ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2008. Том 15, № 3. 3–10

УДК 519.86

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ПОГРУЖЕНИЕ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА В СИМПЛЕКСЫ*)

В. П. Булатов, Т. И. Белых, Э. Н. Яськова

Аннотация. Предлагается один из вариантов методов погружения. В предложенных ранее вариантах роль погружающих множеств играли опорные конусы. Здесь конусы заменяются опорными симплексами, что позволяет получить полиномиальную гарантированную скорость сходимости и лучшую её оценку в среднем.

Ключевые слова: выпуклый конус, опорный конус, чебышёвская точка, опорный симплекс.

Введение

В статье рассматривается решение следующей задачи: найти

$$x^* = \arg\min\{\varphi(x) \mid x \in R\}, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x)$ — выпуклая функция, $R \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое ограниченное множество.

Идея метода состоит в следующем: множество R или часть его, содержащая решение x^* задачи (1), последовательно погружается в симплексы $\{S^k\}$ такие, что их объёмы $|S^k|$ стремятся к нулю и $x^* \in S^k$ при любом $k \geqslant 1$. Для построения S^{k+1} находится центр тяжести или чебышёвская точка x^k симплекса S^k, через которую проводится отсекающая плоскость. Усечённый симплекс погружается в симплекс меньшего объёма. В зависимости от способов построения симплексов и выбора их центров получены следующие оценки сокращения их объёмов [4, 2]. Оценка

$$\frac{|S^k|}{|S^{k-1}|} \leqslant \left(\frac{n_1}{n_1 - 1}\right)^{n_1 - 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$$

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–00465).

справедлива для ортогональных симплексов S^k, где n_1 — число ненулевых элементов в уравнении отсекающей плоскости. Метод наиболее эффективен, если R задано системой линейных неравенств $Ax \leqslant b$ с разряженной или блочной матрицей A.

Если допустить, что число ненулевых компонент в отсекающей плоскости равновероятно при $2 \leqslant n_1 \leqslant n$, то средняя оценка имеет вид

$$\frac{|S^k|}{|S^{k-1}|} \leqslant \frac{1}{n}\left[\sum_{n_1=2}^{n}\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)^{n_1-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}+\frac{1}{2}\right] \sim 1-\frac{\ln n}{n}.$$

Оценка

$$\frac{|S^k|}{|S^{k-1}|} \leqslant \left(\frac{l_k}{l_{k-1}}\right)^{l_{k-1}}\left(\frac{l_k}{l_{k+1}}\right)^{l_k} < 1$$

справедлива для произвольных симплексов S^k, где l_k $(2 \leqslant l_k \leqslant n)$ — число неотсечённых вершин из S^k, принадлежащих усечённому симплексу. Если также допустить, что равновероятно отсечение одной, двух или n вершин, то средняя оценка будет иметь вид

$$\frac{|S^k|}{|S^{k-1}|} \leqslant \frac{1}{n}\left[\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{l_k}{l_{k-1}}\right)^{l_{k-1}}\left(\frac{l_k}{l_{k+1}}\right)^{l_k}+\frac{1}{2}\right] \sim 1-\frac{0{,}79}{n}.$$

Если x^k — чебышёвская точка в S^k и $\{S^k\}$ — последовательность правильных симплексов, то гарантированная оценка сокращения объёмов имеет вид

$$\frac{|S^k|}{|S^{k-1}|} \leqslant \left(1-\frac{n}{n+1}\right) < 1.$$

Ниже рассматривается также новый метод опорного симплекса (модификация метода опорного конуса [4, 1]), для которого гарантированная оценка сокращения объёмов тоже не зависит от размерности пространства.

1. Метод опорного конуса

Для более отчётливого понимания метода опорного симплекса мы напомним вкратце метод опорного конуса, изложенный в [3].

Перейдем к задаче: найти

$$\min\{\varphi(x) = cx \mid x \in R\}, \quad cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{2}$$

Пусть y^0 — внутренняя точка R. Погрузим R в выпуклый многогранный конус R^0, образованный пересечением n полупространств $R^0 = \{x \mid A^0x \leqslant b^0\}$, такой, что линейная форма cx ограничена снизу на R^0, матрица A^0 невырожденная и конус имеет вершину в точке $x^0 = (A^0)^{-1}b^0$. Например,

$$R^0 = \left\{x \mid \underline{x}_j \leqslant x_j,\ \text{если}\ \ c_j < 0,\ \overline{x}_j \geqslant x_j,\ \text{если}\ \ c_j > 0\right\},$$

где $\overline{x}_j$ и $\underline{x}_j$ — верхние и нижние границы изменения переменных.

Очевидно, что $\min\{cx \mid x \in R^0\} = cx^0 = c(A^0)^{-1}b^0$. Определим точку $\overline{x}^0$ пересечения отрезка $x = x^0 + \lambda(y^0 - x^0)$ с границей множества R и опорное к R в точке $\overline{x}^0$ полупространство

$$\overline{a}^0(x - \overline{x}^0) \leqslant 0. \tag{3}$$

Запишем уравнения рёбер конуса R^0:

$$x^j = x^0 - \mu^j (a^{j_0})^{-1}, \quad j = \overline{1, n},\ \mu^j > 0, \tag{4}$$

где $(a^{j_0})^{-1}$ — столбцы матрицы $(A^0)^{-1}$, и найдём точки пересечения лучей (4) с границей полупространства (3), т. е. те точки x^j, которые отвечают соотношениям

$$0 < \frac{\overline{a}^0(\overline{x}^0 - x^0)}{\overline{a}^0(a^{j_0})^{-1}} = \mu^j < \infty \quad \forall\, j \in J_0.$$

Найдём $\min\limits_{j \in J_0} cx^j = cx^0 \quad \forall\, j \in J_0$. Пусть на x^1 достигается

$$\min\{cx \mid x \in R^0,\ \ \overline{a}^0(x - \overline{x}^0) \leqslant 0\}.$$

Кроме того, точка x^1 удовлетворяет системе $A^1x^1 = b^1$, матрица которой отличается от A^0 лишь строкой $(\overline{a}^0)$, а столбец свободных членов отличается от b^0 лишь одним элементом. Определим выпуклый многогранный конус $R^1 = \{x \mid A^1x \leqslant b^1\}$, который также образован пересечением n полупространств. Линейная форма cx ограничена на R^1, более того, $\min\{cx \mid x \in R^1\} = cx^1$, здесь $x^1 = (A^1)^{-1}b^1$ — вершина конуса R^1. Вновь найдём точку $\overline{x}^1$ пересечения отрезка $x = x^1 + \lambda(y^0 - x^1)$ с границей R и т. д. Запишем теперь k-й шаг метода.

1. Пусть задан конус R^k с вершиной в точке x^k системой неоднородных неравенств $A^kx \leqslant b^k$, где A^k — невырожденная квадратная матрица порядка n, $x^k = (A^k)^{-1}b^k$. Очевидно,

$$\min\{cx \mid x \in R^k\} = c(A^k)^{-1}b^k = cx^k. \tag{5}$$

2. Определим точку $\overline{x}^k$ пересечения отрезка

$$x = x^k + \lambda(y^0 - x^k) \tag{6}$$

с границей R и опорное к R в точке $\overline{x}^k$ полупространство $\overline{a}^k(x - \overline{x}^k) \leqslant 0$.

3. Запишем уравнения рёбер конуса R^k: $x^j = x^k - \mu^j (a^{j_k})^{-1}$, где $(a^{j_k})^{-1}$ — столбцы матрицы $(A^k)^{-1}$, $\mu^j > 0$, и найдём точки их пересечения с границей полупространства $\overline{a}^k(x - \overline{x}^k) \leqslant 0$, опорного к R в точке $\overline{x}^k$.

4. Среди этих точек отберём отвечающие неравенству

$$0 < \frac{a^k(\overline{x}^k - x^k)}{\overline{a}^k(a^{j_k})^{-1}} = \mu^j < \infty \quad \forall\, j \in J_k.$$

Найдём $\min\limits_{j \in J_k} cx^j = cx^{k+1}$, причём x^{k+1} удовлетворяет системе $A^{k+1}x^{k+1} = b^{k+1}$, матрица которой отличается от A^k лишь строкой $\overline{a}^k$, а столбец свободных членов — одним элементом $\overline{a}^k\overline{x}^k$.

Очевидно, что

$$\min\{cx \mid x \in R^{k+1}\} = cx^{k+1},$$

где $R^{k+1} = \{x \mid A^{k+1}x \leqslant b^{k+1}\}$.

Обоснование метода опорного конуса также приводится в [3]. Введём в рассмотрение следующую функцию, определённую на последовательности $\{\overline{x}^j\}$ граничных точек выпуклого замкнутого ограниченного множества R:

$$\psi(\overline{x}^j) = cx^j = \min\{cx \mid x \in R^j,\ \overline{a}^j(x - x^j) \leqslant 0\, \forall\, j\},$$

где R^j, $\overline{a}^j$, $\overline{x}^j$ определены в методе опорного конуса. Сходимость метода опорного конуса гарантирует

Теорема 1. *Пусть $\|A^j\| \leqslant c < \infty\ \forall\, j$; $\psi(\overline{x})$ — непрерывная функция. Тогда существует множество индексов $J_1 \subset J$ такое, что*

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in J_1}} \overline{x}^j = \lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in J_1}} x^j = \overline{x} \in R_\Gamma,$$

где R_Γ — множество граничных точек.

В [3] доказана

Теорема 2. *Пусть соблюдаются условия теоремы* 1. *Тогда*

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in J_1}} cx^j = \lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in J_1}} c\overline{x}^j = \min\{cx \mid x \in R\}.$$

2. Метод опорного симплекса

Очевидно, что с ростом числа итераций k обусловленность систем уравнений $A^k x = b^k$, определяющих последовательность $\{x^k\}$ оптимальных вершин опорных конусов $\{R^k\}$ [1, 4], растёт. Это приводит к тому, что скорость сходимости q^k последовательности $\{x^k_{n+1}\}$ становится сколь угодно малой, т. е. она зависит от структуры промежуточной информации, иначе говоря, структуры системы неравенств $A^k x \leqslant b^k$, определяющих опорный конус. Ниже мы попытаемся избавиться от этого недостатка.

Итак, пусть уже построена последовательность опорных конусов $\{R^k\}$, x^k — решение задачи (5), $\overline{x}^k$ — точка пересечения отрезка (6) с границей R.

Допустим, что $\overline{x}^{k_l} = \arg\min\{\varphi(\overline{x}^1), \varphi(\overline{x}^2), \ldots, \varphi(\overline{x}^k)\},\ l \in \overline{1, k}$. Тогда симплекс $\widetilde{R}^k = \{x \mid x \in R^k,\ c(x - \overline{x}^{k_l}) \leqslant 0\}$, очевидно, содержит решение x^* задачи (2) и является опорным к R в точке $\overline{x}^{k_l}$. Найдём центр тяжести $\tilde{x}^k$ симплекса $\widetilde{R}^k$:

$$\tilde{x}^k = \frac{1}{n+1}(\tilde{x}^{k_0} + \tilde{x}^{k_1} + \ldots + \tilde{x}^{k_l} + \tilde{x}^{k_n}),$$

где $\tilde{x}^{k_0}, \tilde{x}^{k_j}, \ldots, \tilde{x}^{k_n}$ — вершины симплекса $\widetilde{R}^k$.

Если $\tilde{x}^k \in R$, то найдём точку $\tilde{x}^{k+1} = \tilde{x}^k - \lambda c,\ \lambda \geqslant 0$, лежащую на границе R. Определим новый симплекс

$$\widetilde{R}^{k+1} = \{x \mid x \in R^k,\ c(x - \tilde{x}^{k+1}) \leqslant 0\}.$$

В силу метода симплексных погружений [2] полупространство $\{c(x - \overline{x}^{k+1}) \leqslant 0\}$ отсекает от текущего симплекса $\widetilde{R}^k$ n вершин, уменьшая его объём не менее чем в 2 раза, т. е. $q^k \leqslant 1/2$. Повторяем этот шаг итерационного процесса с последовательностью симплексов $\widetilde{R}^j$ до тех пор, пока $\tilde{x}^j \in R$. Как только $\tilde{x}^j \notin R$, найдём точку $\overline{x}^j$ пересечения отрезка $x = \tilde{x}^j + \lambda(y^0 - \tilde{x}^j)$ с границей множества R и определим отсекающее полупространство

$$a^j(x - \overline{x}^j) \leqslant 0. \tag{7}$$

Пересечение этого полупространства с $\widetilde{R}^k$ определит усечённый симплекс, который согласно [1] погружаем в симплекс минимального объёма R^{k+1}. При этом известна оценка сокращения объёмов $|R^k|$ и $|R^{k+1}|$,

а именно

$$q^k = \frac{|R^{k+1}|}{|R^k|} \leqslant \left(\frac{l_k}{l_{k+1}}\right)^{l_k} \left(\frac{l_k}{l_{k-1}}\right)^{l_{k-1}} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \sim 1 - \frac{1}{2n^2}, \text{ где } k \geqslant 2,$$

при $l_k = 1$ имеем

$$\frac{|R^{k+1}|}{|R^k|} \leqslant \frac{1}{2},$$

здесь l_k — число неотсечённых полупространством (7) вершин симплекса. Таким образом, скорость сходимости данной модификации зависит лишь от размерности пространства. Если допустить, что принадлежность или непринадлежность центра тяжести $\tilde{x}^k$ текущего симплекса $\widetilde{R}^k$ множеству R равновероятна, то осреднённая оценка $\overline{q}^k$ скорости сходимости метода опорного симплекса не зависит от размерности пространства и имеет вид $\overline{q}^k \leqslant \frac{3}{4}$.

Приведём таблицу значений оценок скорости сходимости q (гарантированное) и $\overline{q}$ (среднее) по объёму n итерационного процесса: для метода эллипсоидов $(q_э, \overline{q}_э)$, для метода симплексных погружений $(q_c,\ \overline{q}_c)$, для метода ортогональных симплексов $(q_{oc},\ \overline{q}_{oc})$ и для метода опорных симплексов, предложенных в данной работе, $(q_{kc},\ \overline{q}_{kc})$. В силу симметрии эллипсоидов $q_э = \overline{q}_э$, гарантированные оценки $q_c = q_{oc} = q_{kc}$.

Т а б л и ц а

n	$q_э = \overline{q}_э$	$q_c = q_{oc} = q_{kc}$	$\overline{q}_c$	$\overline{q}_{oc}$	$\overline{q}_{kc}$
2	0,769800	0,888888	0,694444	0,694444	0,718950
4	0,881318	0,970903	0,827252	0,802926	0,742187
6	0,918685	0,986791	0,879481	0,846736	0,746528
10	0,951140	0,995154	0,924885	0,889142	0,748750
20	0,975290	0,998770	0,961309	0,930168	0,749687
50	0,990049	0,999801	0,984237	0,963738	0,749950
80	0,993700	0,999922	0,990102	0,974548	0,749980
100	0,995012	0,999950	0,992069	0,978565	0,749987

При некоторых разумных статистических гипотезах получается лучшая средняя оценка, чем в методе произвольных симплексов, ортогональных симплексов или в методе эллипсоидов [5].

Рис. 1 и 2 иллюстрируют метод опорного конуса и метод опорного симплекса.

Из рисунков видно, что метод опорного конуса не использует информации о точках допустимого множества. При учёте таких точек можно построить последовательность ограниченных опорных симплексов, объёмы которых стремятся к нулю. При этом если на каждом шаге итерационного процесса находить центры тяжести этих симплексов, как в [1], то можно построить алгоритм, который сохраняет оценку сверху и снизу погрешностей приближённого решения, как в методе опорного конуса, и вместе с этим имеет полиномиальную скорость сходимости.

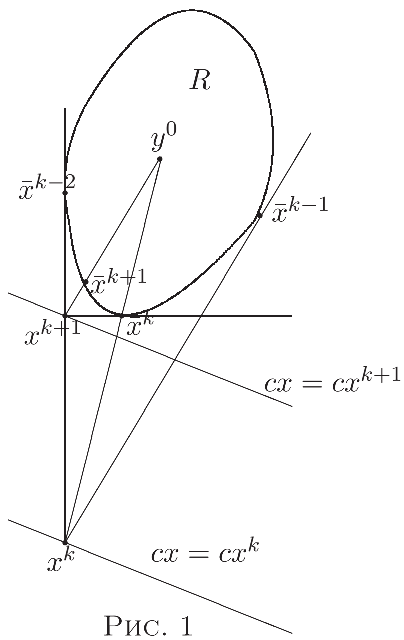

Рис. 1

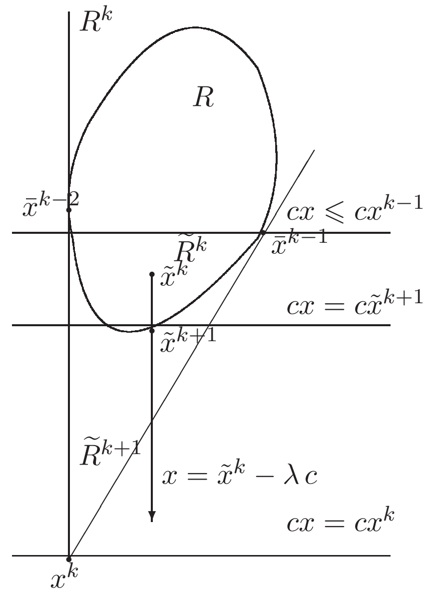

Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. **Анциферов Е. Г., Булатов В. П.** Алгоритм симплексных погружений в выпуклом программировании // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1984. – Т. 27, № 3. — С. 348–385.
2. **Ащепков Л. Т., Белов Б. И., Булатов В. П.** Методы решения задач математического программирования и оптимального управления. — Новосибирск: Наука, 1984. — 233 с.
3. **Булатов В. П.** Методы погружения в задачах оптимизации. — Новосибирск: Наука, 1977. — 196 с.
4. **Булатов В. П., Шепотько И. О.** Метод ортогональных симплексов в выпуклом программировании // Прикладная математика. — Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1982. — С. 8–16.

5. **Хачиян Л. Г.** Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1980. — Т. 28, № 1. — С. 51–69.

Булатов Валерьян Павлович,
e-mail: elv@isem.sei.irk.ru

Белых Татьяна Ивановна,

Яськова Эльвира Николаевна,
e-mail: elv@isem.sei.irk.ru

Статья поступила
17 октября 2007 г.

Переработанный вариант —
25 марта 2008 г.