x_n), \qquad (5)$$

в котором для упрощения записи оба терма t_1, t_2 считаем зависящими от одних и тех же переменных $x_1, \ldots, x_n$. Предположим, что $n > k$. Пусть $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — произвольный набор из E_k^n и

$$t_1(a_1, \ldots, a_n) = t_2(a_1, \ldots, a_n) \tag{6}$$

есть частный случай равенства (5), полученный заменой переменных $x_1, \ldots, x_n$ значениями $a_1, \ldots, a_n$. Так же, как в конце раздела 1, на основе эквивалентности $\ker(\tilde{a})$ можно определить числа $i_1, \ldots, i_l$ из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и термы $t_1^{\tilde{a}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})$, $t_2^{\tilde{a}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})$, получаемые из термов $t_1(x_1, \ldots, x_n)$, $t_2(x_1, \ldots, x_n)$ отождествлением переменных согласно эквивалентности $\ker(\tilde{a})$. Понятно, что равенство (6) совпадает с равенством

$$t_1^{\tilde{a}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}) = t_2^{\tilde{a}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}).$$

Следовательно, если в некотором выводе используется равенство (6), то его можно получить как частный случай равенства

$$t_1^{\tilde{a}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}) = t_2^{\tilde{a}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}). \tag{7}$$

С другой стороны, равенство (7) образовано из равенства (5) отождествлением переменных. Поэтому все частные случаи равенства (7) содержатся среди частных случаев равенства (5). Это означает, что с точки зрения выводимости равенство (5) можно заменить системой всех равенств вида (7).

Подводя краткий итог проведённым рассуждениям, следует сказать, что в определении оператора Eq-замыкания можно ограничиться такими системами равенств, каждое их которых содержит не более k различных переменных.

Дальнейшее итерирование изложенной выше идеи позволяет получить удобное представление функций из эквационально замкнутых классов. Это представление для всюду определённых функций получено в [4, теорема 1]. В теореме 2 оно воспроизведено для функций из P_k^*. Доказательство теоремы 2 практически полностью повторяет доказательство теоремы 1 из [4]. Отметим лишь, что в теореме 2 оператор замыкания по суперпозиции включает в себя операцию введения фиктивных переменных.

Теорема 2. *Пусть $Q \subseteq P_k^*$ и $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^*$. Тогда функция g принадлежит множеству* $\mathrm{Eq}[Q]$ *в том и только том случае, когда график функции g представим в виде объединения множеств*

$$\{(h_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_k), h(x_1, \ldots, x_k)) \mid x_1, \ldots, x_k \in E_k\}, \tag{8}$$

где функции $h_1, \dots, h_n$ *либо принадлежат множеству* $[Q]$, *либо являются селекторными функциями* $e_1^k, \dots, e_k^k$, *а функция* h *входит в множество* $[Q]$. *При этом множество* (8) *подчиняется очевидному условию согласования*: *если в график функции* g *входят значения вектор-функции*

$$(j_1(x_1, \dots, x_k), \dots, j_n(x_1, \dots, x_k), j(x_1, \dots, x_k))$$

(*набор* $(j_1, \dots, j_n, j)$ *может совпадать с набором* $(h_1, \dots, h_n, h)$) *и для некоторых наборов* $(b_1, \dots, b_k)$, $(c_1, \dots, c_k)$ *из* E_k^k *набор* $(b_1, \dots, b_k)$ *входит в область определения функций* $h_1, \dots, h_n, h$, *а набор* $(c_1, \dots, c_k)$ — *в область определения функций* $(j_1, \dots, j_n, j)$ *и выполняется равенство*

$$(h_1(b_1, \dots, b_k), \dots, h_n(b_1, \dots, b_k)) = (j_1(c_1, \dots, c_k), \dots, j_n(c_1, \dots, c_k)),$$

то $h(b_1, \dots, b_k) = j(c_1, \dots, c_k)$.

Утверждение 2. *Пусть* $k \geqslant 2$, $f(x_1, \dots, x_n)$ — *функция из* P_k^* *с непустой областью значений* E. *Тогда класс* $\mathrm{Eq}[f]$ *содержит функцию* $g(x)$, *которая имеет область определения* E *и совпадает на ней с функцией* x.

Доказательство. Искомая функция $g(x)$ определяется равенством

$$\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, x_n).$$

3. Частичные булевы функции

Определим следующие множества частичных булевых функций:

$$T_0^* = \{f \mid f(\tilde{0}) = 0 \vee f = *\}, \quad T_1^* = \{f \mid f(\tilde{1}) = 1 \vee f = *\},$$

$S^* = \{f \mid f$ на любой паре противоположных наборов принимает либо противоположные значения, либо только значение $*\}$,

$O = \{f \mid f$ принимает только значение 0 или $*\}$,

$I = \{f \mid f$ принимает только значение 1 или $*\}$,

$V_{0*} = \{f \mid f(\tilde{0}) = *\}$, $\quad V_{1*} = \{f \mid f(\tilde{1}) = *\}$,

$S_{01}^* = \{f \mid f \in S^*,\ (f(\tilde{0}), f(\tilde{1})) \in \{(0,1), (*,*)\}\}$.

Установим эквациональную замкнутость множеств $T_0^*, T_1^*, S^*, O, I, O \cap V_{1*}, I \cap V_{0*}, S_{01}^*$.

Рассмотрим множество T_0^*. Для упрощения рассуждений используем представление (8) из теоремы 2. Согласно этой теореме график произвольной функции $g(x_1, \dots, x_n)$ из множества $\mathrm{Eq}[T_0^*]$ представим в виде объединения множеств

$$\{(h_1(x_1, x_2), \dots, h_n(x_1, x_2), h(x_1, x_2)) \mid x_1, x_2 \in E_2\}, \tag{9}$$

где $h_1, \ldots, h_n$ — функции из $[T_0^*]$ либо селекторные функции e_1^2, e_2^2, а h — функция из $[T_0^*]$. Легко убедиться в том, что множество T_0^* замкнуто относительно операции суперпозиции. Предположим, что $g \neq *$. Тогда на некотором наборе $(a_1, a_2) \in E_2^2$ значения всех функций $h_1, \ldots, h_n, h$ определены. Следовательно, каждая из этих функций отлична от функции $*$. Согласно определению множества T_0^* в этом случае имеем

$$h_1(0,0) = \ldots = h_n(0,0) = h(0,0) = 0.$$

Это означает, что $g(0, \ldots, 0) = 0$. Тем самым Eq-замкнутость множества T_0^* установлена. Аналогично устанавливается Eq-замкнутость множества T_1^*.

Перейдём к множеству S^*. Нетрудно видеть, что множество S^* замкнуто относительно операции суперпозиции. Возьмём произвольную функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$ из S^*. Предположим, что значение функции g на наборе $(a_1, \ldots, a_n)$ определено и в соответствии с теоремой 2 точка $(a_1, \ldots, a_n, g(a_1, \ldots, a_n))$ графика функции g определяется значением вектор-функции $(h_1, \ldots, h_n, h)$ на наборе $(b_1, b_2) \in E_2^2$. Тогда согласно определению множества S^* выполняются соотношения

$$h_1(\bar{b}_1, \bar{b}_2) = \bar{a}_1, \ldots, h_n(\bar{b}_1, \bar{b}_2) = \bar{a}_n, \quad h(\bar{b}_1, \bar{b}_2) = \bar{h}(b_1, b_2),$$

где $\bar{a}$ есть булево отрицание значения a. Отсюда следует, что значение $g(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$ определено и равно $\bar{h}(b_1, b_2)$. Таким образом, Eq-замкнутость множества S^* установлена.

Eq-замкнутость множеств O, I легко доказывается с помощью рассмотрения функции h в представлении (9).

Множества V_{0*}, V_{1*} замкнуты относительно операции суперпозиции, но, как несложно показать, не являются Eq-замкнутыми. Тем не менее множества $O \cap V_{1*}$ и $I \cap V_{0*}$ эквационально замкнуты. Рассмотрим, например, множество $O \cap V_{1*}$. Пусть график функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathrm{Eq}[O \cap V_{1*}]$ представим в виде объединения множеств (9). Если какая-либо из функций $h_1, \ldots, h_n$ принадлежит классу O, то вектор-функция $(h_1(x_1, x_2), \ldots, h_n(x_1, x_2))$ не принимает значение $(1, \ldots, 1)$. Если же каждая из функций $h_1, \ldots, h_n$ является функцией e_1^2 или e_2^2, то ввиду включения $h \in V_{1*}$ значение функции g на наборе $(1, \ldots, 1)$ будет не определено. Тем самым доказано, что $g \in O \cap V_{1*}$.

Обратимся к множеству S_{01}^*. Легко проверить, что множество S_{01}^* замкнуто относительно операции суперпозиции. Пусть график функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathrm{Eq}[S_{01}^*]$ представим в виде объединения множеств (9).

Понятно, что для доказательства включения $g \in S_{01}^*$ достаточно рассмотреть лишь случай, когда каждая из функций $h_1, \ldots, h_n, h$ сохраняет 0 и сохраняет 1. В этом случае, очевидно, функция g также будет сохранять обе константы 0 и 1. А поскольку $g \in S^*$, это означает, что $g \in S_{01}^*$.

Положим

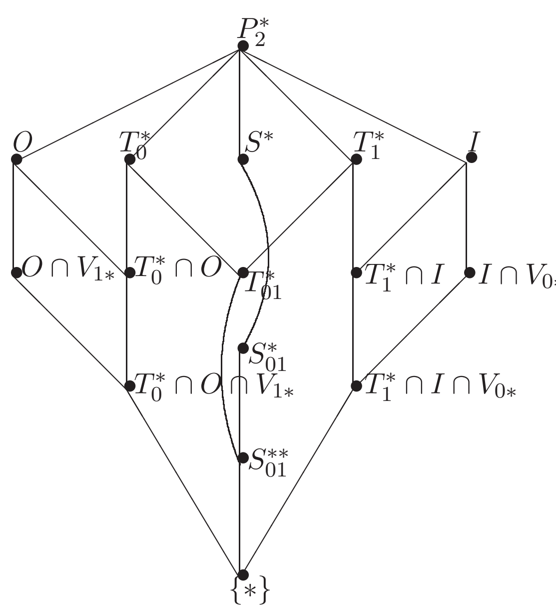
$$T_{01}^* = T_0^* \cap T_1^*, \quad S_{01}^{**} = S^* \cap T_{01}^*.$$

В оставшейся части статьи мы покажем, что все эквационально замкнутые классы частичных булевых функций исчерпываются шестнадцатью классами

$$P_2^*, \quad T_0^*, \quad T_1^*, \quad S^*, \quad O, \quad I, \quad T_{01}^*, \quad T_0^* \cap O, \quad T_1^* \cap I,$$

$$O \cap V_{1*},\ I \cap V_{0*},\ S_{01}^*,\ S_{01}^{**},\ T_0^* \cap O \cap V_{1*},\ T_1^* \cap I \cap V_{0*},\ \{*\}.$$

Эквациональная замкнутость некоторых из этих классов доказана выше, остальные классы эквационально замкнуты как пересечения эквационально замкнутых классов. Диаграмма включений всех 16 классов представлена на рисунке.



Теорема 3. *Имеют место следующие соотношения:*

$$P_2^* = \mathrm{Eq}[(0*), (*1)], \quad T_0^* = \mathrm{Eq}[x, (0*)], \quad T_1^* = \mathrm{Eq}[x, (*1)], \quad S^* = \mathrm{Eq}[\bar{x}],$$

$O = \mathrm{Eq}[(*0)],\ I = \mathrm{Eq}[(1*)],\ T_{01}^* = \mathrm{Eq}[x \vee y] = \mathrm{Eq}[xy],\ T_0^* \cap O = \mathrm{Eq}[0],$ $T_1^* \cap I = \mathrm{Eq}[1],\ O \cap V_{1*} = \mathrm{Eq}[(*0**)],\ I \cap V_{0*} = \mathrm{Eq}[(*1**)],\ S_{01}^* = \mathrm{Eq}[(*01*)],$ $T_0^* \cap O \cap V_{1*} = \mathrm{Eq}[(0*)],\ T_1^* \cap I \cap V_{0*} = \mathrm{Eq}[(*1)],\ S_{01}^{**} = \mathrm{Eq}[x],\ \{*\} = \mathrm{Eq}[\varnothing].$

Доказательство. Заметим, что нигде не определённая функция $*$ Eq-порождается пустым множеством функций, т. е. $\{*\} = \mathrm{Eq}[\varnothing]$.

Рассмотрим класс S_{01}^{**}. Очевидно, что $x \in S_{01}^{**}$. Поэтому $\mathrm{Eq}[x] \subseteq S_{01}^{**}$. Покажем, что $S_{01}^{**} \subseteq \mathrm{Eq}[x]$. Ввиду теоремы 1 достаточно установить, что все одно- и двуместные функции из S_{01}^{**} Eq-порождаются функцией x. Однако из одноместных функций классу S_{01}^{**} принадлежат лишь функции x и $*$, а любая двуместная функция либо получается из одноместной добавлением фиктивной переменной (функции $e_1^2(x,y), e_2^2(x,y)$ и $*$), либо совпадает с функцией $(0**1)$. Последнюю функцию определяет равенство $\varphi(x,x) = x$.

Рассмотрим класс $T_0^* \cap O \cap V_{1*}$. Легко видеть, что функция $(0*)$ входит в этот класс. Все одноместные функции класса $T_0^* \cap O \cap V_{1*}$ суть $(0*)$ и $*$, а все двуместные функции, отличные от функции $*$, —

$$(0***),\quad (00**),\quad (0*0*),\quad (000*).$$

Первая из этих двуместных функций получается из функции $(0*)$ с помощью равенства

$$\varphi(x,x) = (0*)(x), \tag{10}$$

вторая и третья — добавлением фиктивной переменной, а четвёртая — с помощью системы равенств

$$\varphi(x,y) = (0*)(x), \quad \varphi(x,y) = (0*)(y). \tag{11}$$

Двойственным образом рассматривается класс $T_1^* \cap I \cap V_{0*}$.

Рассмотрим класс S_{01}^*. Очевидно, что $(*01*) \in S_{01}^*$. Одноместными функциями класса S_{01}^* являются лишь функции x и $*$. Функция x Eq-порождается функцией $(*01*)$ согласно утверждению 2. Любая двуместная функция класса S_{01}^* либо принадлежит классу S_{01}^{**} (следовательно, Eq-порождается функцией x), либо совпадает с одной из функций $(*01*), (*10*)$.

Перейдём к классу $T_0^* \cap O$. Очевидно, что $0 \in T_0^* \cap O$. Все одноместные функции класса $T_0^* \cap O$ суть $0, (0*)$ и $*$. Функция $(0*)$, как вытекает из утверждения 2, Eq-порождается функцией 0. Далее, если в класс $T_0^* \cap O$ входит функция $g(x,y)$, то в этот класс входят, конечно, одноместные функции

$$g_1(x) = g(x,x), \quad g_2(x) = g(0,x), \quad g_3(x) = g(x,0). \tag{12}$$

Вместе с тем функция $g(x, y)$ определяется через функции g_1, g_2, g_3 системой равенств

$$\varphi(x, x) = g_1(x), \quad \varphi(0, x) = g_2(x), \quad \varphi(x, 0) = g_3(x).$$

Класс $T_1^* \cap I$ рассматривается двойственным образом.

Обратимся к классу $O \cap V_{1*}$. Понятно, что классу $O \cap V_{1*}$ принадлежит функция $(*0**)$. Одноместными функциями класса $O \cap V_{1*}$ являются функции $(0*)$ и $*$. Как установлено в утверждении 2, функция $(0*)$ Eq-порождается функцией $(*0**)$. Все двуместные функции класса $O \cap V_{1*}$, отличные от функции $*$, содержатся в списке

$$(0***), \ (*0**), \ (**0*), \ (00**), \ (0*0*), \ (*00*), \ (000*).$$

Первая из этих функций определяется через функцию $(0*)$ с помощью равенства (10), третья получается из функции $(*0**)$ перестановкой переменных, четвёртая и пятая — из функции $(0*)$ добавлением фиктивной переменной, шестая определяется системой равенств

$$\varphi(x, y) = (*0**)(x, y), \quad \varphi(x, y) = (*0**)(y, x), \tag{13}$$

седьмая — системой равенств (11). Класс $I \cap V_{0*}$ рассматривается двойственным образом.

Рассмотрим класс T_{01}^*. Докажем, что $T_{01}^* = \mathrm{Eq}[x \vee y]$. Очевидно, что $(x \vee y) \in T_{01}^*$. Все одно- и двуместные функции класса T_{01}^*, отличные от функции $*$, суть

$$x, \ e_1^2(x, y), \ e_2^2(x, y), \ x \vee y, \ xy, \ (0**1), \ (00*1), \ (0*01), \ (01*1), \ (0*11).$$

Очевидно, что $x = x \vee x$. Ввиду доказанного равенства $S_{01}^* = \mathrm{Eq}[x]$ из функции x Eq-порождаются функции e_1^2, e_2^2 и $(0**1)$. Подстановки

$$(0**1)(y, x \vee y), \quad e_1^2(x, (01*1)(x, y))$$

дают соответственно функции $(01*1)$ и $(00*1)$, а система равенств

$$\varphi(x, y) = (00*1)(x, y), \quad \varphi(x, y) = (00*1)(y, x) \tag{14}$$

определяет функцию xy. Оставшиеся две функции получаются из уже рассмотренных перестановкой переменных. Равенство $T_{01}^* = \mathrm{Eq}[xy]$ устанавливается с привлечением соображений двойственности.

Перейдём к классу S^*. Очевидно, что $\bar{x} \in S^*$. Все одноместные функции класса S^* суть $x, \bar{x}, *$. Нетрудно видеть, что они Eq-порождаются

функцией $\bar{x}$. Далее, если $g(x, y) \in S^*$ и $g_1(x) = g(x, x), g_2(x) = g(x, \bar{x})$, то функции g_1, g_2 принадлежат классу S^*. Вместе с тем функция g Eq-определяется через функции $\bar{x}, g_1, g_2$:

$$\varphi(x, x) = g_1(x), \quad \varphi(x, \bar{x}) = g_2(x).$$

Обратимся к классу O. Очевидно, что $(*0) \in O$. Из одноместных функций класс O содержит лишь функции $0, (0*), (*0), *$. Функция $(0*)$ Eq-порождается функцией $(*0)$ (см. утверждение 2), а константа 0 получается из функций $(0*)$ и $(*0)$ с помощью системы равенств

$$\varphi(x) = (0*)(x), \quad \varphi(x) = (*0)(x).$$

Для получения произвольной функции $g(x, y) \in O$ пользуемся системой равенств (12), в которой g_1, g_2, g_3 — одноместные функции из O. Двойственным образом рассматривается класс I.

Рассмотрим класс T_0^*. Очевидно, что функции $x, (0*)$ входят в класс T_0^*. Из одноместных функций классу T_0^* принадлежат ещё функции 0 и $*$. Получим константу 0. Система равенств (11) определяет функцию $(000*)$, а равенство $\varphi(x) = (000*)(x, y)$ — константу 0. Для получения произвольной функции $g(x, y)$ из T_0^* пользуемся системой равенств (12). Класс T_1^* рассматривается двойственным образом.

Установим, наконец, равенство $P_2^* = \mathrm{Eq}[(0*), (*1)]$. Система равенств

$$\varphi(x) = (0*)(x), \quad \varphi(x) = (*1)(x) \qquad (15)$$

определяет функцию x. Константы 0 и 1 получаем в силу доказанных соотношений $T_0^* = \mathrm{Eq}[x, (0*)]$ и $T_1^* = \mathrm{Eq}[x, (*1)]$. Далее применяем утверждение 1. Теорема 3 доказана.

Теорема 4 (критерий Eq-полноты в классе P_2^*). *Система частичных булевых функций Eq-полна в классе P_2^* тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов T_0^*, T_1^*, S^*, O, I.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы следует из Eq-замкнутости классов T_0^*, T_1^*, S^*, O, I и несовпадении их с классом P_2^*. Докажем достаточность условия теоремы.

Пусть некоторая система функций из P_2^* целиком не содержится ни в одном из классов T_0^*, T_1^*, S^*, O, I. Тогда в неё входят такие функции $f_1, \ldots, f_5$, что $f_1 \notin T_0^*, \quad f_2 \notin T_1^*, \quad f_3 \notin S^*, \quad f_4 \notin O, \quad f_5 \notin I$. Покажем, что система функций $\{f_1, \ldots, f_5\}$ Eq-полна в классе P_2^*.

Возьмём функцию f_1. Согласно определению класса T_0^* из функции f_1 отождествлением и, возможно, перестановкой переменных можно получить одну из функций

$$1,\ \bar{x},\ (1*),\ (*0),\ (*1),\ (*00*),\ (*0**),\ (*11*),\ (*1**),\ (*01*).$$

Согласно утверждению 2 из функций $1, (1*), (*11*), (*1**)$ образуем функцию $(*1)$. Из функции $(*0**)$ с помощью системы равенств (13) получаем функцию $(*00*)$. Таким образом, в класс $\mathrm{Eq}[f_1]$ входит функция g_1, которая совпадает с одной из функций

$$\bar{x}, \quad (*0), \quad (*1), \quad (*00*), \quad (*01*).$$

В силу аналогичных соображений в класс $\mathrm{Eq}[f_2]$ входит функция g_2, которая совпадает с одной из функций

$$\bar{x}, \quad (0*), \quad (1*), \quad (*11*), \quad (*01*).$$

Применяя к функции f_3 отождествление переменных и, возможно, утверждение 2, приходим к функции g_3, которая совпадает с одной из функций

$$(0*), \quad (*1).$$

Для функций f_4, f_5 указанные выше преобразования плюс, быть может, подстановка функции $\bar{x}$ в себя дают функции $g_4(x), g_5(x)$, которые входят соответственно в множества $\{x, (*1)\}$, $\{x, (0*)\}$.

Пусть $g_3 = (0*)$. Поскольку в случае $g_4 = (*1)$ из функций $(0*), (*1)$ с помощью системы равенств (15) можно «собрать» функцию x, далее будем предполагать, что $g_4(x) = x$. Рассмотрим все возможности для функции g_1.

Если $g_1(x) = \bar{x}$, то подстановка функции $\bar{x}$ в функцию $(0*)$ даёт функцию $(*0)$. Согласно теореме 3 функция $(*0)$ образует Eq-базис класса O. В частности, из неё можно получить константу 0. Константа 0 вместе с функцией $\bar{x}$ порождает константу 1, и мы приходим к Eq-полной в P_2^* системе двух констант.

Пусть $g_1 = (*0)$. С помощью равенства $\varphi((*0)(x)) = x$ образуем функцию $(1*)$, а далее с помощью системы равенств

$$\varphi(x) = (*0)(x), \quad \varphi(x) = (1*)(x)$$

— функцию $\bar{x}$.

Пусть $g_1 = (*1)$. Тогда равенство $\varphi((0*)(x), (*1)(y)) = y$ определяет функцию $(*1**)$, а равенство $\varphi((*1**)(x, y)) = x$ — уже рассмотренную функцию $(*0)$.

Пусть $g_1 \in \{(*00*), (*01*)\}$. Тогда равенство $\varphi(g_1((0*)(x), y)) = y$ определяет функцию $(1*)$. Из неё в силу утверждения 2 получаем функцию $(*1)$. Этот случай уже рассмотрен выше.

Итак, при $g_3 = (0*)$ во всех возможных случаях приходим к Eq-полной в классе P_2^* системе. Равенство $g_3 = (*1)$ рассматривается двойственным образом. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Единственным* Eq-*предполным в* S^* *классом является класс* S_{01}^*, *единственными* Eq-*предполными в* T_0^* *классами являются классы* $T_0^* \cap O$ *и* T_{01}^*, *единственными* Eq-*предполными в* O *классами являются классы* $O \cap V_{1*}$ *и* $T_0^* \cap O$, *единственными* Eq-*предполными в* T_1^* *классами являются классы* $T_1^* \cap I$ *и* T_{01}^*, *единственными* Eq-*предполными в* I *классами являются классы* $I \cap V_{0*}$ *и* $T_1^* \cap I$.

Доказательство. Мы рассмотрим лишь классы S^*, T_0^* и O. Пусть $f \in S^* \setminus S_{01}^*$. Тогда либо $f(\tilde{0}) = 1$ и $f(\tilde{1}) = 0$, либо $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1}) = *$ и $f \neq *$. В первом случае отождествлением всех переменных из функции f получаем функцию $\bar{x}$. Далее пользуемся теоремой 3. Во втором случае отождествление переменных (в две группы) даёт функцию $g = (*01*)$. Согласно утверждению 2 имеем $x \in \mathrm{Eq}[g]$. Поэтому равенство $\varphi(g(x, y)) = y$ определяет функцию $\bar{x}$.

Пусть $f_1 \in T_0^* \setminus O$ и $f_2 \in T_0^* \setminus T_1^*$. Тогда отождествлением переменных из функции f_1 можно получить одну из функций x или $(0abc)$, где $1 \in \{a, b, c\}$, а из функции f_2 — одну из функций $0, (0*)$. Ввиду утверждения 2 можно считать, что $(0*) \in \mathrm{Eq}[f_2]$. Если $x \in \mathrm{Eq}[f_1]$, то в силу теоремы 3 приходим к Eq-полной в классе T_0^* системе $\{x, (0*)\}$. Если же $(0abc) \in \mathrm{Eq}[f_1]$, где $1 \in \{a, b, c\}$, то согласно утверждению 2 имеем $x \in \mathrm{Eq}[f_1]$.

Пусть $f_1 \in O \setminus V_{1*}$, $f_2 \in O \setminus T_0^*$. Тогда $f_1(\tilde{1}) = 0, f_2(\tilde{0}) = *$ и $f_2 \neq *$. Из функции f_1 отождествлением всех переменных получаем функцию $g_1(x)$, которая совпадает с одной из функций $0, (*0)$. Из функции f_2 отождествлением переменных получаем функцию g_2, которая совпадает с одной из функций $(*0), (*0**), (*00*)$. Поскольку функция $(*0)$ образует Eq-базис класса O (см. теорему 3), можно предполагать, что $g_1 = 0$ и g_2 есть функция двух переменных. В этом случае суперпозиция $g_2(g_1(x), x)$ даёт функцию $(*0)$. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Единственным* Eq-*предполным в* T_{01}^* *классом является*

класс S_{01}^{**}, *единственным* Eq-*предполным в* $T_0^* \cap O$ *и* $O \cap V_{1*}$ *классом является класс* $T_0^* \cap O \cap V_{1*}$, *единственным* Eq-*предполным в* $T_1^* \cap I$ *и* $I \cap V_{0*}$ *классом является класс* $T_1^* \cap I \cap V_{0*}$.

Доказательство. Рассмотрим только классы $T_{01}^*, T_0^* \cap O, O \cap V_{1*}$. Пусть $f \in T_{01}^* \setminus S_{01}^{**}$. Тогда отождествлением переменных из функции f можно получить одну из функций $x \vee y, xy, (00*1), (01*1)$. По теореме 3 каждая из функций $x \vee y, xy$ образует Eq-базис класса T_{01}^*. Система равенств (14) определяет функцию xy через функцию $(00*1)$. Аналогичная система равенств определяет функцию $x \vee y$ через функцию $(01*1)$.

Пусть $f \in (T_0^* \cap O) \setminus V_{1*}$. Тогда отождествление всех переменных в функции f даёт константу 0. Далее пользуемся теоремой 3.

Пусть $f \in (O \cap V_{1*}) \setminus T_0^*$. Тогда отождествлением переменных из функции f можно получить одну из функций $(*0**), (*00*)$. Во втором случае функцию $(*0**)$, образующую Eq-базис класса $O \cap V_{1*}$, получаем из функции $(*00*)$ с помощью равенства

$$\varphi(x, y) = (*00*)((0*)(x), y)$$

(включение $(0*) \in \mathrm{Eq}[(*00*)]$ следует из утверждения 2). Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Единственным* Eq-*предполным в* S_{01}^* *классом является класс* S_{01}^{**}. *Классы* $S_{01}^{**}, T_0^* \cap O \cap V_{1*}$ *и* $T_1^* \cap I \cap V_{0*}$ *определяют атомы в решётке* Eq-*замкнутых классов частичных булевых функций.*

Доказательство. Пусть $f \in S_{01}^* \setminus S_{01}^{**}$. Тогда отождествлением переменных из функции f можно получить функцию $(*01*)$. Далее применяем теорему 3. При рассмотрении классов $S_{01}^{**}, T_0^* \cap O \cap V_{1*}$ и $T_1^* \cap I \cap V_{0*}$ следует использовать утверждение 2, согласно которому любой Eq-замкнутый класс функций из P_2^*, отличный от класса $\{*\}$, содержит хотя бы одну из функций $x, (0*), (*1)$. Далее применяем теорему 3. Теорема 7 доказана.

Из теорем 4–7 вытекает, что имеется ровно 16 эквационально замкнутых классов частичных булевых функций. Все они определены в начале раздела 3 и представлены на диаграмме включений. Eq-базисы данных классов указаны в теореме 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Б., Вороненко А. А.** О некоторых замкнутых класссах в частичной двузначной логике // Дискретная математика. 1994. Т. 6, вып. 4. С. 58–79.
2. **Марченков С. С.** Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000.

3. **Марченков С. С.** Эквациональное замыкание // Дискретная математика. 2005. Т. 17, вып. 2. С. 117–126.
4. **Марченков С. С.** О строении эквационально замкнутых классов // Дискретная математика. 2006. Т. 18, вып. 4. С. 18–30.
5. **Фрейвалд Р. В.** Критерий полноты для частичных функций алгебры логики и многозначных логик // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167, № 6. С. 1249–1250.
6. **Фрейвалд Р. В.** Функциональная полнота для не всюду определённых функций алгебры логики // Дискретный анализ. Сб. научн. тр. Вып. 8. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1966. С. 55–68.
7. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

Адрес автора:

Московский гос. ун-т им. М.В.Ломоносова
Воробьёвы горы, 2-й учебный корпус,
119992 Москва,
Россия.
E-mail: mathcyb@cs.msu.su

Статья поступила
11 октября 2007 г.