ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2008. Том 15, № 3. 31–42

УДК 519.833.2, 519.8:656

РАВНОВЕСИЕ НЭША В ТРАНСПОРТНОЙ МОДЕЛИ С КВАДРАТИЧНЫМИ ЗАТРАТАМИ*)

В. И. Зоркальцев, М. А. Киселева

Аннотация. Рассматривается проблема согласования планов перевозок нескольких клиентов по единой транспортной сети. Затраты на перевозки по отдельным дугам каждого клиента являются квадратичной функцией от объёмов перевозок этого клиента при фиксированных объёмах перевозок других клиентов. Показано, что проблема поиска равновесия Нэша для рассматриваемой нелинейной транспортной модели сводится к решению задачи выпуклого квадратичного программирования.

Ключевые слова: нелинейная транспортная модель, равновесие по Нэшу.

Введение

Объектом исследования в этой статье является математическая модель транспортной системы с несколькими клиентами, выбирающими планы перевозок своих грузов независимо друг от друга. Рассматривается ситуация, когда тарифы на перевозки по отдельным дугам транспортной сети зависят от суммарных объёмов перевозок по ней всех клиентов. Поэтому затраты на перевозки каждого клиента зависят не только от выбираемого им плана перевозок своих грузов, но и от планов перевозок других клиентов транспортной сети.

Рассматривается случай линейно возрастающей зависимости тарифа от суммарных объёмов перевозок по данной дуге. В этом случае суммарные затраты на перевозки всех клиентов выражаются в виде квадратичной функции от их суммарных объёмов перевозок по отдельным дугам.

Обсуждаемую здесь модель можно рассматривать как одно из направлений развития нелинейной транспортной модели в «классической»

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ (проект 06–02–00266а).

постановке: выбор плана перевозок грузов, имеющего минимальные суммарные затраты. Частным случаем такой постановки будет задача выбора плана перевозок отдельного клиента при зафиксированных планах остальных клиентов. Новым усложняющим моментом в рассматриваемой здесь модели является необходимость учета взаимовлияния планов перевозок отдельных клиентов. Это взаимовлияние будем учитывать в форме проблемы поиска равновесия Нэша, т. е. такого набора планов перевозок всех клиентов, при котором никому из них не выгодно менять свой план. Как будет показано, поиск равновесия Нэша в транспортной модели сводится к задаче квадратичного программирования, для решения которой существует много эффективных алгоритмов, изложенных, например, в [1, 5].

1. Определения и постановка задачи

Пусть m — число узлов транспортной сети, n — число дуг, L — количество клиентов, $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$ инциденций узлов и дуг, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если дуга } j \text{ не связана с узлом } i, \\ +1, & \text{если дуга } j \text{ входит в узел } i, \\ -1, & \text{если дуга } j \text{ выходит из узла } i. \end{cases}$$

Заданы векторы $b^l \in \mathbb{R}^m$, компоненты которых b_i^l равны объёмам транспортируемых грузов из узла $i = 1, \ldots, m$ клиентами $l = 1, \ldots, L$. Отметим, что если $b_i^l < 0$, то величина $\left|b_i^l\right|$ соответствует объёму поставок клиента l из узла i. Считаем, что объёмы грузов, поставляемых в транспортную систему и получаемых из транспортной системы каждым клиентом, должны совпадать, т. е. векторы b^l удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{m} b_i^l = 0, \quad l = 1, \ldots, L. \tag{1}$$

Обозначим за x^l вектор из $\mathbb{R}^n$, компоненты которого x_j^l соответствуют объёмам перевозок грузов клиента l по дуге $j = 1, \ldots, n$. Вектор x^l будем называть планом перевозок клиента l. Этот план перевозок будем называть допустимым, если выполняются условия

$$Ax^l = b^l, \quad x^l \geqslant 0. \tag{2}$$

Здесь первое условие — баланс ввозимых и вывозимых грузов клиента l в каждом узле. Второе условие означает, что грузы могут перевозиться только по заданному для каждой дуги направлению. Отметим, что в расматриваемой постановке не исключается случай наличия нескольких дуг, связывающих одну и ту же пару узлов, в том числе с разными направлениями перевозок.

Для существования допустимого плана перевозок клиента l необходимо выполнение условия (1). Это следует из того, что сумма строк матрицы A равна нулевому вектору.

Набор планов перевозок всех клиентов представим в виде матрицы $X = [x^1, x^2, \ldots, x^L]$ размера $n \times L$. Эту матрицу будем называть *планом перевозок всех клиентов*. План перевозок всех клиентов X будем называть *допустимым*, если таковыми являются планы перевозок x^l клиентов $l = 1, \ldots, L$, составляющие вектор-столбцы данной матрицы X.

Обозначим через z вектор из $\mathbb{R}^n$, компоненты которого равны суммарным объёмам перевозок всех клиентов по отдельным дугам, т. е.

$$z = \sum_{l=1}^{L} x^l. \tag{3}$$

Тариф на перевозку по дуге j будем рассматривать в виде функции $P_j(z_j)$ от объёма перевозок по данной дуге j. Будем считать, что это линейно возрастающая функция

$$P_j(z_j) = \alpha_j z_j + \beta_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Здесь $\alpha_j,\ \beta_j$ — некоторые вещественные числа, причем $\alpha_j > 0$.

Произведение тарифа на объём перевозок клиента l по дуге j будет давать величину затрат этого клиента на перевозки по данной дуге. Эти затраты представляются в виде функции от суммарных перевозок z_j и перевозок x_j^l клиента l по дуге j

$$G_j^l\big(z_j, x_j^l\big) = P_j(z_j) x_j^l. \tag{5}$$

Суммируя затраты по всем дугам, получим суммарные затраты на перевозки клиента l в виде функции от плана перевозок данного клиента x^l и вектора суммарных перевозок всех клиентов по всем дугам z:

$$G^l(z, x^l) = \sum_{j=1}^{n} G_j^l\big(z_j, x_j^l\big). \tag{6}$$

Естественно считать, что каждый клиент старается выбрать такой допустимый план перевозок своих грузов, при котором его затраты на перевозки были бы минимальны. Итак, пусть каждый клиент $l = 1, \dots, L$ при выборе вектора x^l решает задачу

$$G^l(z, x^l) \to \min \tag{7}$$

при ограничениях (2).

В таком виде задача выбора плана перевозок пока не доопределена, поскольку вектор плана перевозок каждого клиента x^l влияет согласно (3) на вектор z и тем самым на решение всех клиентов. Один из способов доопределения такой многокритериальной проблемы — поиск равновесия Нэша, т. е. такого набора допустимых планов перевозок каждого клиента x^l, $l = 1, \dots, L$, при котором никому из клиентов невыгодно менять свой план. Приведем определение такого равновесия.

Равновесие по Нэшу в транспортной модели. Допустимый план перевозок всех клиентов $\overline{X} = [\overline{x}^1, \overline{x}^2, \dots, \overline{x}^L]$ называется *равновесным по Нэшу*, если ни для какого $l = 1, \dots, L$ не существует допустимого плана перевозок $\widetilde{X} = [\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2, \dots, \widetilde{x}^L]$ такого, что $\widetilde{x}^t = \bar{x}^t$, $t \in \{1, \dots, L\}$, $t \neq l$, и при этом $G^l(\widetilde{z}, \widetilde{x}^l) < G^l(\overline{z}, \overline{x}^l)$, где $\widetilde{z} = \sum\limits_{\tau=1}^{L} \widetilde{x}^\tau$, $\overline{z} = \sum\limits_{\tau=1}^{L} \overline{x}^\tau$.

Отметим, что в этом определении переход от плана $\overline{X}$ к плану $\widetilde{X}$ осуществляется только за счет изменения плана перевозок одного из клиентов при неизменных планах перевозок остальных. При переходе от плана l-го клиента $\overline{x}^l$ к плану $\widetilde{x}^l$ учитывается влияние этого перехода на тарифы вследствие изменения векторов суммарных перевозок по дугам.

Как будет доказано, для транспортной модели с линейно возрастающими тарифами существует и единственно равновесие Нэша, если ограничения (2) для всех клиентов являются непротиворечивыми.

Будет показано, что рассматриваемая проблема поиска равновесия Нэша сводится к задаче квадратичного программирования (минимизация квадратичной строго выпуклой функции при линейных ограничениях), для решения которой имеется много алгоритмов.

Потребуются следующие вспомогательные утверждения. Первое из них является известной теоремой Фаркаша об альтернативных системах линейных неравенств (см., например, [2, с. 72; 3, с. 62]).

Лемма 1. *Условия (2) для клиента l несовместны в том и только том случае, если $(b^l, v) > 0$, $A^T v \leqslant 0$ при некотором $v \in \mathbb{R}^m$.*

Лемма 2. *Пусть Q — матрица размера $L \times L$, диагональные элементы которой равны 2, а остальные равны 1. Тогда Q — положительно определенная матрица.*

Доказательство. Итак, пусть $Q = E + I$, где E — матрица размера $L \times L$ со всеми единичными элементами, I — единичная матрица. Для любого $w \in \mathbb{R}^L$

$$w^T Q w = w^T E w + w^T w = \left(\sum_{j=1}^{L} w_j \right)^2 + \sum_{j=1}^{L} w_j^2.$$

Первое слагаемое полученного выражения неотрицательно, второе слагаемое (сумма квадратов) при $w \neq 0$ положительно. Следовательно, $w^T Q w > 0$ при любом $w \neq 0,\ w \in \mathbb{R}^L$. Лемма 2 доказана.

Для дальнейшего изложения важно, что при рассматриваемой в лемме 2 матрице Q функция $f(w) = w^T Q w$ является строго выпуклой. Причём при любых $w \in \mathbb{R}^L, r \in \mathbb{R}^L, r \neq 0$, функция $\varphi(\lambda) = f(w + \lambda r)$ будет квадратичной $\varphi(\lambda) = a + b\lambda + c\lambda^2$, где $a = w^T Q w,\ b = 2r^T Q w,\ c = r^T Q r$, причём $c > 0$.

2. Сведение проблемы поиска равновесия Нэша к системе уравнений и неравенств

Далее, не оговаривая особо, будем считать, что ограничения (2) совместны для всех $l = 1, \ldots, L$.

Рассмотрим задачу (7) для клиента l при фиксированных суммарных перевозках по всем дугам остальных клиентов. Эти суммарные перевозки составляют согласно (3) вектор $z^l = z - x^l$. Пусть

$$F^l(z^l, x^l) = G^l(z^l + x^l, x^l),$$

где G^l — функция, определенная правилом (6). Учитывая (4)–(6), имеем

$$F^l(z^l, x^l) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \big(z_j^l + x_j^l\big) x_j^l + \beta_j x_j^l. \tag{8}$$

При фиксированном z^l задача (7) приобретает вид задачи квадратичного программирования со строго выпуклой сепарабельной целевой функцией: найти x^l из условий

$$F^l(z^l, x^l) \to \min, \quad A x^l = b^l, \quad x^l \geqslant 0. \tag{9}$$

Обозначим через $f^l(z^l, x^l) = \nabla_{x^l} F^l(z^l, x^l)$ градиент целевой функции задачи (9). Согласно (8) компонентами этой вектор-функции будут функции

$$f_j^l\big(z_j^l, x_j^l\big) = 2\alpha_j x_j^l + \alpha_j z_j^l + \beta_j,\ j = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Поскольку $\alpha_j > 0$, при любом z_j^l значение f_j^l неограниченно возрастает с увеличением x_j^l. Поэтому задача (9) с любым заданным $z^l \geqslant 0$ имеет решение, причем решение всегда единственное.

Согласно условиям оптимальности Куна — Таккера для задачи минимизации дифференцируемой выпуклой функции при линейных ограничениях (см., например, [1, с. 234; 3, с. 95]) для того, чтобы вектор x^l был решением задачи (9), необходимо и достаточно выполнение условий

$$Ax^l = b^l,\ x^l \geqslant 0, \tag{11}$$

$$f^l(z^l, x^l) \geqslant A^T u^l, \tag{12}$$

$$(x^l)^T (f^l(z^l, x^l) - A^T u^l) = 0 \tag{13}$$

при некотором $u^l \in \mathbb{R}^m$. Вектор u^l состоит из множителей Лагранжа ограничений-равенств задачи (9).

С учётом условий $x^l \geqslant 0$ и (10), соотношения (12), (13) равносильны следующим:

$$2\alpha_j x_j^l + \alpha_j z_j^l + \beta_j \geqslant (A^T u^l)_j \text{ при } x_j^l = 0, \tag{14}$$

$$2\alpha_j x_j^l + \alpha_j z_j^l + \beta_j = (A^T u^l)_j \text{ при } x_j^l > 0 \tag{15}$$

для всех $j = 1, \ldots, n$. Условиями (14), (15) можно заменить ограничения (12), (13).

Учитывая, что $\alpha_j > 0,\ x^l \geqslant 0$, условия (14), (15) равносильны ограничению

$$2\alpha_j x_j^l = \big((A^T u^l)_j - \alpha_j z_j^l - \beta_j\big)_+, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Здесь $(\cdot)_+$ — операция срезки: $t_+ = \max\{0, t\}$ для любого вещественного t. Из определения операции срезки и неравенства $\alpha_j x_j^l \geqslant 0$ следует, что условие (16) можно записать в виде

$$\alpha_j x_j^l = ((A^T u^l)_j - \alpha_j z_j - \beta_j)_+, \tag{17}$$

где $z_j = z_j^l + x_j^l$.

На основе приведённого рассуждения получаем доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Векторы $x^1, x^2, \ldots, x^L$ составляют точку равновесия Нэша для рассматриваемой нелинейной транспортной модели в том и только том случае, если при некоторых векторах $u^l \in \mathbb{R}^m$, $l = 1, \ldots, L$, вы-*

полняются условия

$$Ax^l = b^l, \quad x^l \geqslant 0, \quad l = 1, \dots, L, \tag{18}$$

$$\alpha_j x_j^l = \left((A^T u^l)_j - \alpha_j \sum_{\tau=1}^{L} x_j^\tau - \beta_j \right)_+, \quad j = 1, \dots, n, \ l = 1, \dots, L. \tag{19}$$

Приведённая теорема сводит проблему поиска равновесия Нэша к задаче решения системы уравнений и неравенств (18), (19).

3. Представление проблемы поиска точки равновесия Нэша в виде задачи квадратичного программирования

Введём функции от векторов $x^l \in \mathbb{R}^n, \ u^l \in \mathbb{R}^m, \ l = 1, \dots, L,$

$$\Phi(x^1, \dots, x^L) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\left(\sum_{l=1}^{L} x_j^l \right)^2 + \sum_{l=1}^{L} \left(x_j^l \right)^2 \right),$$

$$\Lambda(u^1, \dots, u^L) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{i=1}^{n} b_i^l u_i^l,$$

$$g_j^l\left(x_j^1, \dots, x_j^L, u^l\right) = \alpha_j x_j^l + \alpha_j \sum_{\tau=1}^{L} x_j^\tau - (A^T u^l)_j + \beta_j,$$

$$j = 1, \dots, n, \ l = 1, \dots, L.$$

Рассмотрим задачу квадратичного программирования с переменными, составляющими векторы $x^l, \ u^l, \ l = 1, \dots, L$:

$$\Phi(x^1, \dots, x^L) - \Lambda(u^1, \dots, u^L) \to \min \tag{20}$$

при ограничениях

$$g_j^l\left(x_j^1, \dots, x_j^L, u^l\right) \geqslant 0, \tag{21}$$

$$x_j^l \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, n, \ \ l = 1, \dots, L. \tag{22}$$

Заметим, что ограничения (21), (22) непротиворечивые. В частности, им удовлетворяют значения $u^l = 0, \ l = 1, \dots, L$, и $x_j^l = (-\beta_j/\alpha_j)_+, \ j = 1, \dots, n, \ l = 1, \dots, L$. Поэтому задача (20)–(22) может не иметь решения только из-за того, что ее целевая функция не ограничена снизу на множестве допустимых по ограничениям (21), (22) решений, т. е. только из-за того, что существует рецессивное направление, при перемещении по которому со сколь угодно большим шагом будем оставаться в области допустимых решений и при этом целевая функция будет неограниченно убывать с увеличением шага.

Из леммы 2 следует, что функция Φ является строго выпуклой и согласно комментариям к этой лемме перемещение $x^l + \lambda s^l$ по какому-либо направлению $s^l \in \mathbb{R}^n$, $s^l \neq 0$, от вектора x^l приведет с ростом шага λ к увеличению целевой функции. Причем это увеличение будет выражаться в виде квадратичной функции от шага. В то же время перемещение по какому-либо направлению от вектора u^l может давать лишь линейное уменьшение функции Λ с ростом шага. Поэтому рецессивное направление, не выводящее из области допустимых решений, возможно только по переменным, составляющим вектор u^l, $l = 1, \dots, L$.

Предположим, что существует рецессивное направление по векторам u^l, не выводящее из области допустимых решений. Пусть при некотором l для вектора v

$$(b^l, v) > 0 \tag{23}$$

и при этом

$$-(A^T v)_j \geqslant 0, \;\; j = 1, \dots, n. \tag{24}$$

Условие (24) гарантирует, что при перемещении от вектора u^l в направлении v с любым неотрицательным шагом будем оставаться в области допустимых решений по условиям (21), (22).

Согласно лемме 1 выполнение соотношений (23), (24) означает противоречивость условия (2) для даннного l. Итак, доказана следующая

Теорема 2. *Если ограничения* (2) *непротиворечивы для всех* $l = 1, \dots, L$, *то задача* (20)–(22) *имеет оптимальное решение. Причём это решение в силу строгой выпуклости функции* Φ *будет единственным для векторов* x^l, $l = 1, \dots, L$.

Теперь докажем, что задача (20)–(22) равносильна системе уравнений и неравенств (18), (19).

Из определений функций Φ, Λ, g_j^l следует, что

$$\frac{d\Phi}{dx_j^l} = \alpha_j \sum_{\tau=1}^{L} x_j^\tau + \alpha_j x_j^l, \;\; j = 1, \dots, n, \; l = 1, \dots, L,$$
$$\frac{d\Lambda}{du_i^l} = b_i^l, \;\; i = 1, \dots, m, \; l = 1, \dots, L,$$

$$\frac{dg_k^\tau}{dx_j^l} = 0, \quad k \neq j, \ \tau = 1, \ldots, L, \ l = 1, \ldots, L, \tag{25}$$

$$\frac{dg_j^\tau}{dx_j^l} = \alpha_j, \quad j = 1, \ldots, n, \ \tau \neq l,$$

$$\frac{dg_j^l}{dx_j^l} = 2\alpha_j, \quad j = 1, \ldots, n, \ l = 1, \ldots, L,$$

$$\frac{dg_j^\tau}{du_i^l} = 0, \quad \tau \neq l, \ j = 1, \ldots, n, \ i = 1, \ldots, m, \tag{26}$$

$$\frac{dg_j^l}{du_i^l} = -a_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n, \ i = 1, \ldots, m, \ l = 1, \ldots, L.$$

Согласно условиям оптимальности Куна – Таккера [1, с. 234] для того, чтобы векторы $x^l, u^l, \ l = 1, \ldots, L$, составляли оптимальное решение задачи (20)–(22), необходимо и достаточно выполнения условий (21), (22) и соотношений

$$-\frac{d\Lambda}{du_i^l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{dg_j^l}{du_i^l} y_j^l, \quad i = 1, \ldots, m, \ l = 1, \ldots, L, \tag{27}$$

$$\frac{d\Phi}{dx_j^l} \geqslant \sum_{\tau=1}^{L} \frac{dg_j^\tau}{dx_j^l} y_j^\tau, \quad j = 1, \ldots, n, \ l = 1, \ldots, L, \tag{28}$$

$$x_j^l \left(\frac{d\Phi}{dx_j^l} - \sum_{\tau=1}^{L} \frac{dg_j^\tau}{dx_j^l} y_j^\tau \right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \ l = 1, \ldots, L, \tag{29}$$

$$y_j^l g_j^l \bigl(x_j^1, \ldots, x_j^L, u^l\bigr) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \ l = 1, \ldots, L, \tag{30}$$

при некоторых величинах

$$y_j^l \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n, \ l = 1, \ldots, L. \tag{31}$$

Величины y_j^l являются множителями Лагранжа ограничений (21). Соотношения (29), (30) принято называть *условиями дополняющей нежёсткости*. Отметим, что при записи условий оптимальности в соотношениях (27)–(29) учтены равенства (25), (26), т. е. функции, тождественно равные нулю, исключены из этих соотношений.

Докажем, что условия (28), (29) при выполнении неравенств (22), (31) равносильны равенству

$$y_j^l = x_j^l, \quad j = 1, \ldots, n, \ l = 1, \ldots, L. \tag{32}$$

Условия (28), (29) можно представить в виде

$$\alpha_j \sum_{\tau=1}^{L} x_j^\tau + \alpha_j x_j^l \geqslant \alpha_j \sum_{\tau=1}^{L} y_j^\tau + \alpha_j y_j^l, \quad j = 1, \ldots, n, \ l = 1, \ldots, L, \tag{33}$$

и при этом

$$\alpha_j \sum_{\tau=1}^{L} x_j^\tau + \alpha_j x_j^l = \alpha_j \sum_{\tau=1}^{L} y_j^\tau + \alpha_j y_j^l, \text{ если } x_j^l > 0. \tag{34}$$

Если справедливо равенство (32), то неравенство (33) выполняется как равенство и, следовательно, справедливо (34).

Требуется установить обратное: если для неотрицательных величин x_j^l, y_j^l выполняются условия (33), (34), то справедливо равенство (32).

Просуммировав правую и левую части неравенства (33) по $l = 1, \ldots, L$ и разделив полученное выражение на положительную величину α_j, получаем

$$(L+1) \sum_{l=1}^{L} x_j^l \geqslant (L+1) \sum_{l=1}^{L} y_j^l, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{35}$$

Пусть $I(j)$ — множество номеров $l \in \{1, \ldots, L\}$ таких, что $x_j^l > 0$. Если $I(j) = \varnothing$, т. е. все x_j^l нулевые при $l = 1, \ldots, L$ для данного j, то $\sum\limits_{l=1}^{L} x_j^l = 0$ и вследствие (31), (35) будет $\sum\limits_{l=1}^{L} y_j^l = 0$. Из неотрицательности y_j^l следует, что в этом случае $y_j^l = 0$ для всех $l = 1, \ldots, L$, т. е. для такого j выполняется равенство (32).

Рассмотрим оставшуюся альтернативу $I(j) \neq \varnothing$. Пусть K — число номеров в $I(j)$. Просуммируем правую и левую части равенства (34) по $l \in I(j)$ и разделим на положительную величину α_j. Имеем

$$(K+1) \sum_{l=1}^{L} x_j^l = K \sum_{l=1}^{L} y_j^l + \sum_{l \in I(j)} y_j^l \leqslant (K+1) \sum_{l=1}^{L} y_j^l.$$

Получаем неравенство

$$\sum_{l=1}^{L} x_j^l \leqslant \sum_{l=1}^{L} y_j^l.$$

Из этого неравенства и (35) следует, что

$$\sum_{l=1}^{L} x_j^l = \sum_{l=1}^{L} y_j^l. \tag{36}$$

Из (34), (36) получаем, что $x_j^l = y_j^l$ для $l \in I(j)$. Из (33) и (36) следует, что величина y_j^l не может быть положительной, если $x_j^l = 0$. Равенство (32) доказано.

Условие (27) с учётом (32) приобретает вид $-Ax^l = -b^l, l = 1, \ldots, L$. Условия (21) и (30) совпадают с условием (19). Итак, доказано, что условия оптимальности (21), (22), (27)–(31) равносильны системе (18), (19). Справедлива

Теорема 3. *Задача квадратичного программирования* (20)–(22) *имеет решение в том и только том случае, если имеет решение система уравнений и неравенств* (18), (19). *Причём если задача* (20)–(22) *и система* (18), (19) *имеют решения, то эти решения совпадают.*

Из этой теоремы и теорем 1, 2 вытекает существование равновесия Нэша для нелинейной транспортной модели с линейно возрастающими функциями тарифов от объёмов перевозок, если все клиенты имеют допустимые планы перевозок. Причём из теоремы 2 следует единственность равновесия Нэша. В силу того, что у матрицы инциденций A строки линейно зависимы, векторы множителей Лагранжа u^l имеют неединственное значение. Если u^l — вектор множителей Лагранжа ограничений l-го клиента, то вектор $\widetilde{u}^l$ с компонентами $\widetilde{u}_i^l = u_i^l + c,\ i = 1, \ldots, m$, где c — какая-либо константа, также будет вектором множителей Лагранжа балансовых ограничений клиента l.

В [4] дано доказательство существования равновесия Нэша в нелинейной транспортной модели для более широкого класса зависимостей тарифов от объёмов перевозок. Это доказательство основывалось на теореме Брауэра о неподвижной точке. Этот традиционный способ доказательства существования равновесия Нэша не даёт конструктивного пути вычисления точки равновесия. Изложенный в данной статье способ доказательства, основанный на сведении задачи поиска равновесия Нэша к решению системы уравнений и неравенств и задаче квадратичного программирования, даёт конструктивный путь вычисления этого равновесия. Естественно, многие алгоритмы решения задачи квадратичного программирования (20)–(22) можно интерпретировать как имитацию процесса согласования решений (объёмов перевозок, тарифов по отдельным дугам) между клиентами транспортной сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев Ф. П.** Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

2. **Гейл Д.** Теория линейных экономических моделей. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 418 с.
3. **Зоркальцев В. И., Киселева М. А.** Системы линейных неравенств: учебное пособие. Иркутск: Изд-во Иркутск. гос. ун-та, 2007. — 127 с.
4. **Зоркальцев В. И., Киселева М. А.** Равновесие Нэша в нелинейной транспортной модели // Оптимизация, управление, интеллект. — Иркутск: Изд-во ИДСТУ, 2007. — №1(13). — С. 33–41.
5. **Полак Э.** Численные методы оптимизации. Единый подход. — М.: Мир, 1974. — 376 с.

Зоркальцев Валерий Иванович,
e-mail: zork@isem.sei.irk.ru

Киселева Марина Александровна,
e-mail: marinee@mail.ru

Статья поступила
14 февраля 2008 г.

Переработанный вариант —
3 апреля 2008 г.