ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2008. Том 15, № 3. 58–64

УДК 519.87

ОПТИМИЗАЦИЯ ЦИРКУЛЯНТНЫХ СЕТЕЙ СВЯЗИ РАЗМЕРНОСТИ ЧЕТЫРЕ*)

Э. А. Монахова

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации циркулянтных сетей, состоящая в максимизации числа вершин при заданных степени и диаметре графа. Улучшена на $O(\frac{3}{2}d^3)$ оценка максимально достижимого числа вершин циркулянтных сетей размерности четыре и любого нечётного диаметра $d > 1$. Построено семейство циркулянтных сетей, достигающих найденной оценки.

Ключевые слова: циркулянтные сети, диаметр, максимальный порядок графа.

Введение

Дадим некоторые определения. Пусть N — число вершин графа и $S = \{1 \leqslant s_1 < \ldots < s_k < N\}$ — множество k целых чисел (образующих). Неориентированный граф $G(N; s_1, \ldots, s_k)$ с множеством вершин $V = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ и множеством рёбер

$$E = \{(v, v \pm s_i (\bmod\ N)) \mid v \in V, i = \overline{1, k}\}$$

называется *циркулянтным*, k — его *размерностью*. *Диаметром* графа $G(N; S)$ называется $d(N; S) = \max_{i,j \in V} d(i,j)$, где $d(i,j)$ — длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j (диаметр оценивает максимальную структурную задержку в сети). Для любых натуральных d и k пусть $M(d,k)$ обозначает максимально возможное (достижимое) натуральное N такое, что существует множество образующих $S = \{1, s_2, \ldots, s_k\}$, при котором $d(N; S) \leqslant d$. В данной работе будем исследовать циркулянтные сети размерности четыре с единичной образующей.

В работах [1, 2, 4] можно найти обзоры известных результатов по оценкам диаметра и достижимого порядка циркулянтных графов. В [7] показано, что

$$M(d,k) \leqslant 1 + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i C_d^{k-i} 2^{k-i},$$

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08–01–00857).

© 2008 Монахова Э. А.

получена нижняя граница диаметра для любых N и k порядка $\frac{1}{2}(k!)^{1/k}N^{1/k}$ и доказано, что $d(N;1,t,\ldots,t^{k-1}) = k(t-1)/2 = (k/2)N^{1/k} - k/2$ для $N = t^k$, где t — нечётное число. В частности, для размерности четыре полученное семейство циркулянтных сетей имеет соотношение $N/d = \frac{d^3}{16} + O(d^2)$, где d — диаметр. В [3] построено следующее семейство циркулянтных сетей размерности $k \geqslant 3$: графы $G(N;S)$, где $N = 2q\sum\limits_{i=0}^{k-1}(4q)^i$, $S = \{1, 4q, \ldots, (4q)^{k-1}\}$, $q = \lfloor (d-k+3)/k \rfloor$, с диаметром меньшим или равным d, $d \geqslant k$. Отсюда для размерности четыре $N/d = \frac{d^3}{2} - \frac{3d^2}{2} + O(d)$. В [5] с помощью метода эволюционного синтеза экспериментально получены некоторые циркулянты вида $G(N;1,t,t^2,t^3)$ с соотношением N/d, лучшим, чем ранее известные. Отметим также работу [6], в которой рассмотрены свойства циркулянтных графов вида $G(N;1,t,\ldots,t^{k-1})$, где t — нечётное число и $2t^{k-1} < N \leqslant t^k$, и дан их диаметр:

$$d(N;1,t,\ldots,t^{k-1}) = (k-1)(t-1)/2 + \lceil (N - t^{k-1})/(2t^{k-1}) \rceil.$$

В [6] показано, что циркулянтные сети, у которых значения образующих представлены в виде степеней нечётного числа, имеют простой алгоритм парной маршрутизации и эффективны относительно трассировки интегральных схем, живучести и отказоустойчивости. Циркулянтные сети широко изучаются при проектировании и анализе вычислительных систем, в теории графов и дискретной математике, в качестве базовой основы структуры для мультипроцессорных и мультикластерных систем и компьютерных сетей [1, 2, 4].

В нашей статье улучшена нижняя граница для экстремальной функции $M(d,k)$ при $k = 4$ и построено достигающее ее семейство циркулянтных сетей размерности четыре, превосходящее по соотношению N/d семейства циркулянтов, полученные в [2, 3, 5–7]. Доказана теорема о максимально возможном числе вершин графов найденного семейства для нечётного диаметра d и с образующими, представленными в виде степеней d. Исследование этих графов позволило скорректировать формулу для диаметра, полученную в [6], для графов размерности четыре.

1. Циркулянтные сети степени 8

Рассмотрим множество циркулянтных сетей вида $G(N;1,d,d^2,d^3)$, где $d > 1$ — нечётное число. В теоремах 1 и 2 представлено бесконечное семейство рассматриваемых сетей, которое существенно улучшает

известные оценки достижимого порядка. Из доказательства теоремы 1 следует также, что общая формула для диаметра, данная в [6], опровергается для $k = 4$ и $d > 3$ найденным семейством графов и поэтому может быть только верхней границей диаметра. Ниже $D(x)$, $0 \leqslant x < N$, обозначает длину кратчайшего пути из вершины 0 в вершину x.

Теорема 1. *Для любого нечётного* $d > 1$

$$M(d,4) \geqslant (d^4+1)/2 + d^2 + d.$$

Доказательство. Рассмотрим циркулянтный граф $G(N; 1, d, d^2, d^3)$, где $N = (d^4+1)/2 + d^2 + d$ и $d > 1$ — нечётное число, и покажем, что его диаметр равен d. Представим N в виде

$$N = \frac{d-1}{2}d^3 + \frac{d+1}{2}(d^2+d+1). \tag{1}$$

Для любой вершины $0 \leqslant x < N$ имеем $x = id^3 + jd^2 + kd + l$, где

$$l \equiv x (\bmod\ d), \quad k \equiv \frac{1}{d}(x-l)(\bmod\ d),$$

$$j \equiv \frac{1}{d^2}(x-l-kd)(\bmod\ d), \quad i \equiv \frac{1}{d^3}(x-l-kd-jd^2)(\bmod\ d),$$

$$0 \leqslant i \leqslant \frac{d+1}{2},\ |j| \leqslant \frac{d-1}{2},\ |k| \leqslant \frac{d-1}{2},\ |l| \leqslant \frac{d-1}{2}.$$

Параметры (i,j,k,l) являются координатами кратчайшего пути из 0 в x прямого направления — пути, в который максимальная образующая входит со знаком плюс. Длина этого пути $D^+(x) = |i| + |j| + |k| + |l|$. Обозначим через (i', j', k', l') координаты кратчайшего пути из 0 в вершину $x - N$ обратного направления — пути, в который максимальная образующая входит со знаком минус. Тогда длина этого пути $D^-(x-N)$ равна $|i'| + |j'| + |k'| + |l'|$. Для любой вершины $0 \leqslant x < N$ длина оптимального пути $D(x)$ не больше $\min\{D^+(x), D^-(x-N)\}$. Докажем, что $D^+(x) + D^-(x-N) \leqslant 2d+1$ для любого $0 \leqslant x < N$.

Рассмотрим вершину id^3, $0 \leqslant i \leqslant \frac{d+1}{2}$. Для всех вершин множества

$$id^3 - \frac{d-1}{2}(d^2+d+1) \leqslant x \leqslant id^3 + \frac{d-1}{2}(d^2+d+1)$$

кратчайшие пути из 0 в x прямого направления проходят через вершину id^3. Разобьем это множество на две области:

$$\text{(i)} \quad id^3 - \frac{d-1}{2}(d^2+d+1) \leqslant x \leqslant id^3 + d^2 + d$$

и

$$\text{(ii)}\quad id^3 + d^2 + d + 1 \leqslant x \leqslant id^3 + \frac{d-1}{2}(d^2 + d + 1).$$

Для всех вершин области (i) кратчайшие пути обратного направления из 0 в $x-N$ проходят через вершину $-\bigl(\frac{d+1}{2}-i\bigr)d^3$, для всех вершин области (ii) — через вершину $-\bigl(\frac{d-1}{2}-i\bigr)d^3$. Соответственно, используя (1), имеем два представления для вершины $x-N$:

$$x - N = \begin{cases} -\bigl(\frac{d+1}{2}-i\bigr)d^3 + \bigl(\frac{d-1}{2}+j\bigr)d^2 - \bigl(\frac{d+1}{2}-k\bigr)d - \bigl(\frac{d+1}{2}-l\bigr) \\ \hfill \text{при } x \in (i), \\ -\bigl(\frac{d-1}{2}-i\bigr)d^3 - \bigl(\frac{d+1}{2}-j\bigr)d^2 - \bigl(\frac{d+1}{2}-k\bigr)d - \bigl(\frac{d+1}{2}-l\bigr) \\ \hfill \text{при } x \in (ii). \end{cases} \tag{2}$$

Находим условия, при которых в (2) коэффициенты при образующих $s_1 = 1$, $s_2 = d$ и $s_3 = d^2$ не превышают по модулю числа $\frac{d-1}{2}$. В противном случае, если, например, $\frac{d+1}{2} - l > \frac{d-1}{2}$, то в (2) заменяем $-\bigl(\frac{d+1}{2}-l\bigr)$ на $-d + \bigl(\frac{d-1}{2}+l\bigr)$, где $\bigl|\frac{d-1}{2}+l\bigr| \leqslant \frac{d-1}{2}$. Аналогично, если $\frac{d+1}{2} - k > \frac{d-1}{2}$, то в (2) заменяем $-\bigl(\frac{d+1}{2}-k\bigr)d$ на $-d^2 + \bigl(\frac{d-1}{2}+k\bigr)d$, где $\bigl|\frac{d-1}{2}+k\bigr| \leqslant \frac{d-1}{2}$. Коэффициенты и условия, при которых они получаются, представлены в таблице.

Используя таблицу, показываем, что $|i| + |j| + |k| + |l| + |i'| + |j'| + |k'| + |l'| \leqslant 2d + 1$ для любой вершины $0 \leqslant x < N$. Следовательно, или $D^+(x) \leqslant d$, или $D^-(x-N) \leqslant d$. Остается показать, что существует хотя бы одна вершина x такая, что $D(x) = d$. Возьмём вершину

$$x_1 = 2d^2 - \frac{d-1}{2}(d+1).$$

Имеем $D^+(x_1) = d+1$, и x_1 — минимальная вершина с $D^+(x) = d+1$. Учитывая, что

$$x_1 - N = -\frac{d-1}{2}d^3 - \frac{d-1}{2}d^2 - d, \tag{3}$$

получаем $D^-(x_1 - N) = d$. Так же можно показать, что длины других возможных путей из 0 в x_1 больше либо равны d. Отсюда $D(x_1) = d$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Максимальный порядок циркулянтного графа $G(N; 1, d, d^2, d^3)$ диаметра d, где $d > 1$ — нечётное число, равен*

$$M = (d^4 + 1)/2 + d^2 + d.$$

Доказательство. Рассмотрим циркулянтный граф $G(N; 1, d, d^2, d^3)$ диаметра d, где $d > 1$ — нечётное число и $N \geqslant M$. Пусть $p = \lfloor \frac{N}{d^3} \rfloor$, тогда $N = pd^3 + r$, где $0 \leqslant r < d^3$. В силу (1) для $N = M$ значение p равно $\frac{d-1}{2}$.

Т а б л и ц а

i'	j'	k'	l'	
$-\left(\frac{d+1}{2}-i\right)$	$\frac{d-1}{2}+j$	$-\left(\frac{d+1}{2}-k\right)$	$-\left(\frac{d+1}{2}-l\right)$	$-\frac{d-1}{2}\leqslant j\leqslant 0,$ $1\leqslant k\leqslant \frac{d-1}{2},$ $1\leqslant l\leqslant \frac{d-1}{2}$
$-\left(\frac{d+1}{2}-i\right)$	$\frac{d-1}{2}+j$	$-\left(\frac{d+3}{2}-k\right)$	$\frac{d-1}{2}+l$	$-\frac{d-1}{2}\leqslant j\leqslant 0,$ $2\leqslant k\leqslant \frac{d-1}{2},$ $-\frac{d-1}{2}\leqslant l\leqslant 0$
$-\left(\frac{d+1}{2}-i\right)$	$\frac{d-3}{2}+j$	$\frac{d-1}{2}+k$	$-\left(\frac{d+1}{2}-l\right)$	$-\frac{d-1}{2}\leqslant j\leqslant 1,$ $-\frac{d-1}{2}\leqslant k\leqslant 0,$ $1\leqslant l\leqslant \frac{d-1}{2}$
$-\left(\frac{d+1}{2}-i\right)$	$\frac{d-3}{2}+j$	$\frac{d-3}{2}+k$	$\frac{d-1}{2}+l$	$-\frac{d-1}{2}\leqslant j\leqslant 1,$ $-\frac{d-1}{2}\leqslant k\leqslant 1,$ $-\frac{d-1}{2}\leqslant l\leqslant 0$
$-\left(\frac{d-1}{2}-i\right)$	$-\left(\frac{d+1}{2}-j\right)$	$-\left(\frac{d+1}{2}-k\right)$	$-\left(\frac{d+1}{2}-l\right)$	$1\leqslant j\leqslant \frac{d-1}{2},$ $1\leqslant k\leqslant \frac{d-1}{2},$ $1\leqslant l\leqslant \frac{d-1}{2}$
$-\left(\frac{d-1}{2}-i\right)$	$-\left(\frac{d+1}{2}-j\right)$	$-\left(\frac{d+3}{2}-k\right)$	$\frac{d-1}{2}+l$	$1\leqslant j\leqslant \frac{d-1}{2},$ $2\leqslant k\leqslant \frac{d-1}{2},$ $-\frac{d-1}{2}\leqslant l\leqslant 0$
$-\left(\frac{d-1}{2}-i\right)$	$-\left(\frac{d+3}{2}-j\right)$	$\frac{d-1}{2}+k$	$-\left(\frac{d+1}{2}-l\right)$	$2\leqslant j\leqslant \frac{d-1}{2},$ $-\frac{d-1}{2}\leqslant k\leqslant 0,$ $1\leqslant l\leqslant \frac{d-1}{2}$
$-\left(\frac{d-1}{2}-i\right)$	$-\left(\frac{d+3}{2}-j\right)$	$\frac{d-3}{2}+k$	$\frac{d-1}{2}+l$	$2\leqslant j\leqslant \frac{d-1}{2},$ $-\frac{d-1}{2}\leqslant k\leqslant 1,$ $-\frac{d-1}{2}\leqslant l\leqslant 0$

Рассмотрим следующее множество вершин из G:

$$X=\left\{x_1,\ x_2=x_1+d-1,\ x_3=x_4-d+1,\ x_4=d^3-d^2+\frac{d-1}{2}(d+1)\right\}.$$

Все вершины $x\in X$ имеют $D^+(x)=d+1$. В графе с $N=M$ будет $D(x)=D^-(x-M)=d$ для $x\in X$.

1. Пусть $N=N_1$ и $\left\lfloor\frac{N_1}{d^3}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{M}{d^3}\right\rfloor$. Тогда $N_1\leqslant M$, так как в силу (3) при построении пути из 0 в x_1-M уже использован максимально возможный кратчайший путь длины d.

2. Пусть $N > M$ и $p = \left\lfloor \frac{N}{d^3} \right\rfloor \geqslant \frac{d+1}{2}$. Чтобы обеспечить требуемый диаметр d, вершина r должна находиться между вершинами x_1 и x_4 и должны существовать по крайней мере пути из вершины r во все вершины $x \in X$ длины не большей $d-p \leqslant \frac{d-1}{2}$. Так как $x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = d-1$, то это условие эквивалентно следующему: должны существовать по крайней мере пути длины не большей $\frac{d-3}{2}$ из вершины r в вершины r_1 и r_2, где r_1 — это x_2+1 или x_1-1, а r_2 — это x_4+1 или x_3-1. Но такое невозможно, потому что при любом из четырех возможных значений $r_2 - r_1$ из множества

$$\Big\{x_4 - x_2 = \frac{d-1}{2}d^2 + \frac{d-3}{2}d^2 - d,\ x_3 - x_1 = \frac{d-1}{2}d^2 + \frac{d-3}{2}d^2 - d,$$
$$x_3 - x_2 - 2 = \frac{d-1}{2}d^2 - 1 + \frac{d-3}{2}d^2 - 2d,$$
$$x_4 - x_1 + 2 = \frac{d-1}{2}d^2 + \frac{d-3}{2}d^2 + 1\Big\},$$

невозможно обеспечить требуемые пути длины $\leqslant \frac{d-1}{2}$ во все вершины $x \in X$. Таким образом, диаметр G больше d. Теорема 2 доказана.

Для дальнейших исследований представляет интерес улучшение оценок достижимого порядка циркулянтных графов размерностей $k \geqslant 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Монахов О. Г., Монахова Э. А.** Параллельные системы с распределенной памятью: структуры и организация взаимодействий. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. — 242 с.
2. **Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D. F.** Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distributed Comput. — 1995. — Vol. 24. — P. 2–10.
3. **Chen S., Jia X.-D.** Undirected loop networks // Networks. — 1993. — Vol. 23. — P. 257–260.
4. **Hwang F. K.** A survey on multi-loop networks // Theoretical Computer Science. — 2003. — Vol. 299. — P. 107–121.
5. **Monakhov O. G., Monakhova E. A.** Computer discovery of analytical descriptions of families of circulant networks // Proc. of the 6th International conference on soft computing and measurements, SCM'2003 (St.-Petersburg, Russia, 2003). — С.-Петербург: СПТУ, 2003. — Vol. 1. — P. 345–348.
6. **Parhami B.** Chordal rings based on symmetric odd-radix number systems // Proc. International conference on communications in computing (Las Vegas, NV, June 27–30, 2005). — Los Alamitos: IEEE Press, 2005. — P. 196–199.

7. **Wong C. K., Coppersmith D.** A combinatorial problem related to multimodule memory organizations // J. Assoc. Comput. Mach. — 1974. — Vol. 21. — P. 392–402.

Монахова Эмилия Анатольевна,
e-mail: emilia@rav.sscc.ru

Статья поступила
14 февраля 2008 г.

Переработанный вариант —
5 мая 2008 г.