ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2008. Том 15, № 3. 65–73

УДК 519.178

КЛАССИФИКАЦИЯ НЕБОЛЬШИХ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ ПО ПЛОЩАДИ И ПЕРИМЕТРУ*)

Ш. Оде, П. Хансен, Ф. Мессин

Аннотация. Показано, что, начиная с пятиугольников, площадь правильного выпуклого n-угольника с единичным диаметром больше площади аналогичного $(n+1)$-угольника для каждого нечётного числа n. Более того, начиная с семиугольников, разность между площадями уменьшается при возрастании n. Аналогичные свойства справедливы и для периметра. Приводится новое доказательство результата Рейнхардта.

Ключевые слова: многоугольник, диаметр, площадь, периметр.

Введение

Экстремальные задачи на выпуклых многоугольниках изучались ещё древними греками (см. подробнее в [5, 6, 9, 15, 16, 3]). Три следующие задачи являются центральными в этих исследованиях.

P_1. Какова максимальная площадь выпуклого n-угольника с фиксированным периметром?

P_2. Какова максимальная площадь выпуклого n-угольника с фиксированным диаметром?

P_3. Каков максимальный периметр выпуклого n-угольника с фиксированным диаметром?

Задача P_1 решена Зенодорусом (Zenodorus) во втором веке до н. э. (неявно предполагалось существование решения): правильный n-угольник имеет максимальную площадь при всех n. Доказательство Зенодоруса и многочисленные доказательства последующих авторов, использующие многообразие приёмов, представлены в [5].

Для задачи P_2 фундаментальный результат получен Рейнхардтом (Reinhardt) в 1922 г. [17]: при нечётных n правильный n-угольник имеет максимальную площадь среди всех n-угольников одного диаметра. Более

*) Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке NSERC (грант 239436–01), AFOSR (грант F49620–01–1–0013) и ExxonMobil; второго автора — NSERC (грант 239436–01).

того, при любом чётном $n \geqslant 6$ правильный n-угольник *не* имеет максимальной площади. Грехэмом (Graham) [13] найден шестиугольник фиксированного диаметра и максимальной площади, которая примерно на 3,92% больше площади правильного шестиугольника. Используя геометрические соображения и алгоритм невыпуклого квадратичного программирования [1], в [4] найден экстремальный восьмиугольник, площадь которого примерно на 2,79% больше площади правильного восьмиугольника. Многие авторы получили с помощью пакетов нелинейного программирования таких, как LANCELOT [8] и SNOPT [12], эвристические решения для чётных n. Численные эксперименты из [7, 10, 11] собраны в [3]. Чтобы ограничить ошибки, Моссингхоф (Mossinghoff) [15, 16] рассмотрел лишь n-угольники с конкретным диаметром и конфигурацией, введённой в [13], т. е. $(n-1)$-звёздные многоугольники с висячим ребром. Затем в предположении осевой симметрии и равенства некоторых углов между диаметрами получены n-угольники с площадью, очень близкой к оптимальной. А именно показано, что при больших n полученные площади не могут быть улучшены более чем на c_1/n^3, где c_1 — константа.

Для задачи P_3 Рейнхардт [17] доказал, что правильные n-угольники имеют экстремальный периметр в тех же случаях, когда они имеют экстремальную площадь: при нечётных n правильный n-угольник имеет максимальный периметр среди всех n-угольников одного диаметра. Более того, если n имеет нечётный сомножитель $m \geqslant 3$, то n-угольник максимального периметра может быть получен следующим образом: (a) построить правильный m-угольник; (b) преобразовать его в многоугольник Рюло (Reuleaux), проводя дугу окружности с центром в каждой вершине через вершины противоположной стороны; (c) добавить $\frac{n}{m} - 1$ вершин с равным интервалом на каждую из m дуг; (d) взять выпуклую оболочку вершин, полученных на шагах (a) и (c).

В остальных случаях n является степенью 2. Тамвакис (Tamvakis) [18] определил четырёхугольник с фиксированным диаметром и максимальным периметром, который примерно на 7,31% больше периметра квадрата. В [2] с использованием геометрических соображений и интервального алгоритма глобальной оптимизации из [14] найден экстремальный восьмиугольник, периметр которого примерно на 1,96% больше периметра правильного восьмиугольника. Для больших степеней числа 2 Моссингхоф [15, 16] рассмотрел многоугольники с конкретным диаметром и конфигурацией из [18] и, вновь предположив осевую симметрию и равенство некоторых углов между диаметрами, получил n-угольники с периметром, очень близким к оптимальному. Действительно, для боль-

ших n полученные периметры нельзя улучшить более чем на c_2/n^5, где c_2 — константа.

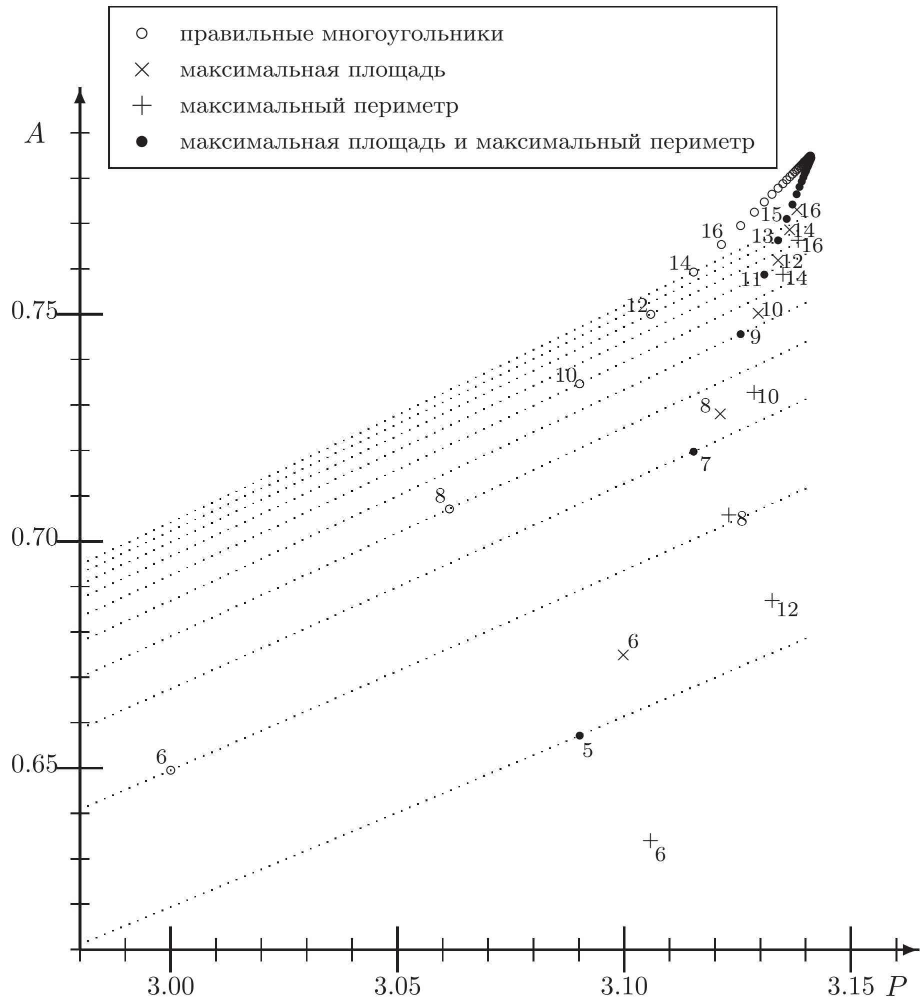

Рис. Зависимость площади A от периметра P правильных и оптимальных многоугольников

Площади и периметры правильных и оптимальных многоугольников при $n \geqslant 5$ представлены на рисунке. Максимальные значения площадей многоугольников единичного диаметра для n нечётных [17], для $n = 6$ [13], для $n = 8$ [4] и для $n = 10, 12, 14, 16, 18, 20$ [15] (без доказательства) помечены $\times$. Максимальные значения периметров для n, содержащих нечётный сомножитель [17], для $n = 8$ [2] и для $n = 16$ [15] помечены $+$. Значения для правильных многоугольников помечены $\circ$. Для простоты

правильные многоугольники, у которых максимальны как площадь, так и периметр (т. е. многоугольники, которые следовало бы помечать всеми тремя символами $\circ$, $\times$ и $+$), помечены $\bullet$.

Все эти многоугольники удовлетворяют известному неравенству $P \geqslant 2\sqrt{nA\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}$, ограничивающему периметр P n-угольника площади A, что представлено пунктирными кривыми на этом рисунке.

Этот рисунок интуитивно приводит к следующим наблюдениям: (i) начиная с пятиугольников, площадь правильного выпуклого n-угольника с единичным диаметром больше площади выпуклого $(n+1)$-угольника с единичным диаметром для нечётных n; (ii) начиная с семиугольника, разность площадей последовательных многоугольников уменьшается с ростом n. Цель статьи — доказать эти свойства вместе с аналогичными для периметров. В результате получено новое очень простое доказательство теоремы Рейнхардта [17].

1. Площади небольших правильных многоугольников

Грэхем [13] называет *небольшим* многоугольник с единичным диаметром, т. е. многоугольник, самая длинная диагональ которого равна единице. Обозначим через A_n^r площадь правильного небольшого n-угольника, т. е. многоугольника, у которого все стороны имеют одинаковую длину и все внутренние углы равны между собой.

Известно, что

$$A_n^r = \begin{cases} \dfrac{n}{8}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \leqslant A_{n+2}^r \text{ при чётном } n = 2k, \\ \dfrac{n}{8}\dfrac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \leqslant A_{n+2}^r \text{ при нечётном } n = 2k+1, \end{cases}$$

где $k \geqslant 2$.

Таблица

n	A_n^r	P_n^r	n	A_n^r	P_n^r
3	0,4330127020	3	4	0,5	2,828427124
5	0,6571638900	3,090169944	6	0,6495190530	3
7	0,7197409265	3,115293076	8	0,7071067810	3,061467460
9	0,7456192318	3,125667199	10	0,7347315655	3,090169944
11	0,7587484457	3,130926443	12	0,75	3,105828541
13	0,7663089267	3,133953688	14	0,7592965438	3.115293076

В таблице представлены площадь и периметр небольших правильных n-угольников для значений n от 3 до 14.

Последовательность площадей не монотонна, но подчиняется следующему правилу. Оказывается, при $n \geqslant 5$ значения A_n^r поочередно увеличиваются и уменьшаются с ростом n, как показано в дальнейшем.

Теорема 1. *$A_{2k-1}^r > A_{2k}^r$ при всех целых $k \geqslant 3$.*

Доказательство. Распространим функции площади на действительные числа:

$$A^e(x) \;=\; \frac{x}{8}\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) \quad \text{и} \quad A^o(x) \;=\; \frac{x}{8}\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2x}\right)}. \tag{1}$$

Определим нижнюю и верхнюю границы sin и $\cos^2$, пользуясь разложениями Тейлора. Элементарные вычисления приводят к тому, что

$$\begin{aligned} s_\ell(a) = a - \frac{a^3}{6} \; &< \sin(a) < \; s_u(a) = a - \frac{a^3}{6} + \frac{a^5}{120}, \\ c_\ell(a) = 1 - a^2 \; &< \cos^2(a) < \; c_u(a) = 1 - a^2 + \frac{a^4}{3} \end{aligned} \tag{2}$$

при любом $a > 0$. Это позволяет получить строгие границы для функции площади. При любом $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned} A_\ell^e(x) = \frac{xs_\ell\left(\frac{2\pi}{x}\right)}{8} \; &< A^e(x) < \; A_u^e(x) = \frac{xs_u\left(\frac{2\pi}{x}\right)}{8} \\ A_\ell^o(x) = \frac{xs_\ell\left(\frac{\pi}{2x}\right)}{8c_u\left(\frac{\pi}{2x}\right)} \; &< A^o(x) < \; A_u^o(x) = \frac{xs_u\left(\frac{\pi}{2x}\right)}{8c_\ell\left(\frac{\pi}{2x}\right)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = A^o(x) - A^e(x+1)$ и определим функцию

$$f_\ell(x) = A_\ell^o(x) - A_u^e(x+1), \tag{4}$$

которая является строгой нижней границей для f при любом $x > 1$. Таблица подтверждает, что этот факт справедлив вплоть до $k = 7$. Следовательно, достаточно доказать, что $f_\ell(x)$ положительна для всех $x > 14$. Более того, покажем, что этот факт справедлив при $x \geqslant 6$.

Отметим, что $\mu(x) = \frac{2880}{\pi^3}x^4(x+1)^4 c_u(\frac{\pi}{2x}) > 0$ при $x > 1$. Тогда надо показать, что $p(x) = \mu(x)f_\ell(x) > 0$ при всех $x \geqslant 6$. Элементарные выкладки приводят к полиному шестой степени

$$\begin{aligned} p(x) = 180x^6 &- 240x^5 - (1320 - 231\pi^2)x^4 - (1200 + 300\pi^2)x^3 \\ &- (300 + 210\pi^2 - 34\pi^4)x^2 - (60\pi^2 - 20\pi^4)x - (15\pi^2 - 10\pi^4 + 2\pi^6). \end{aligned}$$

С помощью пакета Maple обнаружено, что его самый большой положительный действительный корень приблизительно равен 5,6029. Так как он меньше 6 и коэффициент при x^6 равен $180 > 0$, то $p(x) > 0$ при всех $x \geqslant 6$. Теорема 1 доказана.

Рассматривая разность площадей двух последовательных небольших правильных многоугольников (с n и $n+1$ вершинами), приходим к следующему результату. Так как оба небольших правильных многоугольника при чётном и нечётном n стремятся к кругу при $n \to \infty$, то разность будет уменьшаться с ростом n. Покажем, что это верно, начиная с семиугольников. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2. $A^r_{2k-1} - A^r_{2k} > A^r_{2k+1} - A^r_{2k+2}$ *при любом целом* $k \geqslant 4$.

Доказательство. Используем функции (1)–(4). Из таблицы видно, что теорема справедлива при $k = 4, 5, 6$. Достаточно показать, что $f_\ell(x-2) - f_u(x) > 0$ при любом $x \geqslant 14$, где $f_u(x) = A^o_u(x) - A^e_\ell(x+1)$ — строгая верхняя граница для f при любом $x > 1$.

Отметим, что при каждом $x > 1$

$$\nu(x) = \frac{2880}{\pi^3} x^4 (x+1)^2 (x-1)^4 (x-2)^4 c_u(\pi/(2x-4)) c_\ell(\pi/(2x)) > 0.$$

Таким образом, достаточно показать, что при любом $x > 14$

$$q(x) = \nu(x)(f_\ell(x-2) - f_u(x)) > 0.$$

Простые выкладки приводят к полиному одиннадцатой степени

$$\begin{aligned} q(x) = {} & 720x^{11} + \left(-10800 - 207\pi^2\right) x^{10} + \left(58320 + 606\pi^2\right) x^9 \\ & + \left(-155760 + 3087\pi^2 + 82\pi^4\right) x^8 + \left(224880 - 20220\pi^2 - 196\pi^4\right) x^7 \\ & + \left(-169680 + 48111\pi^2 - 402\pi^4 - 10\pi^6\right) x^6 \\ & + \left(46320 - 61602\pi^2 + 1928\pi^4 + 2\pi^6\right) x^5 \\ & + \left(20400 + 43665\pi^2 - 2434\pi^4 + 38\pi^6 + 0{,}5\pi^8\right) x^4 \\ & + \left(-19200 - 11520\pi^2 + 892\pi^4 - 42\pi^6 + \pi^8\right) x^3 \\ & + \left(4800 - 6912\pi^2 + 514\pi^4 - 22\pi^6 + 0{,}5\pi^8\right) x^2 \\ & + \left(6144\pi^2 - 288\pi^4 + 4\pi^6\right) x - 1536\pi^2 + 96\pi^4 - 2\pi^6. \end{aligned}$$

Максимальный положительный корень этого полинома приблизительно равен 11,0747. Так как он меньше 14 и коэффициент при x^{11} равен 720, то при всех $x \geqslant 14$ получаем $q(x) > 0$. Теорема 2 доказана.

2. Периметры небольших правильных многоугольников

Обозначим через P_n^r периметр небольшого правильного n-угольника. Известно, что

$$P_n^r = \begin{cases} n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \leqslant P_{n+2}^r & \text{при чётном } n = 2k, \\ 2n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leqslant P_{n+2}^r & \text{при нечётном } n = 2k+1, \end{cases} \tag{5}$$

где $k \geqslant 2$.

Последовательность P_n^r не монотонна, а из (5) непосредственно следует, что

$$P_4^r < P_3^r = P_6^r < P_8^r < P_5^r = P_{10}^r < P_{12}^r < P_7^r = P_{14}^r < P_{16}^r < \ldots < \pi.$$

Более точно, $P_k^r = P_{2k}^r$ при любом нечётном $k \geqslant 3$ и $P_{2k-j}^r > P_{2k}^r$ при любом $k \geqslant 2$ и нечётном $j < k$.

Это означает, что справедливо аналогичное теореме 1

Утверждение 4. *$P_{2k-1}^r > P_{2k}^r$ при любом целом $k \geqslant 2$.*

Рассматривая разность периметров двух последовательных небольших правильных многоугольников (с n и $n+1$ вершинами) приходим к результату, аналогичному теореме 2. Здесь разность периметров двух последовательных многоугольников уменьшается, начиная с пятиугольника.

Теорема 3. *$P_{2k-1}^r - P_{2k}^r > P_{2k+1}^r - P_{2k+2}^r$ при любом целом $k \geqslant 3$.*

Доказательство. Вновь воспользуемся границами для функции (2) из доказательства теоремы 1. Это позволит получить строгие границы для функций периметра. При любом $x > 0$ имеем

$$P_\ell^e(x) = x\ s_\ell\left(\frac{\pi}{x}\right) < P^e(x) < P_u^e(x) = x\ s_u\left(\frac{\pi}{x}\right),$$

$$P_\ell^o(x) = 2x\ s_\ell\left(\frac{\pi}{2x}\right) < P^o(x) < P_u^o(x) = 2x\ s_u\left(\frac{\pi}{2x}\right).$$

Рассмотрим функцию $g(x) = P^o(x) - P^e(x+1)$. Пусть $g_\ell(x) = P_\ell^o(x) - P_u^e(x+1)$ и $g_u(x) = P_u^o(x) - P_\ell^e(x+1)$. Тогда $g_\ell(x-2) - g_u(x)$ при любом $x \geqslant 4$ является строгой верхней границей для $g(x-2) - g(x)$.

Заметим, что функция $\eta(x) = \frac{1920}{\pi^3}x^4(x+1)^2(x-1)^4(x-2)^2$ положительна. Следовательно, достаточно показать, что

$$r(x) = \eta(x)(g_\ell(x-2) - g_u(x)) > 0$$

при любом $x \geqslant 4$. Элементарные выкладки приводят к полиному девятой степени

$$\begin{aligned} r(x) = {} & 960x^9 + \left(-6720 - 17\pi^2\right) x^8 + \left(16320 + 38\pi^2\right) x^7 \\ & + \left(-16960 + 37\pi^2\right) x^6 + \left(6720 - 64\pi^2\right) x^5 + \left(320 - 43\pi^2\right) x^4 \\ & + \left(-960 - 18\pi^2\right) x^3 + \left(320 - 5\pi^2\right) x^2 + 12\pi^2 x - 4\pi^2. \end{aligned}$$

Его единственный действительный корень приблизительно равен 3,3876. Так как он меньше 4 и коэффициент при x^9 равен $960 > 0$, получаем $r(x) > 0$ при всех $x \geqslant 4$. Теорема 3 доказана.

3. Новое доказательство теоремы Рейнхардта

Теорема 1 и утверждение 4 приводят к короткому новому доказательству часто переоткрываемого результата Рейнхардта [15, 17].

Теорема 4. *Правильный выпуклый многоугольник единичного диаметра не имеет ни максимальной площади при всех чётных $n \geqslant 6$, ни максимального периметра при всех чётных $n \geqslant 4$.*

Доказательство. Добавим к правильному выпуклому многоугольнику единичного диаметра с нечётным числом $n-1$ вершин вершину вне его, но с учётом ограничения на диаметр. Затем возьмём выпуклую оболочку этих вершин как n-угольник. Его площадь и периметр больше, чем A^r_{n-1} и P^r_{n-1} соответственно. А по теореме 1 и утверждению 4 его площадь и периметр больше, чем A^r_n при $n \geqslant 6$ и P^r_n при $n \geqslant 4$ соответственно. Теорема 4 доказана.

Отметим, что доказательства Рейнхардта [17] и многих последующих авторов используют добавление вершины к правильному многоугольнику с чётным числом n сторон. В доказательствах Моссингхофа [15, 16] добавление вершины используется, как в нашей статье, начиная с правильного $(n-1)$-угольника, но более трудоёмким путём.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Audet C., Hansen P., Jaumard B., Savard G.** A branch and cut algorithm for nonconvex quadratically constrained quadratic programming // Mathematical programing. Ser. A. — 2000. — Vol. 87. — P. 131–152.
2. **Audet C., Hansen P., Messine F.** The small octagon with longest perimeter // J. Combin. theory. Ser. A. — 2007.— Vol. 114. — P. 135–150.
3. **Audet C., Hansen P., Messine F.** Extremal problems for convex polygons // J. Global Optimization. — 2007. — Vol. 38. — P. 163–179.
4. **Audet C., Hansen P., Messine F., Xiong J.** The largest small octagon // J. Combinat. Theory. Ser. A. — 2002. — Vol. 98. — P. 46–59.

5. **Blåsjö V.** The isoperimetric problem // American Math. Monthly. — 2005. — Vol. 112. — P. 526–566.
6. **Brass P., Moser W., Pach J.** Research problems in discrete geometry. — New-York: Springer-Verl., 2005.
7. **Bondarenko A., Bortz D. M., Moré J. J.** A Collection of large-scale nonlinearly constrained optimization test problems // Argonne National Laboratory Research Report, August 20, 1998.
8. **Conn A. R., Gould N. I. M., Toint P.** LANCELOT // Springer Ser. Comput. Math.. — Vol. 17. — New York: Springer-Verl., 1992.
9. **Croft H. T., Falconer K. J., Guy R. K.** Unsolved problems in geometry. — New York: Springer-Verl., 1991.
10. **Dolan E. D., Moré J. J.** Benchmarking optimization software with COPS // Argonne National Laboratory Research Report, November 2000, revised January 2, 2001.
11. **Dolan E. D., Moré J. J., Munson T. S.** Benchmarking optimization software with COPS 3.0 // Argonne National Laboratory Research Report, February, 2004.
12. **Gill P. E., Murray W., Saunders M. A.** User's guide for SNOPT 5.3: A Fortran package for large-scale nonlinear programming // report NA97-5, University of California, 1997.
13. **Graham R. L.** The largest small hexagon // J. Combinat. Theory. Ser. A. — 1975. — Vol. 18. — P. 165–170.
14. **Messine F., Lagouanelle J. L.** Enclosure methods for multivariate differentiable functions and application to global optimization // J. Universal Computer Science. — 1998. — Vol. 4. — P. 589–603.
15. **Mossinghoff M. J.** A $1 problem // Amer. Math. Monthly. — 2006. — Vol. 113. — P. 385–402.
16. **Mossinghoff M. J.** Isodiametric problems for polygons // Discrete and Comput. Geometry. — 2006. — Vol. 36. — P. 363–379.
17. **Reinhardt K.** Extremale polygone gegebenen durchmessers // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. — 1922. — Bd. 31. — S. 251–270.
18. **Tamvakis N. K.** On the perimeter and the area of the convex polygon of a given diameter // Bulletin of the Greek Mathematical Society. — 1987. — Vol. 28. — P. 115–132.

Шарль Оде (*Charles Audet*)
e-mail: Charles.Audet@gerad.ca

Пьер Хансен (*Pierre Hansen*)
e-mail: Pierre.Hansen@gerad.ca

Фредерик Мессин (*Frédéric Messine*)
e-mail: Frederic.Messine@n7.fr

Статья поступила
10 октября 2007 г.

Переработанный вариант —
3 марта 2008 г.