ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2008. Том 15, № 2. 23–64

УДК 519.7

О СЛОЖНОСТИ СОВМЕСТНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРЁХ ЭЛЕМЕНТОВ СВОБОДНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ С ДВУМЯ ОБРАЗУЮЩИМИ*)

В. В. Кочергин

Изучается сложность совместного вычисления трёх элементов свободной абелевой группы с двумя образующими. Под сложностью $l_F(A)$ системы $\Sigma = \{x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}, x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}, x_1^{a_{31}}x_2^{a_{32}}\}$ элементов свободной абелевой группы с образующими x_1 и x_2, задаваемой целочисленной матрицей $A = (a_{ij})$ размера 3×2, понимается минимальное число операций умножения, достаточное для вычисления системы Σ по образующим x_1, x_2 и обратным к ним элементам x_1^{-1}, x_2^{-1} (при этом разрешается многократное использование промежуточных результатов вычислений).

В статье для произвольной последовательности целочисленных матриц $A(n) = (a_{ij}(n))$ размера 3×2, удовлетворяющей условию $\max\limits_{i,j} a_{ij}(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, установлена асимптотика роста величины $l_F(A(n))$.

Введение

Пусть свободная абелева группа G (групповую операцию будем называть умножением) задана конечным или бесконечным множеством (системой) свободных образующих $\{x_i \mid i \in I\}$. Тогда группа G является (неполным) прямым произведением бесконечных циклических групп $\langle x_i \rangle$, $i \in I$, и произвольный неединичный элемент g группы G представляется единственным образом в виде произведения конечного числа ненулевых степеней порождающих элементов:

$$g = x_{i_1}^{a_{i_1}} x_{i_2}^{a_{i_2}} \dots x_{i_k}^{a_{i_k}},$$

где $a_{i_s} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $i_s \in I$, $s = 1, 2, \dots k$, (подробнее см., например, [2, 14]).

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08–01–00863) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–4470.2008.1).

Для нееденичных элементов $g_1,\ldots,g_p$ группы G обозначим через $X(g_1,\ldots,g_p)$ множество образующих x_i, входящих в описанное выше представление хотя бы для одного из элементов $g_1,\ldots,g_p$. Отметим, что множество $X(g_1,\ldots,g_p)$ конечно. Без ограничения общности будем считать, что $X(g_1,\ldots,g_p)=\{x_1,\ldots,x_q\}$. Тогда для элементов $g_1,\ldots,g_p$ существует единственное представление через образующие $x_1,\ldots,x_q$:

$$g_1=x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\ldots x_q^{a_{1q}},\quad g_2=x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\ldots x_q^{a_{2q}},\quad \ldots,\quad g_p=x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}}\ldots x_q^{a_{pq}},$$

где $a_{ij}\in\mathbb{Z}$, $i=1,2,\ldots,p$; $j=1,2,\ldots,q$. В силу выбора элементов $g_1,\ldots,g_p$ и определения множества $X(g_1,\ldots,g_p)$ в матрице $A(g_1,g_2,\ldots,g_p)=(a_{ij})$ размера $p\times q$ нет нулевых строк и столбцов.

Обозначим через $l_F(g_1,g_2,\ldots,g_p)$ *сложность совместного вычисления элементов* $g_1,g_2,\ldots,g_p$, т. е. минимальное число операций умножения, достаточное для вычисления элементов $g_1,g_2,\ldots,g_p$ по множеству $\{x_i,x_i^{-1}\mid i\in I\}$, состоящему из образующих и обратных к ним элементов (при этом разрешается многократное использование промежуточных результатов вычислений).

Теперь для произвольной целочисленной матрицы $A=(a_{ij})$ размера $p\times q$ определим величину $l_F(A)$, используя язык аддитивных цепочек (см., например, [3]). Назовём *аддитивной F-цепочкой* для целочисленной матрицы A последовательность q-мерных векторов (наборов) вида

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{v}_1=(1,0,\ldots,0), & \mathbf{v}_2=(0,1,\ldots,0), & \ldots, & \mathbf{v}_q=(0,0,\ldots,1),\\
\mathbf{v}_{q+1}=(-1,0,\ldots,0), & \mathbf{v}_{q+2}=(0,-1,\ldots,0), & \ldots, & \mathbf{v}_{2q}=(0,0,\ldots,-1),\\
\mathbf{v}_{2q+1}, & \mathbf{v}_{2q+2}, & \ldots, & \mathbf{v}_{2q+r},
\end{array}$$

начинающуюся с $2q$ единичных и обратных к ним векторов и удовлетворяющую условиям:

1) для каждого k, $2q+1\leqslant k\leqslant 2q+r$, найдутся два натуральных числа (не обязательно различные) i и j, $1\leqslant i\leqslant k-1$, $1\leqslant j\leqslant k-1$, такие, что $\mathbf{v}_k=\mathbf{v}_i+\mathbf{v}_j$ (сложение векторов покомпонентное);

2) $\{(a_{11},a_{12},\ldots a_{1q}),(a_{21},a_{22},\ldots a_{2q}),\ldots,(a_{p1},a_{p2},\ldots a_{pq})\}\subseteq\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_{2q+r}\}$.

Число r называется длиной этой цепочки. Теперь определим $l_F(A)$ как минимальную длину аддитивных F-цепочек для матрицы A.

В силу того, что в представлении образующих и обратных к ним элементов набор показателей степеней состоит из нулей и одной единицы со знаком плюс или минус соответственно, а операции умножения элементов группы соответствует покомпонентное сложение наборов показателей степеней образующих, выполняется равенство

$$l_F(g_1,g_2,\ldots,g_p)=l_F(A(g_1,g_2,\ldots,g_p)).$$

Величину $l_F(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ (или $l_F(A)$) можно также интерпретировать как минимально возможную сложность (число элементов) схемы из функциональных элементов (необходимые определения можно найти в [13, 16]), на входы которой подаются функции $\{x_1, x_2, \ldots, x_q, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_q^{-1}\}$, на выходах схемы вычисляются функции

$$x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}},$$

задаваемые целочисленной матрицей наборов показателей степеней матрицы A размера $p \times q$, а сама схема состоит из двухвходовых элементов, реализующих произведение функций, подаваемых на входы элемента. В дальнейшем будем, как правило, использовать именно эту интерпретацию. Это связано с тем, что введённая мера сложности совместного вычисления элементов свободной абелевой группы (а также мера сложности целочисленных матриц) близка к мерам сложности, рассматривавшимся в работах [6–9, 11], которые можно трактовать аналогичным образом.

В [7] изучается поставленная в [15] задача о сложности вычисления систем целочисленных линейных форм. Для системы p линейных форм от q переменных $x_1, x_2, \ldots, x_q$, заданной целочисленной матрицей A размера $p \times q$, через $l_2(A)$ обозначается минимальное число операций сложения и вычитания, достаточное для вычисления по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_q$ заданной системы линейных форм (с возможностью многократного использования промежуточных результатов вычислений).

На языке схем из функциональных элементов в мультипликативной постановке величину $l_2(A)$ можно определить как минимально возможную сложность схемы из функциональных элементов, на входы которой подаются переменные $x_1, x_2, \ldots, x_q$, на выходах схемы вычисляются функции $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}$, $x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots, x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}$, задаваемые целочисленной матрицей наборов показателей степеней матрицы A размера $p \times q$, а сама схема состоит из двухвходовых элементов, каждый из которых реализует либо произведение, либо частное функций, подаваемых на его входы.

В работах [6, 8, 9] исследуется задача о сложности вычисления систем одночленов. Для системы одночленов $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}$, $x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots, x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}$, заданной целочисленной матрицей A размера $p \times q$ с неотрицателными элементами, через $l(A)$ обозначается минимальное число операций умножения, достаточное для вычисления этой системы по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_q$ (при этом также разрешается многократное использование промежуточных результатов вычислений).

На языке схем из функциональных элементов величину $l(A)$ можно определить как минимально возможную сложность схемы из функциональных элементов, на входы которой подаются переменные $x_1, x_2, \ldots, x_q$, на выходах схемы вычисляются одночлены, задаваемые целочисленной матрицей наборов показателей степеней A размера $p \times q$, а сама схема состоит из двухвходовых элементов, каждый из которых реализует произведение одночленов, подаваемых на его входы.

В силу того, что при доступности операции деления систему $\{x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_q^{-1}\}$ по системе $\{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$ можно вычислить за $q+1$ операцию деления, для любой целочисленной матрицы A размера $p \times q$ справедливо неравенство $l_2(A) - (q+1) \leqslant l_F(A)$.

С другой стороны, введя обозначения $x_i^{-1} = y_i$ при $i = 1, 2, \ldots, p$;

$$a'_{ij} = \frac{|a_{ij}| + a_{ij}}{2}, \; a''_{ij} = \frac{|a_{ij}| - a_{ij}}{2} \text{ при } i = 1, 2, \ldots, p; \; j = 1, 2, \ldots, q,$$

от произвольной целочисленой матрицы A размера $p \times q$ в соответствии с равенствами

$$x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \ldots x_q^{a_{iq}} = x_1^{a'_{i1}} y_1^{a''_{i1}} x_2^{a'_{i2}} y_2^{a''_{i2}} \ldots x_q^{a'_{iq}} y_q^{a''_{iq}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

можно естественным образом перейти к целочисленной матрице $\widetilde{A}$ размера $p \times 2q$, в которой все элементы неотрицательны. Учитывая это, получаем

$$l_F(A) \leqslant l(\widetilde{A}).$$

Таким образом,

$$l_2(A) - (q+1) \leqslant l_F(A) \leqslant l(\widetilde{A}).$$

Однако обе эти оценки величины $l_F(A)$ не являются асимптотически неулучшаемыми, что доказывают следующие примеры.

1. Пусть $A_k = \begin{pmatrix} 2^k \\ -2^k \end{pmatrix}$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда $l_2(A_k) = k + 1$, но $l_F(A_k) = 2k$.

2. Пусть при фиксированном q матрицы A_k, $k = 1, 2, \ldots$, размера $2q \times q$ определены следующим образом:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & \ldots & 0 \\ -2^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2^k & \ldots & 0 \\ 0 & -2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 2^k \\ 0 & 0 & \ldots & -2^k \end{pmatrix}.$$

Тогда задаваемую матрицей A_k систему функций

$$\{x_1^{2^k}, x_1^{-2^k}, x_2^{2^k}, x_2^{-2^k}, \dots x_q^{2^k}, x_q^{-2^k}\}$$

по переменным $x_1, x_2, \dots, x_q$ и обратным к ним величинам $x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_q^{-1}$, можно получить последовательно вычисляя следующие функции:

а) $x_1^{-1}x_2^{-1}\dots x_q^{-1}$ (требуется $q-1$ операций умножения);

б) $(x_1x_2\dots x_q)^{-2^k}$ (требуется k операций умножения);

в) $x_1^{2^k}, x_2^{2^k}, \dots, x_q^{2^k}$ (требуется qk операций умножения);

г) $x_1^{2^k}, x_1^{2^k}x_2^{2^k}, \dots, x_1^{2^k}x_2^{2^k}\dots x_{q-1}^{2^k}$ (требуется $q-2$ операций умножения);

д) $x_q^{2^k}, x_{q-1}^{2^k}x_q^{2^k}, \dots, x_2^{2^k}\dots x_{q-1}^{2^k}x_q^{2^k}$ (требуется $q-2$ операций умножения);

е) $x_1^{-2^k}, x_2^{-2^k}, \dots x_q^{-2^k}$ (требуется $2q-2$ операций умножения).

Следовательно, $l_F(A_k) \leqslant (q+1)k + 5q - 7$.

С другой стороны, для квадратной матрицы $\widetilde{A}_k$ порядка $2q$, на главной диагонали которой расположены числа 2^k, а все остальные элементы равны 0, справедливо равенство $l(\widetilde{A}_k) = 2qk$.

В этом примере разные асимптотики величины $l_F(A_k)$ и $l(\widetilde{A}_k)$ при $k \to \infty$ имеют при $q \geqslant 2$; при этом условии число строк в матрицах A_k не менее 4.

Тем не менее величину l_F можно выразить через величину l точным равенством.

Далее стоит особо отметить, что введённая мера сложности l_F не обладает свойством двойственности. Из [15, 17] (доказательство в более общем случае содержится в [7]) следует, что для мер сложности $l(A)$ и $l_2(A)$ целочисленной матрицы A размера $p \times q$ без нулевых строк и столбцов соответственно с неотрицательными и произвольными элементами справедливы равенства

$$l(A) + p = l(A^T) + q, \quad l_2(A) + p = l_2(A^T) + q,$$

где A^T — матрица размера $q \times p$, получающаяся из матрицы A транспонированием. Аналогичное равенство для величины $l_F(A)$, вообще говоря, неверно. Действительно,

$$l_F\left(\left(2^k, 2^{-k}\right)\right) = k + 1, \quad l_F\left(\left(2^k, 2^{-k}\right)^T\right) = 2k.$$

В [12] исследуется величина L_F, определяемая равенством

$$L_F(p, q, K) = \max l_F(A),$$

где максимум берётся по всем целочисленным матрицам $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$, удовлетворяющим условиям $|a_{ij}| \leqslant K - 1$ ($i = 1, \dots, p$; $j = 1, \dots, q$). Таким образом, $L_F(p, q, K)$ — максимально возможная сложность таких систем из p элементов свободной абелевой группы с q образующими, в разложении элементов которых по образующим все показатели степеней не превосходят по абсолютной величине $K - 1$. В [12] показано, что при условии*) $pq \log K \to \infty$ справедливы неравенства

$$L_F(p,q,K) \leqslant \min(p,\, q+1)\log K + \frac{pq\log(2K-1)}{\log(pq\log K)}\left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log(pq\log K)}{\log(pq\log K)}\right)^{1/2}\right)\right) + O(\max(p,\, q));$$

$$L_F(p,q,K) \geqslant \max\left(\min(p,\, q+1)\log K,\, \frac{pq\log(2K-1)}{\log(pq\log K)}\right) + O(\max(p,\, q)).$$

В общем виде задача нахождения асимптотики роста величины $l_F(A)$ (с ростом, например, максимума абсолютных значений элементов матрицы) представляется довольно сложной.

Для случая $p = 1$ с помощью небольшой модификации результатов из [1, 4, 5], нетрудно показать, что для почти всех матриц $(a_1, a_2, \dots, a_q)$ (все a_i больше 1 и различны) при $\prod a_i \to \infty$ справедливо соотношение

$$l_F(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_q^{a_q}) \sim \log(\max a_i) + \frac{\log \prod a_i}{\log\log \prod a_i} + \delta(a_1, a_2, \dots, a_q)q,$$

где $\delta(a_1, a_2, \dots, a_q)$ — некоторая функция, удовлетворяющая неравенствам $0 \leqslant \delta(a_1, a_2, \dots, a_q) < 1$.

В [10] исследован случай $p = 2$ и при слабых ограничениях найдена асимптотика роста величины $l_F\left(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}}, x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}}\right)$. В данной статье этот результат, сформулированный и доказанный в других терминах (см. лемму 12 и замечание 1), является вспомогательным для получения основного результата — нахождения асимптотики роста величины $l_F(A)$ для целочисленных матриц размера 3×2.

1. Формулировка основного результата

Сначала дадим необходимые определения.

Пусть A — матрица размера $p \times q$ с элементами a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, q$, а число k удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant k \leqslant \min(p, q)$. Для наборов индексов $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ и $(j_1, j_2, \dots, j_k)$ таких, что

*) Здесь и далее $\log u$ означает $\log_2 u$.

$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant p$ и $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant q$, обозначим через $A(i_1, i_2, \ldots, i_k;\, j_1, j_2, \ldots, j_k)$ квадратную матрицу порядка k, состоящую из элементов, находящихся на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

Положим

$$D(A) = \max_{1 \leqslant k \leqslant \min(p,q)} \left\{ \max_{(i_1, i_2, \ldots, i_k;\, j_1, j_2, \ldots, j_k)} |\det A(i_1, i_2, \ldots, i_k;\, j_1, j_2, \ldots, j_k)| \right\}.$$

Таким образом, $D(A)$ — это максимум абсолютных величин миноров матрицы A, где максимум берётся по всем минорам.

Далее для матрицы A размера $p \times q$ определим величину $T(A)$ равенством

$$T(A) = \max_{1 \leqslant j \leqslant q} \left\{ \max\{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{pj}, 0\} \left|\min\{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{pj}, 0\}\right| \right\}.$$

Таким образом, $T(A)$ — это максимум абсолютных величин попарных произведений элементов матрицы A, где максимум берётся по всем парам элементов, удовлетворяющих двум условиям: эти элементы должны находиться в одном столбце и иметь разные знаки.

Пусть теперь матрица A имеет размеры 3×2, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Для удобства под записью a_{st} при $s > 3$ и/или $t > 2$ договоримся понимать элемент a_{ij}, где i и j определяются из условий $1 \leqslant i \leqslant 3$, $i \equiv s \pmod 3$; $1 \leqslant j \leqslant 2$, $j \equiv t \pmod 2$.

Элемент a_{ij} матрицы A размера 3×2 назовём *особым*, если выполняются следующие условия:

$$a_{ij} \neq 0, \quad a_{ij} a_{i+1,j} \leqslant 0, \quad a_{ij} a_{i+2,j} \leqslant 0, \quad |a_{i+1,j}| + |a_{i+2,j}| \neq 0.$$

Отметим, что в одном столбце может быть либо 0, либо 1, либо 2 особых элемента, причём последний случай имеет место только тогда, когда в столбце имеется ровно по одному положительному, отрицательному и нулевому элементу.

Пусть $A = (a_{ij})$ — по-прежнему матрица размера 3×2. Обозначим через $A(s, t)$ квадратную матрицу порядка 2, в которой первой строкой является строка матрицы A, содержащая элемент a_{s1}, а второй — строка матрицы A, содержащая элемент a_{t1}.

Пусть a_{ij} — особый элемент матрицы A размера 3×2. Определим величину $r(a_{ij})$ следующим образом:

1) если выполняются неравенства $\det A(i+1, i+2) \det A(i+2, i) \geqslant 0$ и $\det A(i+1, i+2) \det A(i, i+1) \geqslant 0$, то полагаем

$$r(a_{ij}) = |a_{ij} \det A(i+1, i+2)|\,;$$

2) если выполняется неравенство $\det A(i+1, i+2) \det A(i+2, i) < 0$, то полагаем

$$r(a_{ij}) = |a_{ij} \det A(i+1, i+2)| \frac{\max\{|a_{i1}|, |a_{i2}|, |a_{i+2,1}|, |a_{i+2,2}|\}}{D(A(i+2, i))};$$

3) если выполняется неравенство $\det A(i+1, i+2) \det A(i, i+1) < 0$, то полагаем

$$r(a_{ij}) = |a_{ij} \det A(i+1, i+2)| \frac{\max\{|a_{i1}|, |a_{i2}|, |a_{i+1,1}|, |a_{i+1,2}|\}}{D(A(i, i+1))}.$$

Корректность этого определения вытекает из следующего утверждения.

Лемма 1. *Если элемент a_{ij} матрицы A размера 3×2 является особым, то выполняется хотя бы одно из неравенств*:

$$\det A(i+1, i+2) \det A(i+2, i) \geqslant 0, \quad \det A(i+1, i+2) \det A(i, i+1) \geqslant 0.$$

Доказательство. Ввиду соотношения $a_{ij} \neq 0$ из равенств

$$\begin{aligned} 0 = \det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{i,j+1} & a_{ij} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & a_{i+1,j} \\ a_{i+2,j} & a_{i+2,j+1} & a_{i+2,j} \end{pmatrix} \\ = a_{ij} \det A(i+1, i+2) - a_{i+1,j} \det A(i, i+2) + a_{i+2,j} \det A(i, i+1) \end{aligned}$$

следует, что

$$\det A(i+1, i+2) = -\frac{a_{i+1,j}}{a_{ij}} \det A(i+2, i) - \frac{a_{i+2,j}}{a_{ij}} \det A(i, i+1),$$

где в силу свойств особого элемента значения $-a_{i+1,j}/a_{ij}$ и $-a_{i+2,j}/a_{ij}$ неотрицательны.

Если $\det A(i+1,i+2) = 0$, то утверждение леммы очевидно. Если $\det A(i+1,i+2) \neq 0$, то

$$\left(-\frac{a_{i+1,j}}{a_{ij}}\right)\det A(i+1,i+2)\det A(i+2,i) \\ + \left(-\frac{a_{i+2,j}}{a_{ij}}\right)\det A(i+1,i+2)\det A(i,i+1) \\ = (\det A(i+1,i+2))^2 > 0.$$

Поэтому в этом случае неравенства $\det A(i+1,i+2)\det A(i+2,i) < 0$ и $\det A(i+1,i+2)\det A(i,i+1) < 0$ одновременно выполняться не могут. Лемма 1 доказана.

Для элементов a_{ij}, не являющихся особыми в целочисленной матрице A размера 3×2, положим $r(a_{ij}) = 0$. Далее, для матрицы A определим величину $R(A)$ равенством

$$R(A) = \max_{a_{ij}\in A} r(a_{ij}).$$

Теперь сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Для произвольной последовательности целочисленных матриц $A(n) = (a_{ij}(n))$ размера 3×2, удовлетворяющей условию*

$$\max_{a_{ij}\in A(n)} |a_{ij}(n)| \to 0$$

при $n\to\infty$, справедливо асимптотическое равенство

$$l_F(A(n)) \sim \log\max\{D(A(n)), T(A(n)), R(A(n))\}.$$

2. Нижняя оценка

В основе всех доказываемых нижних оценок в той или иной степени лежит следующее простое соображение, в похожем виде впервые, по-видимому, использовавшееся в [18] (в более общем виде, см., например, [7]).

Лемма 2. *Пусть в k вершинах схемы S с входами $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \ldots, x_k, x_k^{-1}$ реализуется система функций*

$$\{x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\ldots x_k^{a_{1k}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\ldots x_k^{a_{2k}},\ \ldots,\ x_1^{a_{k1}}x_2^{a_{k2}}\ldots x_k^{a_{kk}}\},$$

задаваемая целочисленной квадратной матрицей $A = (a_{ij})$ порядка k. Тогда $2^{l_F(S)} \geqslant |\det A|$.

Доказательство. Зафиксируем множество $\{x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \ldots, x_k, x_k^{-1}\}$ символов, приписываемых входам схем. Утверждение леммы докажем индукцией по сложности схемы S, т. е. по величине $l_F(S)$.

Если $l_F(S) = 0$, то в вершинах схемы S (а в схеме есть только входные вершины) вычисляются функции $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \ldots, x_k, x_k^{-1}$. Следовательно, в каждой строке матрицы A, задающей такую систему функций, имеется по одному ненулевому элементу и по $n-1$ нулей, причём ненулевые элементы по абсолютной величине равны 1. Поэтому $|\det A| \leqslant 1$ и доказываемое неравенство выполняется.

Докажем утверждение леммы для произвольной схемы S сложности $l_F(S)$, $l_F(S) \geqslant 1$, в предположении, что для любой схемы сложности менее $l_F(S)$ лемма справедлива. Пусть v_1 — невходовая вершина (элемент) схемы S, в которой реализуется функция, не использующаяся для дальнейших вычислений в схеме S, т. е. эта функция не подаётся на вход никакого элемента схемы.

Схему, получающуюся из схемы S удалением вершины v_1 и дуг, входящих в эту вершину, обозначим через S'. Тогда $l_F(S') = l_F(S) - 1$.

Пусть в схеме S произвольным образом выбраны k вершин. Если среди этих вершин нет вершины v_1, то утверждение леммы для этих k вершин следует из предположения индукции, так как $2^{l_F(S)} > 2^{l_F(S')} \geqslant |\det A|$. Если вершина v_1 выбрана более одного раза, то утверждение леммы также выполняется, так как в этом случае в соответствующей матрице будут две одинаковые строки, и определитель этой матрицы будет равен 0. Поэтому можно считать, что среди выбранных вершин вершина v_1 содержится ровно один раз. Пусть в вершине v_1 вычисляется функция $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_k^{a_{1k}}$, а в остальных выбранных вершинах $v_2, v_3, \ldots, v_k$ — соответственно функции $x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_k^{a_{2k}}$, $x_1^{a_{31}} x_2^{a_{32}} \ldots x_k^{a_{3k}}$, …, $x_1^{a_{k1}} x_2^{a_{k2}} \ldots x_k^{a_{kk}}$.

Пусть на входы элемента, соответствующего вершине v_1, подаются функции $x_1^{a'_{11}} x_2^{a'_{12}} \ldots x_k^{a'_{1k}}$ и $x_1^{a''_{11}} x_2^{a''_{12}} \ldots x_k^{a''_{1k}}$, вычисляемые в вершинах v' и v'' соответственно. Тогда

$$x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_k^{a_{1k}} = x_1^{a'_{11}+a''_{11}} x_2^{a'_{12}+a''_{12}} \ldots x_k^{a'_{1k}+a''_{1k}}.$$

Обозначим через A' и A'' матрицы, получающиеся из матрицы A заменой первой строки на строки $(a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{1k})$ и $(a''_{11}, a''_{12}, \ldots, a''_{1k})$ соответственно. Обозначив через $\pi(\sigma)$ число транспозиций в подстановке σ, получаем

$$|\det A| = \left| \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\pi(\sigma)} (a'_{1,\sigma(1)} + a''_{1,\sigma(1)}) a_{2,\sigma(2)} \dots a_{k,\sigma(k)} \right|$$
$$= \left| \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\pi(\sigma)} a'_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{k,\sigma(k)} \right.$$
$$\left. + \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\pi(\sigma)} a''_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{k,\sigma(k)} \right| = \left| \det A' + \det A'' \right|$$
$$\leqslant \left| \det A' \right| + \left| \det A'' \right|.$$

Для наборов вершин $(v', v_2, \dots, v_k)$ и $(v'', v_2, \dots, v_k)$ схемы S' по предположению индукции справедливо утверждение леммы. Поэтому

$$|\det A| \leqslant \left|\det A'\right| + \left|\det A''\right| \leqslant 2^{l_F(S')} + 2^{l_F(S')} = 2^{l_F(S)}.$$

Лемма 2 доказана.

Теперь применим эту лемму для получения нужных нижних оценок.

Лемма 3. *Для любой ненулевой целочисленной матрицы A справедливо неравенство*

$$l_F(A) \geqslant \log D(A).$$

Доказательство. В силу того, что матрица A ненулевая, справедливо неравенство $D(A) \geqslant 1$. Выберем k и наборы индексов $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ и $(j_1, j_2, \dots, j_k)$ такие, что выполняется равенство

$$D(A) = |A(i_1, i_2, \dots, i_k;\, j_1, j_2, \dots, j_k)|\,.$$

Теперь рассмотрим схему S, вычисляющую матрицу A и удовлетворяющую условию $l_F(S) = l_F(A)$. Припишем единичные значения всем входам схемы S, кроме $2k$ входов, соответствующих столбцам матрицы A с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$, и последовательно преобразуем схему, удаляя элементы умножения в соответствии с тождествами $1 \times 1 = 1$ и $g \times 1 = g$. В вершинах полученной схемы S' , соответствующих строкам исходной матрицы с номерами $j_1, j_2, \dots, j_k$, будет вычисляться система функций, заданная матрицей $A(i_1, i_2, \dots, i_k;\, j_1, j_2, \dots, j_k)$. Поэтому в силу леммы 2 получаем

$$l_F(A) = l_F(S) \leqslant l_F(S') \leqslant \log |A(i_1, i_2, \dots, i_k;\, j_1, j_2, \dots, j_k)| = \log D(A).$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любой целочисленной матрицы A справедливо неравенство $l_F(A) \geqslant \log\max\{T(A), 1\}$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $T(A) = |a_{11}a_{21}|$, причём $a_{11} \geqslant 1$, $a_{21} \leqslant -1$. Рассмотрим схему S с входами $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1} \ldots, x_q, x_q^{-1}$, вычисляющую матрицу A и удовлетворяющую условию $l_F(S) = l_F(A)$. Преобразуем схему S в схему S' следующим образом. Входу, которому был приписан символ x_1, припишем символ новой переменной u, а входу, которому был приписан символ x_1^{-1}, — символ новой переменной v. Тогда в вершинах, соответствующих в исходной схеме первым двум строкам матрицы A, будут вычисляться функции вида $u^{a_{11}+\alpha_1}v^{\alpha_1}x_2^{a_12}\ldots x_q^{a_1q}$ и $u^{\alpha_2}v^{|a_{21}|+\alpha_2}x_2^{a_22}\ldots x_q^{a_2q}$, где α_1 и α_2 — некоторые неотрицательные целые числа. Поэтому, применяя лемму 3, имеем

$$l_F(A) = l_F(S) = l_F(S') \geqslant \log\left|\det\begin{pmatrix} a_{11}+\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & |a_{21}|+\alpha_2 \end{pmatrix}\right| \geqslant \log|a_{11}a_{21}| = \log T(A).$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если элемент a_{ij} целочисленной матрицы A размера 3×2 является особым, то*

$$l_F(A) = \log\min D\begin{pmatrix} |a_{ij}|+\alpha_i & \alpha_i & a_{i,j+1} \\ \alpha_{i+1} & |a_{i+1,j}|+\alpha_{i+1} & a_{i+1,j+1} \\ \alpha_{i+2} & |a_{i+2,j}|+\alpha_{i+2} & a_{i+2,j+1} \end{pmatrix},$$

где минимум берётся по всем наборам $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}$.

Доказательство. Рассмотрим схему S с входами x, x^{-1} y и y^{-1}, вычисляющую матрицу A и удовлетворяющую условию $l_F(S) = l_F(A)$. На выходах этой схемы будут реализованы функции $x^{a_{11}}y^{a_{12}}$, $x^{a_{21}}y^{a_{22}}$ и $x^{a_{31}}y^{a_{32}}$. Теперь преобразуем схему S в схему S' следующим образом. Входу, которому был приписан символ x, припишем символ новой переменной u, а входу, которому был приписан символ x^{-1}, — символ новой переменной v. Полученная схема S' с входами u, u^{-1}, v, v^{-1}, y и y^{-1} (при этом входы, которым приписаны символы u^{-1} и v^{-1}, не используются) той же сложности, что и исходная схема S, вычисляет систему функций

$$\left\{u^{|a_{ij}|+\alpha'_i}v^{\alpha'_i}y^{a_{i,j+1}},\ u^{\alpha'_{i+1}}v^{|a_{i+1,j}|+\alpha'_{i+1}}y^{a_{i+1,j+1}},\ u^{\alpha'_{i+2}}v^{|a_{i+2,j}|+\alpha'_{i+2}}y^{a_{i+2,j+1}}\right\},$$

где α'_i, α'_{i+1} и α'_{i+2} — некоторые целые неотрицательные числа.

Таким образом, применяя лемму 3, имеем

$$
\begin{aligned}
l_F(A) = l_F(S) = l_F(S') \geqslant l_F &\begin{pmatrix} |a_{ij}| + \alpha'_i & \alpha'_i & a_{i,j+1} \\ \alpha'_{i+1} & |a_{i+1,j}| + \alpha'_{i+1} & a_{i+1,j+1} \\ \alpha'_{i+2} & |a_{i+2,j}| + \alpha'_{i+2} & a_{i+2,j+1} \end{pmatrix} \\
\geqslant \log D &\begin{pmatrix} |a_{ij}| + \alpha'_i & \alpha'_i & a_{i,j+1} \\ \alpha'_{i+1} & |a_{i+1,j}| + \alpha'_{i+1} & a_{i+1,j+1} \\ \alpha'_{i+2} & |a_{i+2,j}| + \alpha'_{i+2} & a_{i+2,j+1} \end{pmatrix} \\
\geqslant \log \min_{(\alpha_i,\, \alpha_{i+1},\, \alpha_{i+2})} D &\begin{pmatrix} |a_{ij}| + \alpha_i & \alpha_i & a_{i,j+1} \\ \alpha_{i+1} & |a_{i+1,j}| + \alpha_{i+1} & a_{i+1,j+1} \\ \alpha_{i+2} & |a_{i+2,j}| + \alpha_{i+2} & a_{i+2,j+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть a_{ij} — особый элемент целочисленной матрицы A размера 3×2, матрица A' получается из матрицы A путём применения следующих операций: перестановка строк, перестановка столбцов, умножение всех элементов одного столбца на -1, причём образом элемента a_{ij} матрицы A после этих преобразований будет элемент a'_{st} матрицы A'. Тогда в матрице A' элемент a'_{st} является особым, причём $r(a_{ij}) = r(a'_{st})$.*

Лемма 7. *Пусть a_{ij} — особый элемент матрицы A размера 3×2. Тогда справедливо неравенство $l_F(A) \geqslant \log \max\{r(a_{ij}), 1\} - 2$.*

Доказательство. В силу леммы 6 без ограничения общности можно считать, что $i = 1$, $j = 1$, причём $a_{11} < 0$, $a_{21} \geqslant 0$, $a_{31} \geqslant 0$.

Если выполняется условие $r(a_{11}) \leqslant 1$, то утверждение леммы очевидно. Поэтому далее считаем, что $r(a_{11}) > 1$, откуда, в частности, следует, что $|a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}| \geqslant 1$.

Через $M = M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, где α_1, α_2 и α_3 — целые неотрицательные числа, обозначим матрицу

$$
\begin{pmatrix} |a_{11}| + \alpha_1 & \alpha_1 & a_{12} \\ \alpha_2 & a_{21} + \alpha_2 & a_{22} \\ \alpha_3 & a_{31} + \alpha_3 & a_{32} \end{pmatrix}.
$$

Найдём значение $|\det M|$:

$$
\begin{aligned}
|\det M| = \bigl|(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + \alpha_2(|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31}) \\
- \alpha_3(|a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21})\bigr| = \bigl|(|a_{11}| + \alpha_1) \det A(2,3) + \alpha_2 \det A(3,1) \\
+ \alpha_3 \det A(1,2)\bigr|.
\end{aligned}
$$

Случай 1. Пусть во втором столбце матрицы A нет особых элементов.

В силу леммы 6 без ограничения общности можно считать, что $a_{12} \geqslant 0$, $a_{22} \geqslant 0$ и $a_{32} \geqslant 0$.

Будем также считать, что справедливо неравенство $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \geqslant 1$ (если выполняется неравенство $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \leqslant -1$, то в матрице A поменяем местами вторую и третью строки), из которого, в частности, следует, что $a_{21} \neq 0$.

Тогда

$$\det A(2,3) = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \geqslant 0, \quad \det A(3,1) = a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11} \\ = |a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31} \geqslant 0,$$

$$\det A(2,3)\det A(1,2) = (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ = -(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})(|a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}) < 0.$$

Таким образом, в этом случае величина $r(a_{11})$ определяется следующими равенствами:

$$r(a_{11}) = |a_{11}||\det A(2,3)|\frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|\}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|, |\det A(1,2)|\}} \\ = |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}, |a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}\}}.$$

Отметим, что в представлении

$$|\det M| = \big|(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + \alpha_2(|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31}) \\ - \alpha_3(|a_{11}|a_{22} + |a_{12}|a_{21})\big|$$

в условиях случая 1 выполняются следующие неравенства:

$$a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \geqslant 1, \quad |a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31} \geqslant 0, \quad |a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21} \geqslant 0.$$

Если выполняется неравенство

$$\alpha_3(a_{12}a_{21} + |a_{11}|a_{21}) \leqslant \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

то

$$D(M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) \geqslant |\det M| \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{|a_{11}|}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}, |a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}\}};$$

если выполняется обратное неравенство

$$\alpha_3(a_{12}a_{21} + |a_{11}|a_{21}) > \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

то

$$\begin{aligned} D(M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) &\geqslant |\det M(1,3;1,2)| \geqslant \alpha_3|a_{11}| \\ &\geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{|a_{11}|}{|a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}} \\ &\geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{|a_{11}|}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}, |a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}\}}. \end{aligned}$$

Так как $a_{21} \neq 0$, то верно равенство

$$|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31} = \frac{a_{31}}{a_{21}}(|a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}) + \frac{|a_{11}|}{a_{21}}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |\det M| = \Bigg| &\Big(|a_{11}| + \alpha_1 + \alpha_2\frac{|a_{11}|}{a_{21}}\Big)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &- \frac{\alpha_3 a_{21} - \alpha_2 a_{31}}{a_{21}}(|a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21})\Bigg|. \end{aligned}$$

Теперь, если выполняется неравенство

$$\frac{\alpha_3 a_{21} - \alpha_2 a_{31}}{a_{21}}(|a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}) \leqslant \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

то

$$\begin{aligned} D(M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) &\geqslant |\det M| \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &\geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{a_{21}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}, |a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}\}}; \end{aligned}$$

если выполняется обратное неравенство

$$\frac{\alpha_3 a_{21} - \alpha_2 a_{31}}{a_{21}}(|a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}) > \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

то справедлива оценка:

$$\begin{aligned} D(M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) &\geqslant |\det M(1,3;2,3)| \geqslant \alpha_3 a_{21} - \alpha_2 a_{31} \\ &\geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{a_{21}}{|a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}} \\ &\geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{a_{21}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}, |a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}\}}. \end{aligned}$$

Таким образом, применяя лемму 5, имеем

$$\begin{aligned}
&l_F(A) \geqslant \log \min_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} D\bigl(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\bigr) \\
&\geqslant \log\left(|a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|,a_{21}\}}{\max\{|a_{11}|,a_{12},a_{21},a_{22},|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}\}}\right)-1.
\end{aligned}$$

С другой стороны, справедливы оценки:

$$\begin{aligned}
|a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})&\frac{a_{12}}{\max\{|a_{11}|,a_{12},a_{21},a_{22},|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}\}} \\
&\leqslant \frac{|a_{11}|a_{21}a_{32}a_{12}}{|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}} \leqslant |a_{11}|a_{32} \leqslant D(A); \\
|a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})&\frac{a_{22}}{\max\{|a_{11}|,a_{12},a_{21},a_{22},|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}\}} \\
&\leqslant (a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\frac{|a_{11}|a_{22}}{|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}} \leqslant a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} \leqslant D(A).
\end{aligned}$$

Поэтому, применяя лемму 3, при $a_{12}+a_{22}\neq 0$ имеем

$$\begin{aligned}
&l_F(A) \geqslant \log D(A) \\
&\geqslant \log\left(|a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\frac{\max\{a_{12},a_{22}\}}{\max\{|a_{11}|,a_{12},a_{21},a_{22},|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}\}}\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка $l_F(A) \geqslant \log r(a_{11}) - 1$.

Случай 2. Пусть элемент a_{12} матрицы A особый.

Тогда в силу леммы 6 без ограничения общности можно считать, что $a_{12}<0$, $a_{22}\geqslant 0$ и $a_{32}\geqslant 0$. Будем также считать, что справедливо неравенство $a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\geqslant 1$ (если выполняется неравенство $a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\leqslant -1$, то в матрице A поменяем местами вторую и третью строки), из которого, в частности, следует, что $a_{21}\neq 0$.

Случай 2.1. Пусть выполняются неравенства

$$|a_{11}|a_{32}-|a_{12}|a_{31}\geqslant 0,\quad |a_{12}|a_{21}-|a_{11}|a_{22}\geqslant 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\det A(2,3)\det A(3,1) &= (a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})(a_{31}a_{12}-a_{32}a_{11}) \\
&= (a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})(|a_{11}|a_{32}-|a_{12}|a_{31})\geqslant 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det A(2,3)\det A(1,2) &= (a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \\
&= (a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})(|a_{12}|a_{21}-|a_{11}|a_{22})\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Поэтому величина $r(a_{11})$ определяется равенством

$$r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

С другой стороны,

$$|\det M| = \big|(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + \alpha_2(|a_{11}|a_{32} - |a_{12}|a_{31}) \\ + \alpha_3(|a_{12}|a_{21} - |a_{11}|a_{22})\big|,$$

где $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \geqslant 1$, $|a_{11}|a_{32} - |a_{12}|a_{31} \geqslant 0$ и $|a_{12}|a_{21} - |a_{11}|a_{22} \geqslant 0$. Следовательно, применяя лемму 5, имеем

$$l_F(A) \geqslant \log \min_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} D\big(M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) \\ \geqslant \log \min_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} |\det M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| \geqslant \log\left(|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\right).$$

Поэтому справедлива оценка $l_F(A) \geqslant \log r(a_{11})$.

Случай 2.2. Пусть выполняется неравенство $|a_{11}|a_{32} - |a_{12}|a_{31} < 0$. Тогда

$$\det A(2,3) \det A(3,1) = (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})(a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11}) \\ = (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})(|a_{11}|a_{32} - |a_{12}|a_{31}) < 0.$$

Следовательно, в силу леммы 1

$$0 \leqslant \det A(2,3) \det A(1,2) = (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ = (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})(|a_{12}|a_{21} - |a_{11}|a_{22}).$$

Поэтому

$$|a_{12}|a_{21} - |a_{11}|a_{22} \geqslant 0.$$

Таким образом, в этом случае величина $r(a_{11})$ определяется следующими равенствами:

$$r(a_{11}) = |a_{11}||\det A(2,3)| \frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{31}|, |a_{32}|\}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{31}|, |a_{32}|, |\det A(1,3)|\}} \\ = |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}\}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}, |a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}\}}.$$

Представим величину $|\det M|$ в виде

$$|\det M| = \big|(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - \alpha_2(|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}) \\ + \alpha_3(|a_{12}|a_{21} - |a_{11}|a_{22})\big|,$$

где $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \geqslant 1$, $|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32} > 0$ и $|a_{12}|a_{21} - |a_{11}|a_{22} \geqslant 0$.

Если выполняется неравенство

$$\alpha_2(|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}) \leqslant \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

то

$$D(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)) \geqslant |\det M| \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$\geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|\}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}, |a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}\}};$$

если выполняется обратное неравенство

$$\alpha_2(|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}) > \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

то

$$D(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)) \geqslant \max\{|\det M(1,2;1,2)|, |\det M(1,2;2,3)|\}$$
$$\geqslant \max\{\alpha_2|a_{11}|, \alpha_2|a_{12}|\} \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|\}}{|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}}$$
$$\geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|\}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}, |a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}\}}.$$

При $a_{3j} = 0$ неравенство

$$D(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3))$$
$$\geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{a_{3j}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}, |a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}\}}$$

очевидно. Докажем это неравенство при $a_{3j} \neq 0$, $j = 1, 2$.

Из условия $a_{31} \neq 0$ вытекает равенство

$$|a_{12}|a_{21} - |a_{11}|a_{22} = \frac{a_{21}}{a_{31}}(|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}) + \frac{|a_{11}|}{a_{31}}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Поэтому

$$|\det M| = \left|(|a_{11}| + \alpha_1 + \alpha_3\frac{|a_{11}|}{a_{31}})(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - \frac{\alpha_2 a_{31} - \alpha_3 a_{21}}{a_{31}}(|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32})\right|.$$

Далее, если выполняется неравенство

$$\frac{\alpha_2 a_{31} - \alpha_3 a_{21}}{a_{31}}(|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}) \leqslant \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

то

$$D(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)) \geqslant |\det M| \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$\geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{a_{31}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}, |a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}\}};$$

если выполняется обратное неравенство

$$\frac{\alpha_2 a_{31} - \alpha_3 a_{21}}{a_{31}}(|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}) > \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

то

$$D(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)) \geqslant |\det M(2,3;1,2)| \geqslant \alpha_2 a_{31} - \alpha_3 a_{21}$$
$$\geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{a_{31}}{|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}}$$
$$\geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{a_{31}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}, |a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}\}}.$$

Из условия $a_{32} \neq 0$ вытекает равенство

$$|a_{12}|a_{21} - |a_{11}|a_{22} = \frac{a_{22}}{a_{32}}(|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}) + \frac{|a_{12}|}{a_{32}}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Поэтому

$$|\det M| = \Bigg|(|a_{11}| + \alpha_1 + \alpha_3\frac{|a_{12}|}{a_{32}})(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - \frac{\alpha_2 a_{32} - \alpha_3 a_{22}}{a_{32}}(|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32})\Bigg|.$$

Теперь если выполняется неравенство

$$\frac{\alpha_2 a_{32} - \alpha_3 a_{22}}{a_{32}}(|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}) \leqslant \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

то

$$D(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)) \geqslant |\det M| \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$\geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{a_{32}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}, |a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}\}};$$

если выполняется обратное неравенство

$$\frac{\alpha_2 a_{32} - \alpha_3 a_{22}}{a_{32}}(|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}) > \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

то

$$\begin{aligned} D(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)) &\geqslant |\det M(2,3;1,3)| \geqslant \alpha_2 a_{32} - \alpha_3 a_{22} \\ &\geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{a_{32}}{|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}} \\ &\geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{a_{32}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}, |a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}\}}. \end{aligned}$$

Таким образом, применяя лемму 5, имеем

$$l_F(A) \geqslant \log \min_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} D\big(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\big) \geqslant \log\Bigg(|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \times \frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}\}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}, |a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}\}}\Bigg) - 1.$$

Следовательно, справедлива оценка $l_F(A) \geqslant \log r(a_{11}) - 1$.

Случай 2.3. Пусть выполняется неравенство $|a_{12}|a_{21} - |a_{11}|a_{22} < 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \det A(2,3)\det A(1,2) &= (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})(|a_{12}|a_{21} - |a_{11}|a_{22}) < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу леммы 1

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \det A(2,3)\det A(3,1) &= (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})(a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11}) \\ &= (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})(|a_{11}|a_{32} - |a_{12}|a_{31}). \end{aligned}$$

Поэтому $|a_{11}|a_{32} - |a_{12}|a_{31} \geqslant 0$. Таким образом, в этом случае величина $r(a_{11})$ определяется следующим образом

$$\begin{aligned} r(a_{11}) &= |a_{11}||\det A(2,3)|\frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|\}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|, |\det A(1,2)|\}} \\ &= |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{21}, a_{22}\}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{21}, a_{22}, |a_{12}|a_{21} - |a_{11}|a_{22}\}}. \end{aligned}$$

Представим величину $|\det M|$ в виде

$$|\det M| = \big|(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + \alpha_2(|a_{11}|a_{32} - |a_{12}|a_{31}) \\ - \alpha_3(|a_{11}|a_{22} - |a_{12}|a_{21})\big|,$$

где $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \geqslant 1$, $|a_{11}|a_{32} - |a_{12}|a_{31} > 0$ и $|a_{11}|a_{22} - |a_{12}|a_{21} \geqslant 0$.

Теперь для получения требуемой оценки достаточно почти дословно повторить рассуждения, проведенные при изучении случая 2.2.

Случай 3. Пусть во втором столбце матрицы A есть особый элемент, но элемент a_{12} не является особым.

Без ограничения общности будем полагать, что во втором столбце матрицы A особым является элемент a_{22}, причём в силу леммы 6 можно считать, что $a_{12} \geqslant 0$, $a_{22} < 0$ и $a_{32} \geqslant 0$. Тогда

$$\det A(2,3) = a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31} \geqslant 1, \quad \det A(3,1) = |a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31} \geqslant 0.$$

Случай 3.1. Пусть выполняется неравенство $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \geqslant 0$. Тогда $\det A(1,2) \geqslant 0$. Следовательно, величина $r(a_{11})$ определяется равенством

$$r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}).$$

С другой стороны,

$$|\det M| = \big|(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}) + \alpha_2(|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31}) \\ + \alpha_3(|a_{11}||a_{22}| - a_{12}a_{21})\big|,$$

где $a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31} \geqslant 1$, $|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31} \geqslant 0$ и $|a_{11}||a_{22}| - a_{12}a_{21} \geqslant 0$. Следовательно, применяя лемму 5, имеем

$$l_F(A) \geqslant \log \min_{(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3)} D\big(M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) \\ \geqslant \log \min_{(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3)} |\det M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| \geqslant \log\left(|a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31})\right).$$

Поэтому справедлива оценка $l_F(A) \geqslant \log r(a_{11})$.

Случай 3.2. Пусть выполняется неравенство $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$. Тогда $\det A(1,2) < 0$. Следовательно, величина $r(a_{11})$ определяется следующим образом

$$r(a_{11}) = |a_{11}||\det A(2,3)|\frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|\}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|, |\det A(1,2)|\}} \\ = |a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|\}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}}.$$

Представим величину $|\det M|$ в виде

$$|\det M| = \big|(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}) + \alpha_2(|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31}) \\ - \alpha_3(a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|)\big|,$$

где $a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31} \geqslant 1$, $|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31} \geqslant 0$ и $a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}| \geqslant 0$.

Если выполняется неравенство

$$\alpha_3(a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|) \leqslant \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}),$$

то

$$D(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)) \geqslant |\det M| \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}) \\ \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|\}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}};$$

если выполняется обратное неравенство

$$\alpha_3(a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|) > \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}),$$

то

$$D(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)) \geqslant \max\{|\det M(1,3;1,2)|, |\det M(2,3;1,3)|\} \\ \geqslant \max\{\alpha_3|a_{11}|, \alpha_3|a_{22}|\} \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, |a_{22}|\}}{a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|} \\ \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|\}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}}.$$

Докажем неравенство

$$D(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)) \\ \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31})\frac{a_{21}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}}.$$

При $a_{21} = 0$ оно очевидно. Пусть $a_{21} \neq 0$. Тогда

$$|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31} = \frac{|a_{11}|}{a_{21}}(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}) + \frac{a_{31}}{a_{21}}(a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|).$$

Поэтому

$$|\det M| = \Big|(|a_{11}| + \alpha_1 + \alpha_2 \frac{|a_{11}|}{a_{21}})(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}) \\ - \frac{\alpha_3 a_{21} - \alpha_2 a_{31}}{a_{21}}(a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|)\Big|.$$

Если выполняется неравенство

$$\frac{\alpha_3 a_{21} - \alpha_2 a_{31}}{a_{21}}(a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|) \leqslant \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}),$$

то

$$D(M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) \geqslant |\det M| \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}) \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} \\ + |a_{22}|a_{31})\frac{a_{21}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}};$$

если выполняется обратное неравенство

$$\frac{\alpha_3 a_{21} - \alpha_2 a_{31}}{a_{21}}(a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|) > \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}),$$

то

$$D(M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) \geqslant |\det M(2,3;1,2)| \geqslant \alpha_3 a_{21} - \alpha_2 a_{31} \\ \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31})\frac{a_{21}}{a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|} \\ \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31})\frac{a_{21}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}}.$$

Таким образом, применяя лемму 5, имеем

$$l_F(A) \geqslant \log \min_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} D\big(M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) \geqslant \log\Big(|a_{11}|(a_{21}a_{32} \\ + |a_{22}|a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, a_{21}, |a_{22}|\}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}}\Big) - 1.$$

Теперь установим справедливость неравенства

$$l_F(A) \geqslant \log\Big(|a_{11}|(a_{21}a_{32} \\ + |a_{22}|a_{31})\frac{a_{12}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}}\Big) - 2,$$

из которого с учётом доказанных ранее соотношений будет следовать неравенство
$$l_F(A) \geqslant \log r(a_{11}) - 2.$$

При $a_{12} = 0$ требуемое неравенство очевидно. Далее считаем, что $a_{12} \geqslant 1$. Отдельно рассмотрим два случая.

Случай 3.2.1. Пусть выполняется неравенство $a_{12}a_{21} \geqslant 2|a_{11}||a_{22}|$. Тогда
$$a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}| = \frac{1}{2}a_{12}a_{21} + \left(\frac{1}{2}a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\right) \geqslant \frac{1}{2}a_{12}a_{21}.$$

Следовательно, имеем
$$\begin{aligned}&|a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31})\frac{a_{12}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}}\\ &\quad\leqslant \frac{|a_{11}|a_{12}a_{21}a_{32} + |a_{11}|a_{12}|a_{22}|a_{31}}{a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|} \leqslant 2\frac{|a_{11}|a_{12}a_{21}a_{32} + a_{12}^2a_{21}a_{31}}{a_{12}a_{21}}\\ &\qquad\qquad = 2(|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31}).\end{aligned}$$

Поэтому, применяя лемму 3, получаем
$$\begin{aligned}l_F(A) &\geqslant \log D(A) \geqslant \log|a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}| = \log(|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31})\\ &\geqslant \log\Bigl(|a_{11}|(a_{21}a_{32}\\ &\quad + |a_{22}|a_{31})\frac{a_{12}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}}\Bigr) - 1.\end{aligned}$$

Случай 3.2.2. Пусть выполняется неравенство $a_{12}a_{21} < 2|a_{11}||a_{22}|$. В этом случае будем применять лемму 5 к особому элементу a_{22} матрицы A. Через $M' = M'(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, где α_1, α_2 и α_3 — целые неотрицательные числа, обозначим матрицу
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} + \alpha_1 & \alpha_1\\ a_{21} & \alpha_2 & |a_{22}| + \alpha_2\\ a_{31} & a_{23} + \alpha_3 & \alpha_3\end{pmatrix}.$$

Найдём значение $|\det M'|$:
$$\begin{aligned}|\det M'| &= \bigl|(|a_{22}| + \alpha_2)(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) + \alpha_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\\ &\quad + \alpha_1(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\bigr| = \bigl|(|a_{22}| + \alpha_2)(a_{12}a_{31} + |a_{11}|a_{32})\\ &\qquad - \alpha_3(a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|) + \alpha_1(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}),\end{aligned}$$

где $a_{12}a_{31} + |a_{11}|a_{32} \geqslant 0$, $a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}| \geqslant 0$ и $a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}) \geqslant 0$.

Если выполняется неравенство

$$\alpha_3(a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|) \leqslant \frac{1}{2}(|a_{22}| + \alpha_2)(a_{12}a_{31} + |a_{11}|a_{32}),$$

то

$$D(M'(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) \geqslant |\det M'| \geqslant \frac{1}{2}|a_{22}|(a_{12}a_{31} + |a_{11}|a_{32}) \geqslant \frac{1}{2}(|a_{22}| \\ + \alpha_2)(a_{12}a_{31} + |a_{11}|a_{32})\frac{|a_{11}|}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}};$$

если выполняется обратное неравенство

$$\alpha_3(a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|) > \frac{1}{2}(|a_{22}| + \alpha_2)(a_{12}a_{31} + |a_{11}|a_{32}),$$

то

$$D(M'(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) \geqslant |\det M'(1,3;1,3)| = |\alpha_3 a_{11} - \alpha_1 a_{31}| \\ = \alpha_3|a_{11}| + \alpha_1 a_{31} \geqslant \alpha_3|a_{11}| \geqslant \frac{1}{2}|a_{22}|(a_{12}a_{31} + |a_{11}|a_{32})\frac{|a_{11}|}{a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|} \\ \geqslant \frac{1}{2}|a_{22}|(a_{12}a_{31} + |a_{11}|a_{32})\frac{|a_{11}|}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}}.$$

Таким образом, получаем

$$\min_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} D\big(M'(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) \geqslant \frac{1}{2}|a_{22}|(a_{12}a_{31} \\ + |a_{11}|a_{32})\frac{|a_{11}|}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}} \\ \geqslant \frac{1}{2}|a_{11}|\frac{a_{12}|a_{22}|a_{31} + |a_{11}||a_{22}|a_{32}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}} \\ > \frac{1}{2}|a_{11}|\frac{a_{12}|a_{22}|a_{31} + (1/2)a_{12}a_{21}a_{32}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}} \\ \geqslant \frac{1}{4}|a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31})\frac{a_{12}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}}.$$

Поэтому, применяя лемму 5, имеем

$$l_F(A) \geqslant \log \min_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} D\big(M'(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\big) \geqslant \log\Bigg(|a_{11}|(a_{21}a_{32} \\ + |a_{22}|a_{31})\frac{a_{12}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}}\Bigg) - 2.$$

Лемма 7 доказана.

Из леммы 7 непосредственно вытекает

Лемма 8. *Для любой целочисленной матрицы A размера 3×2 справедливо неравенство $l_F(A) \geqslant \log \max\{R(A), 1\} - 2$.*

Наконец, объединяя леммы 3, 4 и 7 в одно утверждение, получаем требуемую нижнюю оценку.

Лемма 9. *Для любой ненулевой целочисленной матрицы A размера 3×2 справедливо неравенство $l_F(A) \geqslant \log \max\{D(A), T(A), R(A)/4\}$.*

3. Верхняя оценка

Прежде чем перейти к непосредственному доказательству верхней оценки, установим несколько вспомогательных фактов, а также сформулируем в удобном виде некоторые известные утверждения.

Лемма 10. *Пусть в целочисленной матрице $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$ для элемента a_{ij} найдётся индекс s, $1 \leqslant s \leqslant p$, такой, что выполняется неравенство $a_{ij}a_{sj} \leqslant 0$. Тогда при любом t, $1 \leqslant t \leqslant q$, справедливо неравенство*

$$\max\{|a_{ij}a_{st}|, |a_{it}a_{sj}|\} \leqslant 2 \max\{D(A), T(A)\}.$$

Доказательство. При выполнении условия $a_{ij}a_{st}a_{it}a_{sj} \leqslant 0$ имеем

$$\max\{|a_{ij}a_{st}|, |a_{it}a_{sj}|\} \leqslant |a_{ij}a_{st}| + |a_{it}a_{sj}| = |a_{ij}a_{st} - a_{it}a_{sj}| \leqslant D(A).$$

Пусть теперь выполняется неравенство $a_{ij}a_{st}a_{it}a_{sj} > 0$. Без ограничения общности будем считать, что $|a_{ij}a_{st}| \geqslant |a_{it}a_{sj}|$. Тогда при $|a_{ij}a_{st}| \geqslant 2|a_{it}a_{sj}|$ имеем

$$|a_{it}a_{sj}| \leqslant |a_{ij}a_{st}| \leqslant 2|a_{it}a_{sj} - a_{ij}a_{st}| \leqslant 2D(A).$$

Если же выполняется условие $|a_{ij}a_{st}| < 2|a_{it}a_{sj}|$, то справедливо хотя бы одно из неравенств: $|a_{ij}| \leqslant 2|a_{it}|$ или $|a_{st}| \leqslant 2|a_{sj}|$. Тогда при выполнении первого неравенства имеем

$$|a_{it}a_{sj}| \leqslant |a_{ij}a_{st}| \leqslant 2|a_{it}a_{st}| \leqslant 2T(A),$$

а при выполнении второго неравенства получаем

$$|a_{it}a_{sj}| \leqslant |a_{ij}a_{st}| \leqslant 2|a_{ij}a_{sj}| \leqslant 2T(A).$$

Лемма 10 доказана.

Лемма 11 [8]. *Пусть последовательность* $A(n) = (a_{ij}(n))$ *ненулевых целочисленных матриц размера* $q(n) \times 2$ *удовлетворяет условию*

$$\max_{a_{ij}\in A(n)} |a_{ij}| \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда $l(A(n)) \leqslant \log D(A(n)) + O\left(\frac{q(n)\log\max\{|a_{ij}|\,|a_{ij}\in A(n)\}}{\log\log\max\{|a_{ij}|\,|a_{ij}\in A(n)\}}\right)$.

Лемма 12. *Пусть последовательность* $A(n) = (a_{ij}(n))$ *ненулевых целочисленных матриц размера* $q(n) \times 2$ *удовлетворяет условию*

$$\max_{a_{ij}\in A(n)} |a_{ij}| \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда

$$l_F(A(n)) \leqslant \log\max\{D(A(n)), T(A(n))\} \\ + O\left(\frac{q(n)\log\max\{|a_{ij}| \mid a_{ij}\in A(n)\}}{\log\log\max\{|a_{ij}| \mid a_{ij}\in A(n)\}}\right).$$

Доказательство. По целочисленной матрице $A = A(n)$ размера $2\times q$ определим целочисленную матрицу B с неотрицательными элементами, последовательно преобразуя столбцы исходной матрицы следующим образом.

1. Если в столбце $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \end{pmatrix}$ элементы имеют один знак, т. е. $a_{1i}a_{2i} \geqslant 0$, то в матрицу B включаем столбец $\begin{pmatrix} |a_{1i}| \\ |a_{2i}| \end{pmatrix}$.

2. Если в столбце $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \end{pmatrix}$ элементы имеют разные знаки, т. е. $a_{1i}a_{2i} < 0$, то в матрицу B включаем матрицу $\begin{pmatrix} |a_{1i}| & 0 \\ 0 & |a_{2i}| \end{pmatrix}$.

Таким образом, B — целочисленная матрица с неотрицательными элементами размера $2 \times r$, где r удовлетворяет условию $q \leqslant r \leqslant 2q$.

В силу определения матрицы B имеем

$$l_F(A) = l_F(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\ldots x_q^{a_{2q}}) \\ \leqslant l(z_1^{b_{11}}z_2^{b_{12}}\ldots z_r^{b_{1r}},\ z_1^{b_{21}}z_2^{b_{22}}\ldots z_r^{b_{2r}}).$$

Далее, применяя следствие к теореме 2 из [8] (или лемму 11 и свойство двойственности меры сложности l), получаем

$$l(z_1^{b_{11}} z_2^{b_{12}} \dots z_r^{b_{1r}},\ z_1^{b_{21}} z_2^{b_{22}} \dots z_r^{b_{2r}}) \leqslant \log D(B) + O\left(r\frac{\log\max b_{ij}}{\log\log\max b_{ij}}\right)$$
$$= \log D(B) + O\left(q\frac{\log\max|a_{ij}|}{\log\log\max|a_{ij}|}\right).$$

Покажем, что $D(B) \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\}$. Действительно, если $D(B) = b_{ij}$ при некоторых i и j, $1 \leqslant i \leqslant 2$ и $1 \leqslant j \leqslant r$, то справедливо неравенство $D(B) \leqslant D(A)$.

Пусть теперь для некоторых j и t, $1 \leqslant j < t \leqslant r$, выполняется условие

$$D(B) = |b_{1j}b_{2t} - b_{1t}b_{2j}|.$$

Тогда в случае $b_{1j}b_{2t}b_{1t}b_{2j} \neq 0$ при некоторых j' и t', $1 \leqslant j' < t' \leqslant q$, справедливо равенство $a_{1j'}a_{2t'} - a_{1t'}a_{2j'} = b_{1j}b_{2t} - b_{1t}b_{2j}$. Следовательно, $D(B) \leqslant D(A)$.

Рассмотрим случай, когда $b_{1j}b_{2t}b_{1t}b_{2j} = 0$. Без ограничения общности будем считать, что $b_{1j} = 0$. Тогда, с одной стороны, справедливо равенство $D(B) = |b_{1t}b_{2j}|$, а с другой — найдутся j' и t', $1 \leqslant j', t' \leqslant q$, такие, что

$$|a_{2j'}| = b_{2j}, \quad a_{1j'}a_{2j'} \leqslant 0; \quad |a_{1t'}| = b_{1t}.$$

Поэтому, применяя лемму 10, получаем

$$D(B) = |b_{1t}b_{2j}| = |a_{1t'}a_{2j'}| \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$l_F(A) \leqslant \log\max\{D(A), T(A)\} + O\left(q\frac{\log\max|a_{ij}|}{\log\log\max|a_{ij}|}\right).$$

Лемма 12 доказана.

Замечание 1. Для произвольной последовательности целочисленных матриц $A(n) = (a_{ij}(n))$ размера $2 \times q(n)$, удовлетворяющей условию

$$\frac{q(n)}{\log\log\max\limits_{i,j}|a_{ij}(n)|} \to 0$$

при $n \to \infty$, в силу лемм 3, 4 и 12 справедливо асимптотическое равенство

$$l_F(A(n)) \sim \log\max\{D(A(n)), T(A(n))\}.$$

Далее будем существенно опираться на основной результат работы [9], который можно сформулировать следующим образом.

Лемма 13. *Существует такая константа $d > 0$, что для любой последовательности $A(n) = (a_{ij}(n))$ ненулевых квадратных матриц порядка 3 с неотрицательными целыми коэффициентами такими, что при $n \to \infty$ и $\max\limits_{i,j} a_{ij}(n) \to \infty$, справедливо неравенство*

$$l\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}\right) \leqslant \log D(A) + O\left(\frac{\log\max a_{ij}}{(\log\log\max a_{ij})^{1/d}}\right).$$

Кроме того, нам потребуется следующее усиление леммы 13.

Лемма 14. *Существует такая константа $d > 0$, что для любой последовательности $A(n) = (a_{ij}(n))$ ненулевых квадратных матриц порядка 3 с неотрицательными целыми коэффициентами такими, что при $n \to \infty$ и $\max\limits_{i,j} a_{ij}(n) \to \infty$, и для любой последовательности действительных чисел $\delta(n)$, удовлетворяющей условию $0 \leqslant \delta(n) \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$, справедливо неравенство*

$$l\left(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}u^{\lfloor\delta a_{11}\rfloor}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}u^{\lfloor\delta a_{21}\rfloor}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}u^{\lfloor\delta a_{31}\rfloor}\right) \leqslant \log D(A) + O\left(\frac{\log\max a_{ij}}{(\log\log\max a_{ij})^{1/d}}\right).$$

Доказательство. Хотя формально утверждение этой леммы не следует из основного результата работы [9], однако при доказательстве этого результата предложен метод вычисления трёх одночленов $x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}$, $x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}$, $x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}}$ с указанной в лемме 13 сложностью, когда помимо этих трёх одночленов вычисляются также системы одночленов

$$G\left(x^{a_{i1}}y^{a_{i2}}z^{a_{i3}}, \left\lceil\frac{\log\max a_{ij}}{(\log\log\max a_{ij})^{1/d}}\right\rceil\right), \quad i = 1, 2, 3,$$

которые определяются следующим образом.

Пусть $x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}$ — одночлен, t — некоторый натуральный параметр. Обозначим через $G_0\left(x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}, u\right)$ множество отличных от единицы одночленов

$$x^{\lfloor a_1\rfloor}y^{\lfloor a_2\rfloor}x^{\lfloor a_3\rfloor}, x^{\lfloor a_1/2^t\rfloor}y^{\lfloor a_2/2^t\rfloor}x^{\lfloor a_3/2^t\rfloor}, \ldots, x^{\lfloor a_1/2^{kt}\rfloor}y^{\lfloor a_2/2^{kt}\rfloor}x^{\lfloor a_3/2^{kt}\rfloor}, \ldots$$

По множеству $G_0\,(x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3},t)$ строим множество $G\,(x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3},t)$, добавляя к исходному множеству одночленов все отличные от единицы одночлены с целочисленными неотрицательными показателями степеней такие, что для каждого одночлена $x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}$ из множества $G\,(x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3},t)$ найдётся одночлен $x^{\beta_1}y^{\beta_2}z^{\beta_3}$ из множества $G_0\,(x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3},t)$ такой, что $|b_1-\beta_1|\leqslant 1$, $|b_2-\beta_2|\leqslant 1$, $|b_3-\beta_3|\leqslant 1$.

Теперь заметим, что по множеству одночленов $G_0\,(x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}},t)$ вычислить одночлен $x^{\lfloor\delta a_{11}\rfloor}y^{\lfloor\delta a_{21}\rfloor}z^{\lfloor\delta a_{31}\rfloor}$ можно с использованием

$$O\left(\frac{\log\max a_{ij}}{(\log\log\max a_{ij})^{1/d}}\right)$$

операций умножения. Этот факт можно установить, практически дословно повторив рассуждения, использовавшиеся при доказательстве леммы 13 из [9]. Далее остаётся применить уже упоминавшееся утверждение (подробнее см., например, [1, 15, 17]) о двойственности величины l: сложность целочисленной матрицы A размера $p\times q$ с неотрицательными элементами и сложность транспонированной матрицы A^T связаны соотношением $l(A)+p=l(A^T)+q$. Лемма 14 доказана.

Лемма 15 [7]. *Пусть элементы квадратных матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ порядка k удовлетворяют неравенствам $|a_{ij}-b_{ij}|\leqslant 1$, $i=1,\dots,k$; $j=1,\dots,k$. Тогда при условии $D(A)\geqslant 1$ выполняется неравенство $|\det B|\leqslant k^{2k}D(A)$.*

Наконец, перейдём к непосредственному доказательству верхней оценки.

Лемма 16. *Пусть последовательность $A(n)=(a_{ij}(n))$ ненулевых целочисленных матриц размера 3×2 удовлетворяет условию*

$$\max_{a_{ij}\in A(n)}|a_{ij}|\to\infty \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Тогда $l_F(A_n)\leqslant(1+o(1))\log\max\{D(A_n),T(A_n),R(A_n)\}$.

Доказательство. Пусть матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$$

является членом исходной последовательности.

Если в матрице A есть нулевая строка, то для получения требуемой верхней оценки достаточно применить лемму 12.

Далее будем полагать, что в матрице A нет нулевых строк. Отдельно рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Пусть в матрице A нет особых элементов.

В этом случае без ограничения общности можно считать, что все элементы матрицы A неотрицательны. Тогда, используя лемму 11, получаем

$$l_F(A) \leqslant l(A) \leqslant \log D(A) + O\left(\frac{\log\max\{|a_{ij}| \mid a_{ij} \in A\}}{\log\log\max\{|a_{ij}| \mid a_{ij} \in A\}}\right).$$

Случай 2. Пусть в матрице A есть особый элемент, но при этом в одном из столбцов матрицы нет особых элементов.

В силу леммы 6 без ограничения общности можно считать, что особым является элемент a_{11}, причём $a_{11} < 0$, $\ a_{21} \geqslant 0$, $\ a_{31} \geqslant 0$, $a_{12} \geqslant 0$, $\ a_{22} \geqslant 0$, $\ a_{32} \geqslant 0$.

Будем также считать, что справедливо неравенство $a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} \geqslant 0$ (если выполняется неравенство $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} < 0$, то в матрице A поменяем местами вторую и третью строки). Тогда, как показано в лемме 1 при разборе случая 1, выполняется равенство

$$r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}, |a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}\}}.$$

Кроме того, из неравенства $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \geqslant 0$ следует неравенство $a_{21} \geqslant 1$. Действительно, при $a_{21} = 0$ выполняется хотя бы одно из равенств $a_{22} = 0$, $a_{31} = 0$. Следовательно, либо вторая строка матрицы A является нулевой, либо в первом столбце матрицы A есть два нулевых элемента. Первый случай противоречит отсутствию в матрице A нулевых строк, а второй — тому, что элемент a_{11} является особым.

Случай 2.1. Пусть выполняется неравенство

$$\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\} > |a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}.$$

Тогда $r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$.

Далее в силу неравенства $a_{21} \geqslant 1$ имеем

$$a_{12} < \frac{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\} - |a_{11}|a_{22}}{a_{21}}.$$

Из этого соотношения с учётом условий $|a_{11}| \geqslant 1$ и $a_{21} \geqslant 1$ вытекает, с одной стороны, неравенство $\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\} \neq a_{12}$, а, с другой, при любом из условий

$$\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\} = |a_{11}|,\ \max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\} = a_{21},$$
$$\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\} = a_{22}$$

следует неравенство $a_{12} < |a_{11}|$.

Используя лемму 11 и последнее соотношение, получаем

$$l_F(A) = l_F(x^{a_{11}}y^{a_{12}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}) \leqslant l(x^{|a_{11}|}y^{a_{12}})$$
$$+\, l(x^{a_{21}}y^{a_{22}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}) \leqslant (1+o(1))\log|a_{11}| + (1+o(1))\log\max\{a_{21}, a_{22},$$
$$a_{31}, a_{32}, a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\} \leqslant (1+o(1))\log\max\{|a_{11}|a_{21}, a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22},$$
$$|a_{11}|a_{31}, a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}, |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\}$$
$$\leqslant (1+o(1))\log\max\{D(A), T(A), R(A)\}.$$

Случай 2.2. Пусть выполняется неравенство

$$\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\} \leqslant |a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}.$$

Тогда $r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\dfrac{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\}}{|a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}}$. Положим $\alpha = \dfrac{|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}{|a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}}$.

С использованием лемм 13 и 15 получаем

$$l_F(A) = l_F(x^{a_{11}}y^{a_{12}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}) \leqslant l(u^{|a_{11}|}y^{a_{12}}, v^{a_{21}}y^{a_{22}},$$
$$u^{\lfloor\alpha\rfloor}v^{a_{31}+\lfloor\alpha\rfloor}y^{a_{32}}) \leqslant \log D\begin{pmatrix} |a_{11}| & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ \lfloor\alpha\rfloor & a_{31}+\lfloor\alpha\rfloor & a_{32} \end{pmatrix}$$
$$+\, o\left(\log\max\{\max a_{ij}, \alpha\}\right) \leqslant (1+o(1))\log D\begin{pmatrix} |a_{11}| & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ \alpha & a_{31}+\alpha & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Обозначим последнюю матрицу через M_0 и оценим сверху величину $D(M_0)$:

$$|\det M_0| = \big||a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - \alpha(a_{21}a_{12} + |a_{11}|a_{22})\big| = 0;$$
$$|\det M_0(1,2;1,2)| = |a_{11}|a_{21} \leqslant T(A),$$
$$|\det M_0(1,2;1,3)| = |a_{11}|a_{22} \leqslant a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \leqslant D(A),$$
$$|\det M_0(1,2;2,3)| = a_{12}a_{21} \leqslant a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \leqslant D(A),$$
$$|\det M_0(1,3;1,2)| = |a_{11}|a_{31} + |a_{11}|\alpha \leqslant T(A) + r(a_{11}) \leqslant T(A) + R(A),$$
$$|\det M_0(1,3;1,3)| = \big||a_{11}|a_{32} - a_{12}\alpha\big| \leqslant (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) + r(a_{11})$$
$$\leqslant D(A) + R(A),$$

$$
\begin{aligned}
|\det M_0(1,3;2,3)| &= a_{12}a_{31} + a_{12}\alpha \leqslant (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) + r(a_{11})\\
&\leqslant D(A) + R(A),\\
|\det M_0(2,3;1,2)| &= a_{21}\alpha \leqslant r(a_{11}) \leqslant R(A),\\
|\det M_0(2,3;1,3)| &= a_{22}\alpha \leqslant r(a_{11}) \leqslant R(A),\\
|\det M_0(2,3;2,3)| &= |a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} + a_{22}\alpha| = |a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}| + r(a_{11})\\
&\leqslant D(A) + R(A).
\end{aligned}
$$

Следовательно, выполняется неравенство $D(M_0) \leqslant D(A)+T(A)+R(A)$. Поэтому имеем $l_F(A) \leqslant (1+o(1))\log\max\{D(A), T(A), R(A)\}$.

Случай 3. Пусть в матрице A есть строка, оба элемента которой являются особыми.

В силу леммы 6 без ограничения общности можно считать, что особыми являются элементы a_{11} и a_{12}, причём $a_{11} < 0,\quad a_{21} \geqslant 0,\quad a_{31} \geqslant 0,$ $a_{12} < 0,\quad a_{22} \geqslant 0,\quad a_{32} \geqslant 0$. Будем также считать, что справедливо неравенство $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \geqslant 0$ (в противном случае в матрице A поменяем местами вторую и третью строки).

Кроме того, будем ещё предполагать, что выполняется неравенство $|a_{12}|a_{21} - |a_{11}|a_{22} \geqslant 0$ (в противном случае в матрице A поменяем местами первый и второй столбцы, а чтобы сохранить справедливость неравенства $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \geqslant 0$ поменяем ещё вторую и третью строки).

Случай 3.1. Пусть выполняется неравенство $|a_{11}|a_{32} - |a_{12}|a_{31} \geqslant 0$. Тогда $r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$, $r(a_{12}) = |a_{12}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$. С использованием лемм 11 и 10 имеем

$$
\begin{aligned}
l_F(A) &= l_F(x^{a_{11}}y^{a_{12}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}) \leqslant l(x^{|a_{11}|}y^{|a_{12}|})\\
&\quad + l(x^{a_{21}}y^{a_{22}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}) \leqslant (1+o(1))\log\max\{|a_{11}|, |a_{12}|\}\\
&\quad + (1+o(1))\log\max\{a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\}\\
&\quad \leqslant (1+o(1))\log\left(\max\{D(A), T(A), r(a_{11}), r(a_{12})\}\right)\\
&\quad \leqslant (1+o(1))\log\max\{D(A), T(A), R(A)\}.
\end{aligned}
$$

Случай 3.2. Пусть выполняется неравенство $|a_{11}|a_{32} - |a_{12}|a_{31} < 0$. Тогда

$$
r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{31}, a_{32}\}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{31}, a_{32}, |a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}\}},
$$

$$
r(a_{12}) = |a_{12}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{31}, a_{32}\}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{31}, a_{32}, |a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}\}}.
$$

Случай 3.2.1. Пусть выполняется неравенство

$$\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}\} > |a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}.$$

Тогда также, как и в случае 3.1, справедливы равенства

$$r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}), \quad r(a_{12}) = |a_{12}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Поэтому $l_F(A) \leqslant (1 + o(1)) \log \max\{D(A), T(A), R(A)\}$.

Случай 3.2.2. Пусть выполняется неравенство

$$\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}\} \leqslant |a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}.$$

Тогда

$$r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}\}}{|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}},$$
$$r(a_{12}) = |a_{12}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, a_{31}, a_{32}\}}{|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}}.$$

Положим

$$\alpha = \frac{|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}{|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}}, \quad \beta = \frac{|a_{12}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}{|a_{12}|a_{31} - |a_{11}|a_{32}}.$$

Очевидно, что

$$l_F(A) = l_F(x^{a_{11}}y^{a_{12}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}) \leqslant l(u^{|a_{11}|}w^{|a_{12}|}, u^{\lfloor\alpha\rfloor}v^{a_{21}+\lfloor\alpha\rfloor}w^{\lfloor\beta\rfloor}z^{a_{22}+\lfloor\beta\rfloor}, v^{a_{31}}z^{a_{32}}).$$

Далее в силу равенства

$$\begin{pmatrix} |a_{12}| \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{|a_{12}|}{|a_{11}|} \begin{pmatrix} |a_{11}| \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

можно применять лемму 14. С использованием её и леммы 15 получаем

$$l_F(A) \leqslant \log D \begin{pmatrix} |a_{11}| & 0 & |a_{12}| & 0 \\ \lfloor\alpha\rfloor & a_{21} + \lfloor\alpha\rfloor & \lfloor\beta\rfloor & a_{22} + \lfloor\beta\rfloor \\ 0 & a_{31} & 0 & a_{32} \end{pmatrix} + o\left(\log \max\{\max a_{ij}, \alpha, \beta\}\right) \leqslant (1 + o(1)) \log D \begin{pmatrix} |a_{11}| & 0 & |a_{12}| & 0 \\ \alpha & a_{21} + \alpha & \beta & a_{22} + \beta \\ 0 & a_{31} & 0 & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Последнюю матрицу обозначим через M_1 и, учитывая, что первый и третий столбцы в этой матрице пропорциональны, с применением леммы 10 оценим сверху величину $D(M_1)$:

$$\begin{aligned}
&|\det M_1(1,2,3;1,2,4)| = \big||a_{11}|((a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + (\alpha a_{32} - \beta a_{31}))\big| = 0,\\
&|\det M_1(1,2,3;2,3,4)| = \frac{|a_{12}|}{|a_{11}|}|\det M_1(1,2,3;1,2,4)| = 0,\\
&|\det M_1(1,2;1,2)| = |a_{11}|a_{21} + |a_{11}|\alpha \leqslant T(A) + r(a_{11}) \leqslant T(A) + R(A),\\
&|\det M_1(1,2;1,4)| = |a_{11}|a_{22} + |a_{12}|\beta \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\} + r(a_{11})\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\} + R(A),\\
&|\det M_1(1,2;2,3)| = |a_{12}|a_{21} + |a_{12}|\alpha \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\} + r(a_{11})\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\} + R(A),\\
&|\det M_1(1,2;2,4)| = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|\det M_1(1,2;3,4)| = |a_{12}|a_{22} + |a_{12}|\beta \leqslant T(A) + r(a_{12}) \leqslant T(A) + R(A),\\
&|\det M_1(1,3;1,2)| = |a_{11}|a_{31} \leqslant T(A),\\
&|\det M_1(1,3;1,4)| = |a_{11}|a_{32} \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\},\\
&|\det M_1(1,3;2,3)| = |a_{12}|a_{31} \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\},\\
&|\det M_1(1,3;2,4)| = 0,\\
&|\det M_1(1,3;3,4)| = |a_{12}|a_{32} \leqslant T(A),\\
&|\det M_1(2,3;1,2)| = \alpha a_{31} \leqslant r(a_{11}) \leqslant R(A),\\
&|\det M_1(2,3;1,4)| = \alpha a_{32} \leqslant r(a_{11}) \leqslant R(A),\\
&|\det M_1(2,3;2,3)| = \beta a_{31} \leqslant r(a_{12}) \leqslant R(A),\\
&|\det M_1(2,3;2,4)| = |(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + (\alpha a_{32} - \beta a_{31})| = 0,\\
&|\det M_1(2,3;3,4)| = \beta a_{32} \leqslant r(a_{12}) \leqslant R(A).
\end{aligned}$$

Таким образом, $D(M_1) \leqslant 3\max\{D(A), T(A), R(A)\}$. Поэтому получаем $l_F(A) = (1 + o(1))\log\max\{D(A), T(A), R(A)\}$.

Случай 4. Пусть в обоих столбцах матрицы A есть особый элемент, но строки́, оба элемента которой являются особыми, в матрице A нет.

В силу леммы 6 без ограничения общности можно считать, что особыми являются элементы a_{11} и a_{22}, причём $a_{11} < 0$, $a_{21} \geqslant 0$, $a_{31} \geqslant 0$, $a_{12} \geqslant 0$, $a_{22} < 0$, $a_{32} \geqslant 0$.

Случай 4.1. Пусть выполняется неравенство $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \geqslant 0$.

Будем полагать, что в первом столбце матрицы A есть максимальный по абсолютной величине элемент матрицы (если это не так, то поменяем местами первую и вторую строки, а также столбцы матрицы A, при этом по-прежнему будет справедливо неравенство $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \geqslant 0$). Тогда

$$r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}), \quad r(a_{22}) = |a_{22}|(|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31}).$$

С использованием леммы 12 имеем

$$\begin{aligned} l_F(A) &= l_F(x^{a_{11}}y^{a_{12}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}) \\ &\leqslant l(x^{|a_{11}|}y^{a_{12}}) + l_F(x^{a_{21}}y^{a_{22}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}) \\ &\leqslant (1+o(1))\log\max\{|a_{11}|, a_{12}\} + (1+o(1))\log D\begin{pmatrix} a_{21} & |a_{22}| & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{32}\end{pmatrix} \\ &\leqslant (1+o(1))\log\max\{|a_{11}|, a_{12}\} + (1+o(1))\log\max\{a_{21}a_{32}, |a_{22}|a_{31}, \\ &\qquad |a_{22}|a_{32}, a_{21}, |a_{22}|, a_{31}, a_{32}\}. \end{aligned}$$

Далее с применением леммы 10 и условия случая 4.1 получаем

$$|a_{11}|a_{21}a_{32} \leqslant r(a_{11}),\ |a_{11}||a_{22}|a_{31} \leqslant r(a_{11}),\ |a_{11}||a_{22}|a_{32} \leqslant r(a_{22}),$$

$$\begin{aligned} &|a_{11}|a_{21} \leqslant T(A),\ |a_{11}||a_{22}| \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\},\ |a_{11}|a_{31} \leqslant T(A), \\ &|a_{11}|a_{32} \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\},\ a_{12}a_{21}a_{32} \leqslant |a_{11}||a_{22}|a_{32} \leqslant r(a_{22}), \\ &a_{12}|a_{22}|a_{31} \leqslant r(a_{22}),\ a_{12}a_{21} \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\}, \\ &a_{12}|a_{22}| \leqslant T(A),\ a_{12}a_{31} \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\},\ a_{12}a_{32} \leqslant a_{12}|a_{22}|a_{32}. \end{aligned}$$

Осталось оценить сверху величину $a_{12}|a_{22}|a_{32}$. Так как в первом столбце матрицы A есть максимальный по абсолютной величине элемент, то справедливо хотя бы одно из неравенств $|a_{11}| \geqslant a_{12}$, $a_{21} \geqslant |a_{22}|$, $a_{31} \geqslant a_{32}$. Поэтому верна хотя бы одна цепочка неравенств

$$\begin{aligned} &a_{12}|a_{22}|a_{32} \leqslant |a_{11}||a_{22}|a_{32} \leqslant r(a_{22}),\ a_{12}|a_{22}|a_{32} \leqslant a_{12}a_{21}a_{32} \leqslant r(a_{22}), \\ &\qquad a_{12}|a_{22}|a_{32} \leqslant a_{12}|a_{22}|a_{31} \leqslant r(a_{22}). \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{aligned} l_F(A) &\leqslant (1+o(1))\log\left(\max\{D(A), T(A), r(a_{11}), r(a_{12})\}\right) \\ &\leqslant (1+o(1))\log\max\{D(A), T(A), R(A)\}. \end{aligned}$$

Случай 4.2. Пусть выполняется неравенство $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$. Тогда

$$\begin{aligned} r(a_{11}) = |a_{11}|(&a_{21}a_{32} \\ &+ |a_{22}|a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|\}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}}, \end{aligned}$$

$$r(a_{22}) = |a_{22}|(|a_{11}|a_{32} \\ + a_{12}a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|\}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|, a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|\}}.$$

Случай 4.2.1. Пусть выполняется неравенство

$$\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|\} > a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|.$$

Будем опять полагать, что в первом столбце матрицы A есть максимальный по абсолютной величине элемент матрицы (если это не так, то поменяем местами первую и вторую строки, а также столбцы матрицы A, при этом будет справедливо неравенство $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$). Тогда, как и в случае 4.1,

$$r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}), \quad r(a_{22}) = |a_{22}|(|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31}).$$

Аналогично случаю 4.1 с использованием леммы 12 имеем

$$l_F(A) = l_F(x^{a_{11}}y^{a_{12}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}) \leqslant l(x^{|a_{11}|}y^{a_{12}}) \\ + l_F(x^{a_{21}}y^{a_{22}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}) \leqslant (1 + o(1)) \log \max\{|a_{11}|, a_{12}\} \\ + (1 + o(1)) \log D \begin{pmatrix} a_{21} & |a_{22}| & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{32} \end{pmatrix} \leqslant (1 + o(1)) \log \max\{|a_{11}|, a_{12}\} \\ + (1 + o(1)) \log \max\{a_{21}a_{32}, |a_{22}|a_{31}, |a_{22}|a_{32}, a_{21}, |a_{22}|, a_{31}, a_{32}\}.$$

Далее с применением леммы 10 получаем

$$|a_{11}|a_{21}a_{32} \leqslant r(a_{11}),\ |a_{11}||a_{22}|a_{31} \leqslant r(a_{11}),\ |a_{11}||a_{22}|a_{32} \leqslant r(a_{22}), \\ |a_{11}|a_{21} \leqslant T(A),\ |a_{11}||a_{22}| \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\},\ |a_{11}|a_{31} \leqslant T(A), \\ |a_{11}|a_{32} \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\},\ a_{12}|a_{22}|a_{31} \leqslant r(a_{22}), \\ a_{12}a_{21} \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\},\ a_{12}|a_{22}| \leqslant T(A), \\ a_{12}a_{31} \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\}.$$

Осталось оценить сверху величины $a_{12}a_{21}a_{32}$, $a_{12}|a_{22}|a_{32}$ и $a_{12}a_{32}$. Так как в первом столбце матрицы A есть максимальный по абсолютной величине элемент, то справедливо хотя бы одно из двух неравенств: $a_{12}a_{32} \leqslant a_{12}a_{31}$, $a_{12}a_{32} \leqslant \max\{|a_{11}|, a_{21}\}a_{32}$. В любом из этих случаев, применяя лемму 10, получаем неравенство $a_{12}a_{32} \leqslant 2\max\{D(A), T(A)\}$.

Используя неравенство $\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|\} > a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|$ и применяя лемму 10, имеем

$$a_{12}a_{21}a_{32} \leqslant |a_{11}||a_{22}|a_{32} + \max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|\}a_{32} \\ \leqslant r(a_{22}) + 2\max\{D(A), T(A)\}.$$

В силу наличия в первом столбце матрицы A максимального по абсолютной величине элемента справедливо хотя бы одно из неравенств: $|a_{11}| \geqslant a_{12}$, $a_{21} \geqslant |a_{22}|$, $a_{31} \geqslant a_{32}$. Поэтому верна хотя бы одна из цепочек неравенств:

$$a_{12}|a_{22}|a_{32} \leqslant |a_{11}||a_{22}|a_{32} \leqslant r(a_{22}), \quad a_{12}|a_{22}|a_{32} \leqslant a_{12}a_{21}a_{32} \leqslant r(a_{22}),$$
$$a_{12}|a_{22}|a_{32} \leqslant a_{12}|a_{22}|a_{31} \leqslant r(a_{22}),$$

Таким образом, окончательно имеем

$$l_F(A) \leqslant (1+o(1)) \log \left(\max\{D(A), T(A), r(a_{11}), r(a_{12})\}\right)$$
$$\leqslant (1+o(1)) \log \max\{D(A), T(A), R(A)\}.$$

Тогда, как и в случае 4.1, справедливы равенства

$$r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}), \quad r(a_{22}) = |a_{22}|(|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31}).$$

Поэтому выполняется неравенство

$$l_F(A) \leqslant (1+o(1)) \log \max\{D(A), T(A), R(A)\}.$$

Случай 4.2.2. Пусть выполняется неравенство

$$\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|\} \leqslant a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|.$$

Без ограничения общности будем считать, что выполняется неравенство $r(a_{11}) \geqslant r(a_{22})$ (в противном случае поменяем местами первую и вторую строки, а также столбцы матрицы A, при этом будет справедливо неравенство $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$). Тогда

$$r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}) \frac{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|\}}{a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|},$$

$$r(a_{22}) = |a_{22}|(|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31}) \frac{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, |a_{22}|\}}{a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|}.$$

Положим

$$\alpha_2 = |a_{11}| \frac{a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}}{|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31}}, \quad \alpha_3 = 2|a_{11}| \frac{a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}}{a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|},$$

$$\beta_1 = |a_{22}| \frac{|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31}}{a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31}}, \quad \beta_3 = 2|a_{22}| \frac{|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31}}{a_{12}a_{21} - |a_{11}||a_{22}|}.$$

Убедимся в справедливости неравенства $a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31} > 0$. Действительно, пусть это не так, т. е. $a_{21}a_{32} + |a_{22}|a_{31} = 0$. Тогда $a_{31} = 0$, а также либо $a_{21} = 0$, либо $a_{32} = 0$. Следовательно, получаем противоречие либо с тем, что элемент a_{11} особый, либо с отсутствием в матрице A нулевых строк. Аналогично устанавливается справедливость неравенства $|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31} > 0$.

Очевидно, что

$$
\begin{aligned}
&l_F(A) = l_F(x^{a_{11}}y^{a_{12}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}) \\
&\leqslant l\left(u^{|a_{11}|}w^{\lfloor\beta_1\rfloor}z^{a_{12}+\lfloor\beta_1\rfloor}u^{\lfloor\alpha_2\rfloor}v^{a_{21}+\lfloor\alpha_2\rfloor}w^{|a_{22}|}, u^{\lfloor\alpha_3\rfloor}v^{a_{31}+\lfloor\alpha_3\rfloor}w^{\lfloor\beta_3\rfloor}z^{a_{32}+\lfloor\beta_3\rfloor}\right).
\end{aligned}
$$

Далее справедливо равенство

$$
\begin{pmatrix} |a_{22}|\frac{|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31}}{a_{21}a_{32}+|a_{22}|a_{31}} \\ |a_{22}| \\ 2|a_{22}|\frac{|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31}}{a_{12}a_{21}-|a_{11}||a_{22}|} \end{pmatrix} = \frac{|a_{22}|(|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31})}{|a_{11}|(a_{21}a_{32}+|a_{22}|a_{31})} \begin{pmatrix} |a_{11}| \\ |a_{11}|\frac{a_{21}a_{32}+|a_{22}|a_{31}}{|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31}} \\ 2|a_{11}|\frac{a_{21}a_{32}+|a_{22}|a_{31}}{a_{12}a_{21}-|a_{11}||a_{22}|} \end{pmatrix}.
$$

Следовательно,

$$
\begin{pmatrix} \beta_1 \\ |a_{22}| \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \frac{r(a_{22})}{r(a_{11})} \begin{pmatrix} |a_{11}| \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},
$$

где $r(a_{22})/r(a_{11}) \leqslant 1$. Поэтому можно применять лемму 14. С использованием этой леммы, а также леммы 15 получаем

$$
\begin{aligned}
l_F(A) \leqslant \log D &\begin{pmatrix} |a_{11}| & 0 & \lfloor\beta_1\rfloor & a_{12}+\lfloor\beta_1\rfloor \\ \lfloor\alpha_2\rfloor & a_{21}+\lfloor\alpha_2\rfloor & |a_{22}| & 0 \\ \lfloor\alpha_3\rfloor & a_{31}+\lfloor\alpha_3\rfloor & \lfloor\beta_3\rfloor & a_{32}+\lfloor\beta_3\rfloor \end{pmatrix} \\
&+ o\left(\log\max\{\max a_{ij}, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_3\}\right) \\
&\leqslant (1+o(1))\log D \begin{pmatrix} |a_{11}| & 0 & a_{12}+\beta_1 \\ \alpha_2 & a_{21}+\alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & a_{31}+\alpha_3 & a_{32}+\beta_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Обозначим последнюю матрицу через M_2 и найдём величину $|\det M_2|$:

$$
\begin{aligned}
|\det M_2| = \big||a_{11}|a_{21}a_{32} &+ |a_{11}|a_{21}\beta_3 + |a_{11}|\alpha_2 a_{32} + |a_{11}|\alpha_2\beta_3 + a_{12}\alpha_2 a_{31} \\
&- a_{12}a_{21}\alpha_3 + \beta_1\alpha_2 a_{31} - \beta_1 a_{21}\alpha_3\big| = \big||a_{11}|a_{21}a_{32}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
+\,2|a_{11}|a_{21}|a_{22}|\frac{|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31}}{a_{12}a_{21}-|a_{11}||a_{22}|}+|a_{11}|^2a_{32}\frac{a_{21}a_{32}+|a_{22}|a_{31}}{|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31}}\\
+\,2|a_{11}|^2|a_{22}|\frac{a_{21}a_{32}+|a_{22}|a_{31}}{a_{12}a_{21}-|a_{11}||a_{22}|}+|a_{11}|a_{12}a_{31}\frac{a_{21}a_{32}+|a_{22}|a_{31}}{|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31}}\\
-\,2|a_{11}|a_{12}a_{21}\frac{a_{21}a_{32}+|a_{22}|a_{31}}{a_{12}a_{21}-|a_{11}||a_{22}|}+|a_{11}||a_{22}|a_{31}\\
-\,2|a_{11}|a_{21}|a_{22}|\frac{|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31}}{a_{12}a_{21}-|a_{11}||a_{22}|}\Big|=\Big||a_{11}|(a_{21}a_{32}+|a_{22}|a_{31})\\
+\,|a_{11}|\frac{a_{21}a_{32}+|a_{22}|a_{31}}{|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31}}(|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31})\\
-\,2|a_{11}|\frac{|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31}}{a_{12}a_{21}-|a_{11}||a_{22}|}(a_{12}a_{21}-|a_{11}||a_{22}|)\Big|=0.
\end{gathered}
$$

Чтобы оценить сверху величину $D(M_2)$, установим, используя неравенство $|a_{11}||a_{22}|\leqslant a_{12}a_{21}$, верхние границы для α_2 и β_1:

$$
\alpha_2=\frac{|a_{11}|a_{21}a_{32}}{|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31}}+\frac{|a_{11}||a_{22}|a_{31}}{|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31}}\leqslant a_{21}+\frac{a_{12}a_{21}a_{31}}{|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31}}\leqslant 2a_{21},
$$

$$
\beta_1=\frac{|a_{11}||a_{22}|a_{32}}{a_{21}a_{32}+|a_{22}|a_{31}}+\frac{a_{12}|a_{22}|a_{31}}{a_{21}a_{32}+|a_{22}|a_{31}}\leqslant\frac{a_{12}a_{21}a_{32}}{a_{21}a_{32}+|a_{22}|a_{31}}+a_{12}\leqslant 2a_{12},
$$

Далее, используя эти соотношения и применяя лемму 10, получаем

$$
\begin{aligned}
|\det M_2(1,2;1,2)|&=|a_{11}|a_{21}+|a_{11}|\alpha_2\leqslant 3|a_{11}|a_{21}\leqslant 6T(A),\\
|\det M_2(1,2;1,3)|&=a_{12}\alpha_2+\beta_1\alpha_2\leqslant 2a_{12}a_{21}+4a_{12}a_{21}\\
&\leqslant 12\max\{D(A),T(A)\},\\
|\det M_2(1,2;2,3)|&=a_{12}a_{21}+a_{12}\alpha_2+\beta_1a_{21}+\beta_1\alpha_2\leqslant 9a_{12}a_{21}\\
&\leqslant 18\max\{D(A),T(A)\},\\
|\det M_2(1,3;1,2)|&=|a_{11}|a_{31}+|a_{11}|\alpha_3\leqslant T(A)+2r(a_{11})\leqslant T(A)+2R(A),\\
|\det M_2(1,3;1,3)|&=\big||a_{11}|a_{32}+|a_{11}|\beta_3-a_{12}\alpha_2-\beta_1\alpha_3\big|\\
&\leqslant|a_{11}|a_{32}+|a_{11}|\beta_3+a_{12}\alpha_2+\beta_1\alpha_3\leqslant D(A)+2r(a_{22})\\
&+2a_{12}a_{21}+4r(a_{11})\leqslant D(A)+6R(A)\\
&+4\max\{D(A),T(A)\},\\
|\det M_2(1,3;2,3)|&=a_{12}a_{31}+a_{12}\alpha_3+\beta_1a_{31}+\beta_1\alpha_3\leqslant D(A)+2r(a_{11})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2D(A)+4r(a_{11}) \leqslant 3D(A)+6R(A),\\
|\det M_2(2,3;1,2)| = {}& a_2a_{31}+a_{21}\alpha_3 \leqslant 2a_{21}a_{31}+2r(a_{11})\\
&\leqslant 4\max\{D(A),T(A)\}+2R(A),\\
|\det M_2(2,3;1,3)| = {}& a_2a_{32}+\alpha_2\beta_3 \leqslant 2a_{21}a_{32}+4r(a_{22}) \leqslant 2D(A)+4R(A),\\
|\det M_2(2,3;2,3)| = {}& a_{21}a_{32}+a_{21}\beta_3+\alpha_2a_{32}+\alpha_2\beta_3 \leqslant D(A)+2r(a_{22})\\
&+2D(A)+4r(a_{22}) \leqslant 3D(A)+6R(A).
\end{aligned}
$$

Поэтому, учитывая также неравенства $\alpha_3 \leqslant 2r(a_{11}) \leqslant 2R(A)$ и $\beta_3 \leqslant 2r(a_{22}) \leqslant 2R(A)$, получаем $D(M_2) \leqslant 18\max\{D(A),T(A),R(A)\}$. Следовательно, справедлива оценка

$$l_F(A) \leqslant (1+o(1))\log\max\{D(A),T(A),R(A)\}.$$

Лемма 16 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гашков С. Б., Кочергин В. В.** Об аддитивных цепочках векторов, вентильных схемах и сложности вычисления степеней // Методы дискретного анализа в теории графов и сложности. Сб. научн. тр. Вып. 52. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1992. С. 22–40.
2. **Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.** Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982.
3. **Кнут Д. Е.** Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. М.: Мир, 1977.
4. **Кочергин В. В.** О сложности вычислений одночленов и наборов степеней // Дискретный анализ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1994. С. 94–107. (Тр./РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 27.)
5. **Кочергин В. В.** О двух обобщениях задачи об аддитивных цепочках // Труды IV Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (19–25 июня 2000 г.). М.: «МАКС Пресс», 2000. С. 55–59.
6. **Кочергин В. В.** О сложности вычисления пары одночленов от двух переменных // Дискретная математика. 2005. Т. 17, вып. 4. С. 116–142.
7. **Кочергин В. В.** Об асимптотике сложности аддитивных вычислений систем целочисленных линейных форм // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 2. С. 38–58.
8. **Кочергин В. В.** О сложности вычисления систем одночленов от двух переменных // Труды VII Международной конференции « Дискретные модели в теории управляющих систем» (Покровское, 4–6 марта 2006 г.). М.: МАКС Пресс, 2006. С. 185–190.

9. **Кочергин В. В.** О сложности совместного вычисления трёх одночленов от трёх переменных // Математические вопросы кибернетики, вып. 15. М.: Физматлит, 2006. С. 79–155.

10. **Кочергин В. В.** О сложности совместного вычисления двух элементов свободной абелевой группы // Материалы XVI Международной школы-семинара « Синтез и сложность управляющих систем» (Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006 г.). М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2006. С. 54–59.

11. **Кочергин В. В.** О сложности вычисления систем одночленов и систем целочисленных линейных форм // Дискретная математика и ее приложения. Сборник лекций молодежных научных школ по дискретной математике и ее приложениям. Вып. III. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. С. 3–63.

12. **Кочергин В. В.** О максимальной сложности вычисления систем элементов свободной абелевой группы // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2007, № 3. С. 15–20.

13. **Лупанов О. Б.** Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С 31–110.

14. **Михалев А. В., Мишина А. П.** Бесконечные абелевы группы: методы и результаты // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1, № 2. С. 319–375.

15. **Сидоренко А. Ф.** Сложность аддитивных вычислений семейств целочисленных линейных форм // Теоретические применения методов математической логики. III. Л.: Наука, 1981. С. 53–61 (Записки научных семинаров ЛОМИ, Т. 105).

16. **Сэвидж Д. Е.** Сложность вычислений. М.: Изд-во Факториал, 1998.

17. **Knuth D. E., Papadimitriou C. H.** Duality in addition chains // Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science. 1981. N 13. P. 2–4.

18. **Morgenstern J.** Note on a lower bound of the linear complexity of the fast Fourier transform // J. Assoc. Comput. Mach. 1973. V. 20, N 2. P. 305–306.

Адрес автора:

МГУ, мех.-мат. факультет,
Воробьёвы горы,
119992 Москва,
Россия.
E-mail: vvkoch@yandex.ru,
koch@procenter.net.ru

Статья поступила
13 января 2008 г.