ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2008. Том 15, № 2. 3–11

УДК 519.95

О МИНИМАЛЬНЫХ ТЕСТАХ ДЛЯ СХЕМ, РЕАЛИЗУЮЩИХ ДИЗЪЮНКЦИЮ

С. Р. Беджанова

Исследуются тесты для схем из функциональных элементов, реализующих дизъюнкцию n переменных. В качестве неисправностей рассматриваются инверсные неисправности: на входах схем, на входах элементов схем и на выходах элементов схем. В первом случае для тестов функции установлено, что длина минимального полного проверяющего теста равна единице, длина минимального единичного диагностического теста равна n, а длина минимального полного диагностического теста равна $2^n - 1$. Во втором и третьем случаях найдены минимальные единичные тесты для схем в базисах $\{x \vee y\}$ и $\{\,\overline{x}, x \to y\}$. Оказалось, что для обоих базисов при неисправностях на выходах элементов минимальные единичные диагностические тесты содержат по два набора, а во всех остальных случаях минимальные единичные тесты содержат по одному набору.

Введение

Будем рассматривать схемы из функциональных элементов, реализующие дизъюнкцию n переменных. Среди этих схем будем выделять те, которые допускают тесты минимально возможной длины, и будем устанавливать длину таких минимальных тестов; как обычно, минимум берётся сперва по всем тестам определённого типа для определённой схемы, реализующей $f(\tilde{x}){=}x_1 \vee \dots \vee x_n$, а затем по всем схемам, реализующим $f(\tilde{x})$ (используемые ниже определения различных тестов, длины теста, минимального теста, функции неисправности, тестов функции и наиболее часто встречающихся неисправностей можно найти, например, в [2–4]).

1. Минимальные тесты функции

Пусть неисправен только один вход схемы, реализующей в исправном состоянии функцию $f(\tilde{x}){=}x_1 \vee \dots \vee x_n$. Тогда возможны следующие функции неисправности: $g_1 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$, $g_2 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee x_n$, ..., $g_n = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee \overline{x_n}$. Так как $g_1(\tilde{0}) = \dots = g_n(\tilde{0}) = 1$, а $f(\tilde{0}) = 0$, то справедлива

Теорема 1. *Минимальный единичный проверяющий тест функции $x_1 \vee \cdots \vee x_n$ состоит из одного набора.*

Рассмотрим таблицу 1, в клетках которой находятся наборы, на которых различаются соответствующие функции; $A = \{(0, ..., 0), (1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1)\}$ — множество всех наборов таблицы.

Таблица 1.

	g_1	g_2	...	g_{n-1}	g_n
f	(0,0,0,...,0) (1,0,0,...,0)	(0,0,0,...,0) (0,1,0,...,0)	...	(0,0,0,...,0) (0,...,0,1,0)	(0,0,0,...,0) (0,...,0,0,1)
g_1		(1,0,0,...,0) (0,1,0,...,0)	...	(1,0,0,...,0) (0,...,0,1,0)	(1,0,0,...,0) (0,...,0,0,1)
g_2			...	(0,1,0,...,0) (0,...,0,1,0)	(0,1,0,...,0) (0,...,0,0,1)
...			...	...	...
g_{n-1}					(0,0,0,...,0) (0,...,0,0,1)

Построим всевозможные тупиковые диагностические тесты. Предположим, что T_0 — некоторый тест и $\tilde{0} \notin T_0$. В таком случае по первой строке таблицы 1 видно, что $(1, 0, ..., 0)$, $(0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1) \in T_0$, т. е. $A \setminus \{\tilde{0}\} \subseteq T_0$. С другой стороны, любой набор, на котором $g_i \neq g_j$, имеет вид $(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ и принадлежит множеству $A \setminus \{\tilde{0}\}$. Следовательно, T_0 является тупиковым тестом. Предположим теперь, что T_i — некоторый тест, в котором отсутствует набор $\tilde{\sigma}_i$, содержащий единицу в i-м разряде и нули в остальных разрядах, $1 \leqslant i \leqslant n$. В этом случае по i-му столбцу и $(i-1)$-й строке таблицы 1 видно, что в T_i входят все наборы из $A \setminus \{\tilde{\sigma}_i\}$, а с другой стороны, $A \setminus \{\tilde{\sigma}_i\}$ является тестом. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Минимальный единичный диагностический тест функции $x_1 \vee \cdots \vee x_n$ состоит из n наборов.*

Пусть неисправны ровно k входов схемы. Без ограничения общности будем считать, что это первые k входов. Тогда функция неисправности примет вид $g{=}\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee ...\overline{x_k} \vee x_{k+1} \vee ... \vee x_n$. В этом случае $g(\tilde{0}) = 1$, $f(\tilde{0}) = 0$ и справедлива

Теорема 3. *Минимальный полный проверяющий тест функции $x_1 \vee \cdots \vee x_n$ состоит из одного набора.*

Для полных диагностических тестов имеет место

Теорема 4. *Минимальный полный диагностический тест функции* $x_1 \vee \dots \vee x_n$ *состоит из* $2^n - 1$ *набора.*

Доказательство. *Верхняя оценка.* Пусть E_2^n — множество всех булевых наборов длины n. Рассмотрим множество $E_2^n \setminus \{\tilde{0}\}$. При повреждении i-го входа схемы в дизъюнкции переменных, реализующих функцию неисправности, вместо слагаемого x_i появляется $\overline{x}_i$. Пусть $g(\tilde{x})$ — функция неисправности, получающаяся при повреждении некоторых, например, первых k входов. Функция $g(\tilde{x})$ обращается в нуль на наборе $(1, ..., 1, 0, ..., 0)$, содержащем единицы в первых k разрядах (этот набор входит в $E_2^n \setminus \{\tilde{0}\}$), а исходная дизъюнкция $x_1 \vee \dots \vee x_n$ на этом наборе обращается в единицу. Следовательно, $E_2^n \setminus \{\tilde{0}\}$ является полным проверяющим тестом. Далее пусть $g_1(\tilde{x})$ и $g_2(\tilde{x})$ — две различные функции неисправности. Множество переменных $X = \{x_1, ..., x_n\}$ разобьём на три подмножества X_1, X_2, X_3, где X_1 содержит переменные, вошедшие в дизъюнкции g_1 и g_2 с отрицаниями, X_2 содержит переменные, вошедшие в g_1 с отрицаниями, а в g_2 без отрицаний, и, наконец, X_3 содержит переменные, вошедшие в g_1 и g_2 без отрицаний; поскольку g_1 и g_2 — различные дизъюнкции, то подмножество X_2 не может быть пустым. Возьмём булев набор $\tilde{\sigma}$, получающийся из $(x_1, ..., x_n)$ при замещении переменных из $X_1 \cup X_2$ единицами, а переменных из X_3 — нулями. Легко заметить, что $\tilde{\sigma} \in E_2^n \setminus \{\tilde{0}\}$ и $g_1(\tilde{\sigma}) = 0$, а $g_2(\tilde{\sigma}) = 1$. Получаем, что $E_2^n \setminus \{\tilde{0}\}$ действительно является полным диагностическим тестом.

Нижняя оценка. Предположим, что существует множество A из $2^n - 2$ булевых наборов, составляющих полный диагностический тест функции $x_1 \vee \dots \vee x_n$. Пусть $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$ — наборы, отсутствующие в A. Без ограничения общности можем считать, что первые k разрядов в $\tilde{\sigma}_1$ — нули, а в $\tilde{\sigma}_2$ — единицы, последующие m разрядов в обоих наборах — единицы, а все остальные разряды в $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ — нули; ясно, что $k \geqslant 1$. Рассмотрим функцию неисправности g_1, получающуюся при повреждении $(k+1)$-го,..., $(k+m)$-го входов, и функцию неисправности g_2, получающуюся при повреждении 1-го,..., $(k+m)$-го входов (одна из функций g_1, g_2 может оказаться равной f при отсутствии повреждений). Функция g_1 обращается в 0 только на наборе $\tilde{\sigma}_1$, а функция g_2 обращается в 0 только на наборе $\tilde{\sigma}_2$. Следовательно, g_1 и g_2 различаются только на наборах $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$ и один из этих наборов должен присутствовать в A. Получаем противоречие, исключающее наше предположение. Теорема 4 доказана.

2. Единичные тесты для схем в базисе $\{x \vee y\}$

Сначала рассмотрим неисправности на выходах элементов. Введём следующие обозначения. Пусть T — тест (единичный или полный, проверяющий или диагностический) схемы S; через $D(T)$ обозначим длину этого теста, т. е. число наборов в нём. Пусть $D^{\{\vee\}}_{\text{вых,ЕПТ}}(S) = \min D(S)$, где минимум берётся по всем единичным проверяющим тестам для схемы S, а $D^{\{\vee\}}_{\text{вых,ЕПТ}}(x_1 \vee ... \vee x_n) = \min D^{\{\vee\}}_{\text{вых,ЕПТ}}(S)$, где минимум берётся по всем схемам (в базисе $\{x \vee y\}$), реализующим $x_1 \vee ... \vee x_n$. Аналогичным образом вводятся функции Шеннона $D^{\{\vee\}}_{\text{вых,ЕДТ}}(x_1 \vee ... \vee x_n)$ для единичных диагностических тестов, $D^{\{\vee\}}_{\text{вых,ППТ}}(x_1 \vee ... \vee x_n)$ для полных проверяющих тестов и $D^{\{\vee\}}_{\text{вых,ПДТ}}(x_1 \vee ... \vee x_n)$ для полных диагностических тестов. Заметим, что в данной статье при исследовании единичных тестов рассматриваются, как обычно (см., например, [2]), неизбыточные схемы.

Реализуем $f(\tilde{x}) = (x_1 \vee \cdots \vee x_n)$ схемой, изображённой на рис. 1.

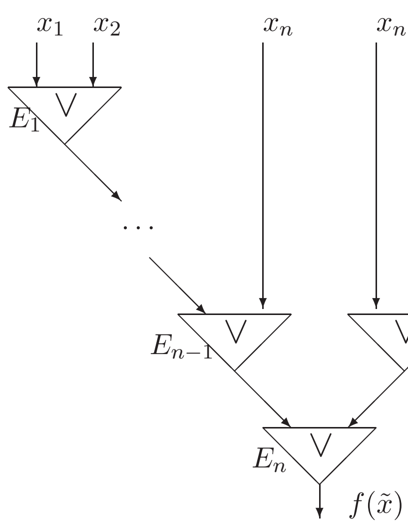

Рис. 1

При повреждении элемента E_i или E'_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, на выходе схемы S получим функцию неисправности $g_i(\tilde{x}) = \overline{x_1 \vee \cdots \vee x_{i+1}} \vee x_1 \vee \cdots \vee x_n \equiv 1$. При повреждении выходного элемента E_n получим функцию неисправности $g_n(\tilde{x}) = \overline{x_1 \vee \cdots \vee x_n}$. Имеем $g_1(\tilde{0}) = ... = g_n(\tilde{0}) = 1$, а $f(\tilde{0}) = 0$, т. е. справедлива

Теорема 5. $D^{\{\vee\}}_{\text{вых, ЕПТ}}(x_1 \vee ... \vee x_n) = 1$.

Для диагностических тестов справедлива

Теорема 6. $D^{\{\vee\}}_{\text{вых, ЕДТ}}(x_1 \vee ... \vee x_n) = 2$.

Доказательство. Заметим, что для схемы S (рис. 1) возможны только две нетривиальные функции неисправности: $g_1(\tilde{x}) \equiv 1$ и $g_2(\tilde{x})= \overline{x_1 \vee \cdots \vee x_n}$. В качестве единичного диагностического теста можем взять, например, два набора $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$; отсюда следует верхняя оценка $D^{\{\vee\}}_{\text{вых,ЕДТ}}(x_1 \vee ... \vee x_n) \leqslant 2$.

Убедимся, что для любой схемы, реализующей $x_1 \vee ... \vee x_n$, существует не менее двух различных нетривиальных функций неисправности. Пусть S' — произвольная схема, реализующая f. При повреждении выходного элемента схема S' реализует нетривиальную функцию неисправности $g(\tilde{x})= \overline{x_1 \vee \cdots \vee x_n}$. Легко заметить, что в схеме S' обязательно найдётся элемент E, на входы которого подаются две переменные (возможно, даже с выходов других элементов), например, x_1 и x_2, и который в исправном состоянии реализует $x_1 \vee x_2$. При неисправности одного этого элемента схема S' будет выдавать, как нетрудно заметить, одну из следующих функций:

$$
\begin{aligned}
&g_1(\tilde{x})=\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 \cdots \vee x_n,\\
&g_2(\tilde{x})=\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 \vee \cdots \vee x_n \vee x_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \cdots \vee x_n,\\
&g_3(\tilde{x}) = \overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 \vee ... \vee x_n \vee x_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \cdots \vee x_n,\\
&g_4(\tilde{x})=\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 \vee \ldots \vee x_n \vee x_1 \vee x_2 = 1.
\end{aligned}
$$

Каждая из последних четырёх функций отличается от $g(\tilde{x})$. Но при наличии двух различных нетривиальных функций неисправностей любой тест для S' содержит не менее двух наборов (это следует, как нетрудно заметить, из нижней оценки длины теста таблицы, см. [3], теорема 21). Отсюда получаем нижнюю оценку $D^{\{\vee\}}_{\text{вых,ЕДТ}}(x_1 \vee ... \vee x_n) \geqslant 2$. Теорема 6 доказана.

Теперь рассмотрим инверсные неисправности на входах элементов схемы. Обратимся снова к схеме S, изображённой на рис. 1. Пусть V — некоторый вход одного из элементов $E_1 - E_{n-1}$ или левый вход элемента E_n, на который подаётся функция φ (это будет либо некоторая переменная, либо дизъюнкция первых i переменных $x_1 \vee ... \vee x_i$). Этому входу V, как нетрудно заметить, в схеме S соответствует некоторый «симметричный» вход V' одного из элементов $E'_1 - E'_{n-1}$ или правый вход элемента E_n, на который подаётся та же функция φ, что и на V. Поэтому при переходе в неисправное состояние входа V (или входа V') на выходе всей схемы будет реализована некоторая дизъюнкция, среди слагаемых которой окажутся две противоположные функции φ и $\overline{\varphi}$, и функция неисправности окажется тождественной единицей. Но при наличии единственной нетривиальной функции неисправности, очевидно, имеет место

Теорема 7. $D^{\{\vee\}}_{\text{вх,ЕПТ}}(x_1 \vee ... \vee x_n) = D^{\{\vee\}}_{\text{вх,ЕДТ}}(x_1 \vee ... \vee x_n) = 1.$

3. Единичные тесты для схем в базисе $\{\overline{x}, x \to y\}$

Будем предполагать, что неисправности возможны на выходах элементов, и рассмотрим схему S, реализующую $x_1 \vee ... \vee x_n$ и представленную на рис. 2. В этой схеме элемент «$\to$» реализует $x \to y$ при подаче x на левый вход и y на правый. В этой схеме неисправности элемента $E_{1,1}$ отвечает функция неисправности $g_1(\tilde{x}) = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n \vee x_1 \equiv 1$; неисправности $E_{1,2}$ или $E_{1,3}$ отвечает функция $g_2(\tilde{x}) = \overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 \vee \cdots \vee x_n \vee x_1 \vee x_2 \equiv 1$ и т. д. вплоть до неисправности $E_{1,2n-2}$ или $E_{1,2n-1}$, которой отвечает функция $g_{2n-2}(\tilde{x}) = \overline{x_1 \vee ... \vee x_n} \vee x_1 ... \vee x_n \equiv 1$.

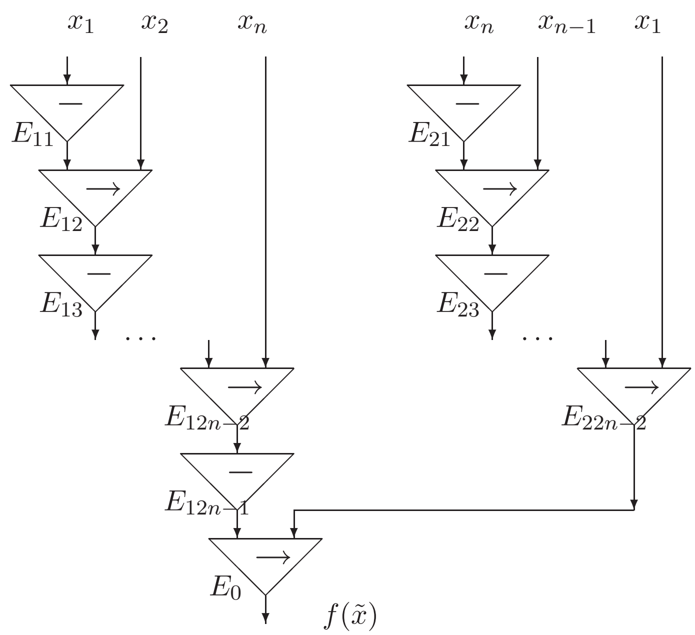

Рис. 2

Аналогично, нетрудно видеть, что неисправности каждого из элементов $E_{2,1}, E_{2,2}, ..., E_{2,2n-2}$ также отвечает функция неисправности, тождественно равная единице. Наконец, при неисправности выходного элемента E_0 получаем функцию неисправности $g_0 = \overline{f}$. Исходная функция $f = x_1 \vee ... \vee x_n$ на нулевом наборе $\tilde{0}$ принимает значение 0, а функции 1 и $\overline{f}$ на этом наборе принимают значение 1. Следовательно, имеет место

Теорема 8. $D^{\{^{-},\to\}}_{\text{вых,ЕПТ}}(x_1 \vee ... \vee x_n) = 1.$

Для единичных диагностических тестов справедлива

Теорема 9. $D^{\{^{-},\to\}}_{\text{вых,ЕДТ}}(x_1 \vee ... \vee x_n) = 2.$

Доказательство. Выше было показано, что для представленной на рис. 2 схемы S возможны лишь две функции неисправности: 1 и $\overline{f}$. Очевидно, что в этом случае два набора $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ составляют единичный диагностический тест. Отсюда получаем верхнюю оценку

$$D^{\{^{-},\to\}}_{\text{вых,ЕДТ}}(x_1 \vee ... \vee x_n) \leqslant 2.$$

Для получения нижней оценки $D^{\{^{-},\to\}}_{\text{вых,ЕДТ}}(x_1 \vee ... \vee x_n) \geqslant 2$ с учётом теоремы 21 из [3] достаточно убедиться в том, что для любой схемы над базисом $\{\overline{x}, x \to y\}$, реализующей $f = x_1 \vee ... \vee x_n$, существуют по крайней мере две различные нетривиальные функции неисправности. В качестве одной из таких функций для любой схемы S, реализующей f, будет $\overline{f}$, которая, очевидно, будет реализована при переходе в неисправное состояние выходного элемента схемы.

В схеме S, реализующей f, выделим нижнюю часть S^*, представленную на рис. 3 (инверторы из цепочки Z и один из элементов E_1 и E_2, вообще говоря, могут и отсутствовать). Рассмотрим два случая: а) в Z имеется нечётное число инверторов, б) в Z имеется чётное число инверторов.

В случае а) на выходе схемы реализуется функция $\varphi \& \overline{\psi}$ и должны выполняться соотношения $\varphi(\tilde{x}) \geqslant x_1 \vee ... \vee x_n$ и $\overline{\psi}(\tilde{x}) \geqslant x_1 \vee ... \vee x_n$, из которых следует, что $\varphi \in \{1, f\}$, $\overline{\psi} \in \{1, f\}$. В случае $\varphi = \overline{\psi} = 1$ на выходе исправной схемы реализуется константа 1, а это исключается. В случае $\varphi = \overline{\psi} = x_1 \vee ... \vee x_n$ при неисправности элемента E_1 на выходе схемы будет реализована константа 0. Пусть $\varphi = 1$, а $\overline{\psi} = x_1 \vee ... \vee x_n$ (случай $\overline{\psi} = 1$, $\varphi = x_1 \vee ... \vee x_n$ рассматривается аналогично). В этом случае при неисправности элемента E_1 опять же будет реализована константа 0.

В случае б) схема S реализует функцию $\psi \vee \overline{\varphi}$ и должны выполняться соотношения $\psi(\tilde{x}) \leqslant x_1 \vee ... \vee x_n$ и $\overline{\varphi}(\tilde{x}) \leqslant x_1 \vee ... \vee x_n$. Предположим, что ψ совпадает с некоторой переменной, например, $\psi(\tilde{x}) = x_1$. Тогда $\overline{\varphi} \in \{x_2 \vee ... \vee x_n, x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n\}$ и при неисправности элемента E_1 получим нетривиальную функцию неисправности $g = x_1 \vee \overline{x_2} \& ... \& \overline{x_n}$, отличную от $\overline{f}$.

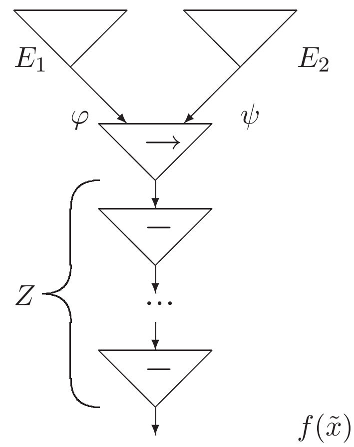

Рис. 3

Далее считаем, что ψ не является переменной. Если $\psi = x_1 \vee \dots \vee x_n$, то либо $\overline{\varphi}(\tilde{x}) = x_1 \vee \dots \vee x_n$, либо $\overline{\varphi}(\tilde{x}) = 0$, либо $\overline{\varphi}(\tilde{0}) = 0$ и $\overline{\varphi}(\tilde{\sigma}) = 0$, где $\tilde{\sigma} \neq \tilde{0}$. При неисправности E_1 в первых двух случаях получаем функцию неисправности g, тождественно равную единице, а в третьем случае $g = \varphi \vee \psi$. Следовательно, $g(\tilde{0}) = g(\tilde{\sigma}) = 1$ и $g \notin \{f, \overline{f}\}$.

Пусть теперь $\psi(\tilde{x}) \neq x_1 \vee \dots \vee x_n$ (кроме того, напомним, что $\psi(\tilde{x}) \leqslant x_1 \vee \dots \vee x_n$). В этом случае $\psi(\tilde{0}) = 0$ и $\psi(\tilde{\sigma}) = 0$ для некоторого отличного от $\tilde{0}$ набора $\tilde{\sigma}$. При неисправности E_2 получим функцию неисправности $g = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$ такую, что $g(\tilde{0}) = g(\tilde{\sigma}) = 1$ и $g \notin \{f, \overline{f}\}$. Теорема 9 доказана.

Рассмотрим инверсные неисправности на входах элементов. В этом случае нетрудно убедиться (как и в случае неисправности на входах элементов схем в базисе $\{\vee\}$), что для схемы, изображённой на рис. 2, возможна единственная нетривиальная функция неисправности — константа 1; в качестве единичного диагностического (а значит, и проверяющего) теста можно взять набор $\tilde{0}$. Отсюда следует

Теорема 10. $D^{\{\bar{\ },\to\}}_{\text{вх,ЕПТ}}(x_1 \vee \dots \vee x_n) = D^{\{\bar{\ },\to\}}_{\text{вх,ЕДТ}}(x_1 \vee \dots \vee x_n) = 1.$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
2. **Редькин Н. П.** Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992.
3. **Редькин Н. П.** Дискретная математика. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2007.

4. **Яблонский С. В.** Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Физматлит, 1988. С. 5–25.

Адрес автора:

МГУ, мех.-мат. факультет,
Воробьёвы горы,
119992 Москва,
Россия.
E-mail: azjnja@mail.ru

Статья поступила
30 января 2008 г.