ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2008. Том 15, № 3. 74–90

УДК 519.852

ОБ f-ВЕКТОРАХ ПИРАМИДАЛЬНЫХ ТРИАНГУЛЯЦИЙ ТОЧЕЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

В. Н. Шевченко, Д. В. Груздев

Аннотация. Триангуляцию точечной конфигурации назовем *пирамидальной*, если все симплексы данной триангуляции имеют общую вершину. Получен ряд неравенств для компонент f-векторов пирамидальных триангуляций и для каждого $d \geqslant 3$ построен d-мерный выпуклый многогранник и его триангуляция, f-вектор которой не реализуется как f-вектор пирамидальной триангуляции.

Ключевые слова: пирамидальная триангуляция, триангуляция, точечная конфигурация.

Введение

Триангуляцией точечной конфигурации $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^{d_1}$, выпуклая оболочка $[A]$ которой d-мерна (и, следовательно, является d-мерным политопом), называется такое множество $T(A)$ d-мерных симплексов с вершинами из A, что их объединение есть политоп $[A]$ и пересечение любых двух симплексов из $T(A)$ является их общей гранью (возможно, пустой). Грани симплексов из $T(A)$ называются *гранями триангуляции* $T(A)$. Вектор, i-ая компонента которого равна количеству i-мерных граней триангуляции $T(A)$, называется *f-вектором* триангуляции $T(A)$. *Триангуляцией* политопа называется триангуляция точечной конфигурации его вершин.

Триангуляция $T(A)$ точечной конфигурации A называется *пирамидальной*, если все её симплексы имеют общую вершину. Если данная вершина является внутренней точкой k-мерной грани политопа $[A]$ в аффинной оболочке этой грани (такая грань существует и единственна), то триангуляция $T(A)$ называется *k-пирамидальной*.

В разд. 1 вводятся основные определения, приводятся известные факты и доказывается ряд используемых далее утверждений. В разд. 2 получен ряд неравенств (теоремы 1 и 2) для компонент f-векторов пирамидальных триангуляций на языке взаимно-однозначно соответствующих им компонент γ-векторов данных триангуляций. В разд. 3 для каждого

$d \geqslant 3$ построен d-мерный политоп и его триангуляция, f-вектор которой не реализуется как f-вектор пирамидальной триангуляции точечной конфигурации (теорема 3).

Заметим, что пирамидальными являются триангуляции, составляющие один из видов регулярных триангуляций (pulling triangulations), рассматриваемых в [12].

Результаты этой статьи частично анонсированы в [6].

1. Основные определения и свойства

Через $\operatorname{aff}(A)$ и $[A]$ обозначим соответственно аффинную оболочку и выпуклую оболочку множества точек A. Рассмотрим выпуклый многогранник M размерности $\dim(M) = d$, являющийся выпуклой оболочкой конечного множества точек из $\mathbb{R}^{d_1}$ и называемый далее d-мерным *политопом*. Через $\operatorname{int}(M)$ и $\partial(M)$ обозначим соответственно множество внутренних и множество граничных (внешних) точек политопа M в $\operatorname{aff}(M)$. Через $\Gamma_i(M)$ обозначим множество i-мерных граней политопа M, $i = -1, 0, \ldots, d$. Пустое множество $\varnothing$ также будем считать гранью политопа M размерности -1, а $(d-1)$-мерные грани политопа M будем называть его *гипергранями*. Таким образом, $\Gamma_{-1}(M) = \{\varnothing\}$ и $\Gamma_d(M) = \{M\}$. Положим

$$\Gamma(M) = \bigcup_{i=-1}^{d} \Gamma_i(M).$$

Если $|\Gamma_0(M)| = d + 1$, то M будем называть *d-мерным симплексом*. Таким образом, d-мерный симплекс есть выпуклая оболочка $d+1$ аффинно независимых точек. Политоп M размерности d называется *симплициальным*, если все его $(d-1)$-мерные грани являются симплексами. Современное состояние комбинаторной теории выпуклых многогранников хорошо отражено в [13]. При необходимости там можно найти дополнительные сведения, связанные с рассматриваемыми в статье вопросами.

Конечное множество точек $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}^{d_1}$ называется *точечной конфигурацией*. Точечная конфигурация $A \subset \mathbb{R}^{d_1}$, выпуклая оболочка $[A]$ точек которой является d-мерным политопом, называется *d-мерной точечной конфигурацией*.

Говорят, что симплексы, составляющие некоторое конечное множество, *расположены правильно* [3], если пересечение любых двух симплексов является их общей гранью (возможно, пустой). Для множества $H = \{F_1, \ldots, F_m\}$ правильно расположенных d-мерных симплексов $F_1, \ldots,$

$F_m \subset \mathbb{R}^{d_1}$, положим

$$\Gamma_i(H) = \bigcup_{\tau=1}^{m} \Gamma_i(F_\tau), \quad f_i^H = |\Gamma_i(H)| \text{ при } i = -1, 0, \ldots, d,$$

заметив, что $f_{-1}^H = 1$ и $f_d^H = |H|$. Также положим

$$\Gamma(H) = \bigcup_{i=1}^{d} \Gamma_i(H),\ f^H = \left(f_{-1}^H, f_0^H, \ldots, f_d^H\right),\ f^H(\lambda) = \sum_{i=-1}^{d} f_i^H \lambda^{i+1}$$

и заметим, что $\Gamma(H)$ является симплициальным комплексом.

Триангуляцией d-мерной точечной конфигурации $A \subset \mathbb{R}^{d_1}$ (триангуляцией d-мерного политопа $[A]$ с узлами из A) называется такое множество T правильно расположенных d-мерных симплексов с вершинами из A, что их объединение есть политоп $[A]$. *Триангуляцией политопа* называется триангуляция точечной конфигурации его вершин. Множество всех триангуляций точечной конфигурации A обозначим через $\mathcal{T}(A)$. Множество всех триангуляций d-мерных точечных конфигураций обозначим через $\mathcal{T}_d$.

Грани симплексов триангуляции называются *гранями триангуляции*. Тогда при $i = -1, 0, \ldots, d$ множество $\Gamma_i(T) = \bigcup\limits_{j=1}^{t} \Gamma_i(S_j)$ является множеством i-мерных граней триангуляции $T = \{S_1, \ldots, S_t\}$ d-мерной точечной конфигурации A и $\Gamma(T) = \bigcup\limits_{i=-1}^{d} \Gamma_i(T)$ — множество всех граней триангуляции T. Заметим, что $\Gamma_{-1}(T) = \{\varnothing\}$. Легко видеть, что имеет место

Лемма 1. *Любая $(d-1)$-мерная грань F триангуляции T d-мерной точечной конфигурации A, имеющая внутреннюю точку из $[A]$ в $\operatorname{aff}(A)$, является гранью ровно двух симплексов из T, в противном случае F является гранью единственного симплекса из T.*

Грань F триангуляции T d-мерной точечной конфигурации A назовем *внутренней*, если она имеет внутреннюю точку из $[A]$ в $\operatorname{aff}(A)$, в противном случае назовем ее *внешней*. Через $\Gamma_i^{\text{int}}(T)$ и $\Gamma_i^{\partial}(T)$ обозначим соответственно множество внутренних и множество внешних i-мерных граней триангуляции T, $i = -1, 0, \ldots, d$. Заметим, что $\Gamma_{-1}^{\text{int}}(T) = \varnothing$, $\Gamma_d^{\text{int}}(T) = T$, $\Gamma_{-1}^{\partial}(T) = \{\varnothing\}$ и $\Gamma_d^{\partial}(T) = \varnothing$.

Положим

$$f_i^T = |\Gamma_i(T)|, \ \ f_i^{\imath T} = \left|\Gamma_i^{\text{int}}(T)\right|, \ \ f_i^{\partial T} = \left|\Gamma_i^{\partial}(T)\right|, \quad i = -1, \ldots, d,$$

и заметим, что

$$f_{-1}^{T}=1,\ f_{d}^{T}=|T|,\ f_{-1}^{\imath T}=0,\ f_{d}^{\imath T}=|T|,\ f_{-1}^{\partial T}=1 \text{ и } f_{d}^{\partial T}=0.$$

Вектор $f^T=\left(f_0^T,\ldots,f_d^T\right)$ и полином $f^T(\lambda)=\sum\limits_{i=-1}^{d} f_i^T\lambda^{i+1}$ назовем соответственно *f-вектором* и *f-полиномом* триангуляции T. Положим

$$f^{\imath T}(\lambda)=\sum_{i=-1}^{d} f_i^{\imath T}\lambda^{i+1},\quad f^{\partial T}(\lambda)=\sum_{i=-1}^{d} f_i^{\partial T}\lambda^{i+1}$$

и заметим, что $f^T(\lambda)=f^{\imath T}(\lambda)+f^{\partial T}(\lambda)$.

Для d-мерного симплекса S и его грани $G\in\Gamma(S)$ положим

$$\lfloor G,S\rfloor=\{F\in\Gamma(S)\mid G\subseteq F\}$$

и при $i=0,\ldots,d+1$ рассмотрим многочлены $\psi_{d,i}(\lambda)=\lambda^i(1+\lambda)^{d+1-i}$. Ясно, что они составляют базис в линейном пространстве многочленов с рациональными коэффициентами степени не выше $d+1$, причем матрица перехода к нему от стандартного базиса $1,\lambda,\ldots,\lambda^{d+1}$ является целочисленной и имеет определитель, равный 1. Для работы с введенными многочленами $f^T(\lambda)$, $f^{\imath T}(\lambda)$, $f^{\partial T}(\lambda)$ новый базис удобнее. Например, нетрудно видеть, что существуют и единственны целые числа γ_i^T, $i=0,\ldots,d+1$, такие, что

$$f^T(\lambda)=\sum_{i=0}^{d+1}\gamma_i^T\psi_{d,i}(\lambda), \tag{1}$$

причем $\gamma_0^T=1$ и $\gamma_{d+1}^T=0$ (последнее условие равносильно уравнению Эйлера — Пуанкаре). Вектор $\gamma^T=\left(\gamma_0^T,\ldots,\gamma_{d+1}^T\right)$ назовем *γ-вектором* триангуляции $T\in\mathcal{T}_d$. Таким образом,

$$f_{j-1}^T=\sum_{i=0}^{j}\binom{d+1-i}{d+1-j}\gamma_i^T,\quad \gamma_j^T=\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{d+1-i}{d+1-j}f_{i-1}^T$$

при $j=0,\ldots,d+1$. Процедура, аналогичная описанному переходу, в [13] на с. 280 названа *трюком Стенли* (Stanley's trick).

Фундаментальный факт теории линейных неравенств — теорема Минковского — Вейля — утверждает, что множество $M\subset\mathbb{R}^d$ является политопом (выпуклой оболочкой конечного множества точек) тогда и только тогда, когда M совпадает с множеством решений некоторой конечной

системы линейных неравенств и ограничено, причем если $\dim(M) = d$, то такой системой является система неравенств, соответствующая гиперграням политопа M. Для перехода от одного описания политопа к другому, видимо, наибольший интерес представляет алгоритм Фурье — Моцкина (см., например, [7]), основная идея которого, восходящая к Фурье и развитая Моцкиным, выражена в методе двойного описания [2, 9] (см. также [5]) и методе «под-над» [4, 10]. Пусть d-мерный политоп M задан выпуклой оболочкой конечного множества точек $A \subset \mathbb{R}^d$. Алгоритм Фурье — Моцкина, являясь итерационным, на каждой итерации получает очередную точку множества A и строит систему неравенств, описывающую выпуклую оболочку полученной совокупности точек.

Пример 1. Рассмотрим $A_1(d) = \{a^d, b^d, e_1^d, \ldots, e_d^d\} \subseteq \mathbb{R}^d$ при $d \geqslant 3$, где $a^d = (0, 0, \ldots, 0, 0)$, $b^d = (1, 1, \ldots, 1, 1)$, $e_1^d = (1, 0, \ldots, 0, 0)$, $e_2^d = (0, 1, \ldots, 0, 0), \ldots$, $e_{d-1}^d = (0, 0, \ldots, 1, 0)$, $e_d^d = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, и рассмотрим $T_1(d) = \{S_1^0, \ldots, S_d^0\}$, где

$$S_i^0 = [a^d, b^d, E_i^d], \;\; E_i^d = \{e_1^d, \ldots, e_d^d\} \backslash \{e_i^d\}, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Покажем, что $T_1(d)$ является триангуляцией d-мерной точечной конфигурации $A_1(d)$ и

$$\begin{aligned}\gamma^{T_1(d)} &= \left(\gamma_0^{T_1(d)}, \gamma_1^{T_1(d)}, \gamma_2^{T_1(d)}, \ldots, \gamma_{d-1}^{T_1(d)}, \gamma_d^{T_1(d)}, \gamma_{d+1}^{T_1(d)}\right) \\ &= (1, 1, 1, \ldots, 1, 0, 0).\end{aligned}$$

Действительно, нетрудно увидеть, что политоп $[A_1(d)]$ является d-мерной бипирамидой (определение бипирамиды можно найти в [1, 10, 13]) с основанием $[e_1^d, \ldots, e_d^d]$, а $T_1(d)$ — триангуляция бипирамиды $[A_1(d)]$. Также можно показать, что кроме этой существует еще только одна триангуляция бипирамиды $[A_1(d)]$. При этом

$$\Gamma_{d-1}([A_1(d)]) = \left\{ [a^d, E_j^d] \mid j = 1, \ldots, d \right\} \cup \left\{ [b^d, E_j^d] \mid j = 1, \ldots, d \right\}$$

и бипирамида $[A_1(d)]$ описывается следующей системой линейных уравнений

$$x_j \geqslant 0, \;\; j = 1, \ldots, d, \quad (2 - d)x_j + \sum_{k \neq j} x_k \leqslant 1, \;\; j = 1, \ldots, d.$$

Положим $G_1^0 = \varnothing$, $G_j^0 = [e_1^d, \ldots, e_{j-1}^d]$ при $j = 2, \ldots, d$. Заметим, что $G_j^0 \in \Gamma_{j-2}(S_j^0)$ при $j = 1, \ldots, d$. Тогда

$$\lfloor G_1^0, S_1^0 \rfloor = \Gamma\left(S_1^0\right), \;\; \lfloor G_j^0, S_j^0 \rfloor = \Gamma\left(\{S_1^0, \ldots, S_j^0\}\right) \backslash \Gamma\left(\{S_1^0, \ldots, S_{j-1}^0\}\right)$$

при $j = 2, \ldots, d$. Поэтому

$$\Gamma(T_1(d)) = \bigcup_{j=1}^{d} \lfloor G_j^0, S_j^0 \rfloor, \quad f^{T_1(d)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{d-1} \psi_{d,j}(\lambda)$$

и, следовательно, $\gamma^{T_1(d)} = (1, 1, 1, \ldots, 1, 0, 0)$.

Лемма 2 [11]. *Для триангуляции $T = \{S_1, \ldots, S_t\} \in \mathcal{T}_d$, где $|T| = t$, справедливы следующие утверждения.*

(i) *Существуют такие $G_j \in \Gamma(S_j)$ при $j = 1, \ldots, t$, что*

$$\Gamma(T) = \bigcup_{j=1}^{t} \lfloor G_j, S_j \rfloor \text{ и } \lfloor G_\nu, S_\nu \rfloor \cap \lfloor G_\mu, S_\mu \rfloor = \varnothing \text{ при } \nu \neq \mu.$$

(ii) *Если $G_1, \ldots, G_t$ удовлетворяют условию утверждения* (i), *то*

$$\gamma_i^T = |\{G_j \mid \dim(G_j) = i - 1, \ j \in \{1, \ldots, t\}\}|$$

при $i = 0, \ldots, d+1$.

(iii) $\gamma_i^T \geqslant 0$ *при $i = 0, \ldots, d+1$.*

Дадим набросок доказательства, следуя [11]. Не уменьшая общности, будем считать, что $S_1, \ldots, S_t \subset \mathbb{R}^d$.

Докажем утверждение (i). В пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$ введем стандартное скалярное произведение: для двух произвольных векторов $b = (b_0, \ldots, b_d)$ и $y = (y_0, \ldots, y_d)$ положим $(b, y) = \sum\limits_{i=0}^{d} b_i y_i$. Для $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $\overline{x} = (1, x_1, \ldots, x_d)$. Для произвольного d-мерного симплекса $S \subset \mathbb{R}^d$ и его произвольной гиперграни $F \in \Gamma(S)$ через b_F^S обозначим такой вектор из $\mathbb{R}^{d+1}$, что $\big(b_F^S, \overline{x}\big) = 0$ при $x \in F$ и $\big(b_F^S, \overline{x}\big) \geqslant 0$ при $x \in S$.

Можно показать, что для триангуляции T существует такая точка $p \in S_1$, что $\big(b_F^{S_j}, \overline{p}\big) \neq 0$ для всех $F \in \Gamma(S_j)$ и $j = 1, \ldots, t$. Положим $\mathcal{F}_j^p = \big\{F \in \Gamma_{d-1}(S_j) \mid \big(b_F^{S_j}, \overline{p}\big) > 0\big\}$ и $G_j = \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}_j^p} F$ при $j = 1, \ldots, t$. Нетрудно проверить, что

$$\Gamma(T) = \bigcup_{j=1}^{t} \lfloor G_j, S_j \rfloor \text{ и } \lfloor G_\nu, S_\nu \rfloor \cap \lfloor G_\mu, S_\mu \rfloor = \varnothing$$

при $\nu \neq \mu$.

Теперь докажем утверждение (ii). Для произвольного множества $H = \{F_1, \ldots, F_m\}$ симплексов $F_1, \ldots, F_m \subset \mathbb{R}^d$ положим

$$\widetilde{\Gamma}_i(H) = \{F \in H \mid \dim(F) = i\}, \quad \widetilde{f}_i^H = |\widetilde{\Gamma}_i(H)|, \quad i = -1, 0, \ldots, d,$$

и рассмотрим

$$\widetilde{f}^H(\lambda) = \sum_{i=-1}^{d} \widetilde{f}_i^H \lambda^{i+1}.$$

Заметим, что для произвольного d-мерного симплекса $S \subset \mathbb{R}^d$ и его произвольной k-мерной грани G

$$\widetilde{f}^{\lfloor G,S \rfloor}(\lambda) = \psi_{d,k+1}(\lambda) = \lambda^{k+1}(1+\lambda)^{d-k}.$$

Рассмотрим $G_1, \ldots, G_t$, удовлетворяющие условию утверждения (i). Положим $k_j = \dim(G_j)$, $j = 1, \ldots, t$. Тогда

$$f^T(\lambda) = \sum_{j=1}^{t} \widetilde{f}^{\lfloor G_j, S_j \rfloor}(\lambda) = \sum_{j=1}^{t} \psi_{d,k_j+1}(\lambda),$$

и в силу единственности чисел γ_i^T, $i = 0, \ldots, d+1$, получаем, что

$$\gamma_i^T = |\{G_j \mid \dim(G_j) = i-1,\ j \in \{1, \ldots, t\}\}|$$

при $i = 0, \ldots, d+1$. Утверждение (ii) доказано.

Утверждение (iii) доказывается применением к построенным $G_1, \ldots, G_t$ утверждения (ii). Лемма 2 доказана.

Пример 2. Добавив теперь к точечной конфигурации $A_1(d)$ из примера 1 при $d \geqslant 3$ точку $v^d = (2(d-1), -1, \ldots, -1, 1)$, получим точечную конфигурацию $A(d) = \{a^d, b^d, e_1^d, \ldots, e_d^d, v^d\} \subseteq \mathbb{R}^d$ и рассмотрим $T(d) = \{S_1^0, \ldots, S_d^0, S_2', \ldots, S_d', S_2'', \ldots, S_{d-1}''\}$, где $S_i^0 = [a^d, b^d, E_i^d]$ и $E_i^d = \{e_1^d, \ldots, e_d^d\} \setminus \{e_i^d\}$ при $i = 1, \ldots, d$, $S_i' = [b^d, E_i^d, v^d]$ при $i = 2, \ldots, d$, $S_i'' = [a^d, E_i^d, v^d]$ при $i = 2, \ldots, d-1$. Покажем при $d \geqslant 3$, что $T(d)$ является триангуляцией d-мерной точечной конфигурации $A(d)$, политоп $[A(d)]$ является симплициальным политопом с множеством вершин $A(d)$ и $\gamma^{T(d)} = (\gamma_0^{T(d)}, \gamma_1^{T(d)}, \gamma_2^{T(d)}, \ldots, \gamma_{d-1}^{T(d)}, \gamma_d^{T(d)}, \gamma_{d+1}^{T(d)}) = (1, 2, 3, \ldots, 3, 0, 0)$. (Заметим, что построенная триангуляция $T(d)$ является одним из видов регулярных триангуляций (placing triangulations), рассматриваемых в [12].)

Пусть $d \geqslant 3$. Каждой гиперграни бипирамиды $[A_1(d)]$ из примера 1 соответствует полупространство, в котором располагается сама бипирамида $[A_1(d)]$. Положим $P'_j = \left\{(x_1, \dots x_d) \in \mathbb{R}^d \mid (2-d)x_j + \sum\limits_{k \neq j} x_k \leqslant 1\right\}$ и $P''_j = \{(x_1, \dots x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_j \geqslant 0\}$ для $j = 1, \dots, d$. Тогда гиперграни $\left[b^d, E^d_j\right]$ соответствует полупространство P'_j, а гиперграни $\left[a^d, E^d_j\right]$ соответствует полупространство P''_j при $j = 1, \dots, d$. Для нахождения $\Gamma_{d-1}([A(d)])$ воспользуемся алгоритмом Фурье — Моцкина. Рассматривая точку v^d, видим, что $v^d \in P'_1, P''_1, P''_d$ и $v^d \notin P'_2, \dots, P'_d, P''_2, \dots, P''_{d-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\Gamma_{d-1}([A(d)]) = &\left\{\left[b^d, E^d_1\right], \left[a^d, E^d_1\right], \left[a^d, E^d_d\right]\right\} \\
&\cup \left\{\left[b^d, E^d_1 \cap E^d_j, v^d\right] \mid j = 2, \dots, d\right\} \\
&\cup \left\{\left[a^d, E^d_1 \cap E^d_j, v^d\right] \mid j = 2, \dots, d-1\right\} \\
&\cup \left\{\left[a^d, E^d_d \cap E^d_j, v^d\right] \mid j = 2, \dots, d-1\right\} \cup \left\{\left[E^d_d, v^d\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $[A(d)]$ является симплициальным политопом с множеством вершин $A(d)$.

Применяя описанную в [7] модификацию алгоритма Фурье — Моцкина для построения триангуляции к последовательности точек $\left(a^d, b^d, e^d_2, \dots, e^d_d, e^d_1, v^d\right)$, составляющих d-мерную точечную конфигурацию $A(d)$, получаем триангуляцию $T(d)$ точечной конфигурации $A(d)$. Действительно, триангуляция $T_1(d)$ из примера 1 бипирамиды $[A_1(d)]$ получается дополнением симплексами $S^0_2, \dots, S^0_d$ триангуляции $\{S^0_1\}$ политопа $S^0_1 = \left[a^d, b^d, E^d_1\right]$. Поскольку $v^d \notin P'_2, \dots, P'_d, P''_2, \dots, P''_{d-1}$, на следующей итерации триангуляция $T(d)$ политопа $[A(d)]$ получается дополнением симплексами $S'_2, \dots, S'_d, S''_2, \dots, S''_{d-1}$ триангуляции $T_1(d)$.

Положим $G'_2 = [v^d]$, $G'_j = \left[v^d, e^d_2, \dots, e^d_{j-1}\right]$ при $j = 3, \dots, d$, $G''_2 = [v^d, a^d]$, $G''_j = \left[v^d, a^d, e^d_2, \dots, e^d_{j-1}\right]$ при $j = 3, \dots, d-1$. Заметим, что $G'_j \in \Gamma_{j-2}(S'_j)$ и $G''_j \in \Gamma_{j-1}(S''_j)$ при $j = 2, \dots, d-1$. Положим

$$T'_1(d) = T_1(d) \text{ и } T'_j(d) = \left\{S^0_1, \dots, S^0_d, S'_2, \dots, S'_j\right\}, \quad j = 2, \dots, d,$$

$$T''_1(d) = T'_d(d) \text{ и } T''_j(d) = \left\{T'_j(d), S''_2, \dots, S''_j\right\}, \quad j = 2, \dots, d-1.$$

Тогда при $j = 2, \dots, d$ имеем $\lfloor G'_j, S'_j \rfloor = \Gamma(T'_j(d)) \backslash \Gamma(T'_{j-1}(d))$, а при

$j = 2, \ldots, d-1$ имеем $\lfloor G''_j, S''_j \rfloor = \Gamma(T''_j(d)) \backslash \Gamma(T''_{j-1}(d))$. Поэтому

$$\Gamma(T(d)) = \Gamma(T_1(d)) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{d} \lfloor G'_j, S'_j \rfloor \right) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{d-1} \lfloor G''_j, S''_j \rfloor \right)$$
$$= \left(\bigcup_{j=1}^{d} \lfloor G^0_j, S^0_j \rfloor \right) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{d} \lfloor G'_j, S'_j \rfloor \right) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{d-1} \lfloor G''_j, S''_j \rfloor \right).$$

Применяя лемму 1, получаем, что $\gamma^{T(d)} = \gamma^{T_1(d)} + (0, 1, 2, \ldots, 2, 0, 0) = (1, 2, 3, \ldots, 3, 0, 0)$.

Следующая лемма доказана в [8] для случая триангуляции такой d-мерной точечной конфигурации A, что $A = \Gamma_0([A])$. В случае произвольной d-мерной точечной конфигурации A данная лемма может быть доказана аналогичным образом. Конструкция, примененная в доказательстве леммы 1, также позволяет сделать это, так как несложно показать, что $f^{\imath T}(\lambda) = \bigcup\limits_{j=1}^{t} \lfloor \overline{G_j}, S_j \rfloor$, где $\overline{G_j} = [\Gamma_0(S_j) \backslash \Gamma_0(G_j)]$ при $i = 1, \ldots, t$.

Лемма 2. *Если $T \in \mathcal{T}_d$, то $f^{\imath T}(\lambda) = (-1)^{d+1} f^T(-1-\lambda)$.*

Для целых n и i положим $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ для $n \geqslant 0$ и $i \in \{0, \ldots, n\}$, и положим $\binom{n}{i} = 0$ во всех остальных случаях. Тогда из (1), леммы 2 и равенства $f^T(\lambda) = f^{\imath T}(\lambda) + f^{\partial T}(\lambda)$ для $T \in \mathcal{T}_d$ получаем

Следствие 1. *Если $T \in \mathcal{T}_d$, то*

$$f^{\partial T}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \left(\left(\gamma^T_i - \gamma^T_{d+1-i}\right) \left(\psi_{d,i}(\lambda) - \psi_{d,d+1-i}(\lambda)\right)\right)$$

и

$$f^{\partial T}_j = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \left(\gamma^T_i - \gamma^T_{d+1-i}\right) \left(\binom{d+1-i}{j+1-i} - \binom{i}{j-d+i} \right)$$

при $j = -1, 0, \ldots, d-1$.

Также имеют место следующие утверждения.

Лемма 3. *Если $T \in \mathcal{T}_d$, то $f^{\partial T}_j \geqslant \binom{d+1}{j+1}$, $j = -1, 0, \ldots, d-1$.*

Доказательство. Пусть T является триангуляцией d-мерной точечной конфигурации A. Тогда T порождает триангуляцию каждой грани F политопа $[A]$ с узлами из A. Так как d-мерный политоп $[A]$ имеет не меньше j-мерных граней, чем d-мерный симплекс, то $f^{\partial T}_j \geqslant \binom{d+1}{j+1}$, $j = -1, 0, \ldots, d-1$. Лемма 4 доказана.

Лемма 4. *Пусть T — триангуляция k-мерной точечной конфигурации A и существует $a \in \Gamma_0(T) \cap \operatorname{int}([A])$. Тогда*

$$|\{S \in T \mid a \in \Gamma_0(S)\}| \geqslant k + 1.$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим симплекс $S \in T$, вершиной которого является a. Симплекс S имеет k $(k-1)$-мерных граней $F_1, \ldots, F_k$, содержащих a, и одну $(k-1)$-мерную грань F_{k+1}, не содержащую a. Таким образом, $S = [F_{k+1}, a]$ и $a \in \Gamma_0(F_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Поскольку при этом $a \in \operatorname{int}([A])$, то $F_1, \ldots, F_k$ являются внутренними $(k-1)$-мерными гранями триангуляции T. Поэтому по лемме 1 триангуляция T содержит k отличных от S симплексов $S_1, \ldots, S_k$, имеющих $(k-1)$-мерные грани $F_1, \ldots, F_k$ соответственно. При этом $S_i \neq S_j$ при $i \neq j$, так как в противном случае получилось бы, что $F_i, F_j \in \Gamma_{k-1}(S_j)$ и, следовательно, $S_j = S$, что противоречит определению симплекса S_j. Таким образом, триангуляция T содержит попарно различные симплексы $S, S_1, \ldots, S_k$ с вершиной a. Следовательно, $|\{S \in T \mid a \in \Gamma_0(S)\}| \geqslant k + 1$. Лемма 5 доказана.

Триангуляцию $T = \{S_1, \ldots, S_t\}$ d-мерной точечной конфигурации A назовем *пирамидальной*, если существует $a \in \Gamma_0(S_i)$ при $i = 1, \ldots, t$; если $a \in \operatorname{int}(F)$ — такая грань F политопа $[A]$ существует и единственна — и $F \in \Gamma_k([A])$, то триангуляцию T назовем *k-пирамидальной*. Заметим, что триангуляция $T_1(d)$ из примера 1 является 0-пирамидальной. Положим $T_{a,1} = \left\{F' \in \Gamma^{\partial}_{d-1}(T) \mid a \in F'\right\}$ и $T_{a,2} = \left\{F' \in \Gamma^{\partial}_{d-1}(T) \mid a \notin F'\right\}$. Тогда имеет место

Лемма 5. *Пусть T является пирамидальной триангуляцией d-мерной точечной конфигурации A и $a \in \Gamma_0(S)$ для всех $S \in T$. Тогда $T = \{[F', a] \mid F' \in T_{a,2}\}$ и $|T| = |T_{a,2}|$.*

Доказательство. Рассмотрим $F' \in T_{a,2}$. Тогда $F' \in \Gamma^{\partial}_{d-1}(T)$ и по лемме 1 F' принадлежит единственному симплексу S триангуляции T. Так как $a \notin F'$ и $a \in \Gamma_0(S)$, то $S = [F', a]$. Следовательно,

$$\{[F', a] \mid F' \in T_{a,2}\} \subseteq T.$$

Рассмотрим теперь $S \in T$. Тогда $a \in \Gamma_0(S)$ и симплекс S имеет единственную $(d-1)$-мерную грань (обозначим ее через F'), не содержащую a. Таким образом, $F' \in \Gamma_{d-1}(T)$ и $a \notin F'$. Предположим, что $F' \in \Gamma^{\mathrm{int}}_{d-1}(T)$. Тогда по лемме 1 грань F' является $(d-1)$-мерной гранью двух различных симплексов триангуляции T, чего быть не может,

поскольку $a \notin F'$ и каждый симплекс триангуляции T имеет вершину a. Поэтому $F' \in \Gamma^{\partial}_{d-1}(T)$, $F' \in T_{a,2}$ и $S = [F', a]$. Таким образом, $T \subseteq \{[F', a] \mid F' \in T_{a,2}\}$ и $T = \{[F', a] \mid F' \in T_{a,2}\}$.

Покажем теперь, что $|T| = |T_{a,2}|$. Рассмотрим $F'_1, F'_2 \in T_{a,2}$, $F'_1 \neq F'_2$. Положим $S_1 = [F'_1, a]$, $S_2 = [F'_2, a]$ и предположим, что $S_1 = S_2$. Тогда симплексы S_1 и S_2 имеют единственные $(d-1)$-мерные грани F'_1 и F'_2 соответственно, не содержащие a. Поскольку $S_1 = S_2$, из единственности $(d-1)$-мерных граней F'_1 и F'_2 следует, что $F'_1 = F'_2$. Полученное противоречие показывает, что различным $F'_1, F'_2 \in T_{a,2}$ соответствуют различные $[F'_1, a], [F'_2, a] \in T$ и, следовательно, $|T| = |T_{a,2}|$. Лемма 6 доказана.

Следствие 2. *Пусть T является k-пирамидальной триангуляцией d-мерной точечной конфигурации A, $a \in \Gamma_0(S)$ для всех $S \in T$, $a \in \mathrm{int}(F)$ и $F \in \Gamma_k([A])$. Тогда имеют место следующие утверждения*:

1. *Если $k \in \{0, \dots, d-1\}$, то $\Gamma^{\mathrm{int}}_{-1}(T) = \varnothing$, $f^{\imath T}_0 = 0$ и $\gamma^T_d = 0$.*

2. *Если $k = d$, то $T_{a,1} = \varnothing$, $T_{a,2} = \Gamma^{\partial}_{d-1}(T)$, $\Gamma^{\mathrm{int}}_{-1}(T) = \{a\}$, $f^{\imath T}_0 = 1$ и $\gamma^T_d = 1$.*

Рассмотрим точку $c \in \mathbb{R}^d$, $(d-1)$-мерный политоп $F \subset \mathbb{R}^d$ и d-мерный политоп $M \subset \mathbb{R}^d$ такие, что $F \subset \partial(M)$. Говорят, что точка *c расположена над F относительно M*, если c и M лежат в разных полупространствах, соответствующих $\mathrm{aff}(F)$, и $c \notin \mathrm{aff}(F)$. Также говорят, что точка *c расположена под F относительно M*, если c и M лежат в одном и том же полупространстве из двух, соответствующих $\mathrm{aff}(F)$, и $c \notin \mathrm{aff}(F)$.

Симплициальные комплексы C_1 и C_2 назовем *изоморфными*, если между ними можно установить биекцию φ, сохраняющую отношение включения: для любых граней $F_1, F_2 \in C_1$ включение $F_1 \subseteq F_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(F_1) \subseteq \varphi(F_2)$.

Лемма 6. *Пусть $k \in \{0, \dots, d-1\}$, T является k-пирамидальной триангуляцией d-мерной точечной конфигурации A, $a \in \Gamma_0(S)$ для всех $S \in T$, $F \in \Gamma_k([A])$, $a \in \mathrm{int}(F)$, $T_{a,1} = \{F' \in \Gamma^{\partial}_{d-1}(T) \mid a \in F'\}$ и $T_{a,2} = \{F' \in \Gamma^{\partial}_{d-1}(T) \mid a \notin F'\}$. Тогда существует триангуляция $T' \in \mathcal{T}_{d-1}$, симплициальный комплекс $\Gamma(T')$ граней которой изоморфен симплициальному комплексу $\Gamma(T_{a,2})$.*

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать, что $A \subset \mathbb{R}^d$. Рассмотрим точку a', расположенную над всеми симплексами из $T_{a,1}$ относительно M и под всеми симплексами из $T_{a,2}$ относительно M. Ясно, что такая точка a' существует. Положим $M(T_{a,2}) = \bigcup\limits_{S \in T_{a,2}} S$. Для произвольного $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $\overline{x} = (1, x_1, \dots, x_d)$.

Для произвольных $c = (c_1, \ldots, c_{d+1})$ и $c' = (c'_1, \ldots, c'_{d+1})$ из $\mathbb{R}^{d+1}$ введем их скалярное произведение $(c, c') = \sum\limits_{i=1}^{d+1} c_i c'_i$. Поскольку $|T_{a,2}| \neq 0$, существует такой $b \in \mathbb{R}^{d+1}$, что $(b, \overline{a'}) < 0$ и $(b, \overline{v}) > 0$ для каждой $v \in A$. Рассмотрим гиперплоскость

$$\pi = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (b, \overline{x}) = 0\},$$

коническое многообразие $Q = \{a' + \alpha(c - a') \mid \alpha \geqslant 0,\ c \in M(T_{a,2})\}$ и биекцию ψ множества $M(T_{a,2})$ на $\pi \cap Q$, где $\{\psi(x)\} = \pi \cap \{a' + \alpha(x - a') \mid \alpha \geqslant 0\}$ и, следовательно, $\psi(x) = a' - \frac{(b,\overline{a'})}{(b,\overline{x}-\overline{a'})}(x - a')$ для каждого $x \in M(T_{a,2})$. Для всех $F' \in \Gamma(T_{a,2})$ положим $\psi(F') = \{\psi(x) \mid x \in F'\}$. Тогда $T' = \{\psi(S) \mid S \in T_{a,2}\}$ является триангуляцией $(d-1)$-мерной точечной конфигурации $\Phi' = \{\psi(x) \mid x \in \Gamma_0(T_{a,2})\}$. Поэтому $T' \in \mathcal{T}_{d-1}$ и симплициальный комплекс $\Gamma(T')$ граней триангуляции T' изоморфен $\Gamma(T_{a,2})$. Лемма 7 доказана.

Будем говорить, что вектор $f = (f_{-1}, f_0, \ldots, f_d)$ *реализуется* как f-вектор пирамидальной триангуляции точечной конфигурации, если существует такая пирамидальная триангуляция $T \in \mathcal{T}_d$, что $f^T = f$.

2. Соотношения для компонент γ-векторов пирамидальных триангуляций

Получим теперь ряд неравенств, которым удовлетворяют компоненты f-вектора k-пирамидальной триангуляции, на языке взаимно-однозначно соответствующих им компонент γ-векторов данной триангуляции.

Теорема 1. *Пусть $k \in \{0, \ldots, d-1\}$ и T является k-пирамидальной триангуляцией d-мерной точечной конфигурации. Тогда $\gamma_0^T = 1$, $\gamma_{d+1}^T = 0$ и имеют место следующие утверждения*:

(i) $\gamma_d^T = 0$ *и* $\sum\limits_{i=0}^{d} \gamma_i^T \leqslant \left(\sum\limits_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \big(\gamma_i^T - \gamma_{d+1-i}^T\big)(d+1-2i)\right) - (k+1)(d-k)$;

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \big(\gamma_i^T - \gamma_{d-i}^T\big)\left(\binom{d-i}{j-i} - \binom{i}{j-d+i}\right) \geqslant 0$ *при* $j = 1, \ldots, d-1$.

Доказательство. Пусть a — общая вершина для всех симплексов из T и $F \in \Gamma_k([A])$ — такая грань, что $a \in \operatorname{int}(F)$. Тогда из (1) и следствия 1 получаем, что

$$f_d^T = \sum_{i=0}^{d} \gamma_i^T \text{ и } f_{d-1}^{\partial T} = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \big(\big(\gamma_i^T - \gamma_{d+1-i}^T\big)(d+1-2i)\big).$$

Пусть $T_{a,1} = \left\{F' \in \Gamma^{\partial}_{d-1}(T) \mid a \in F'\right\}$ и $T_{a,2} = \left\{F' \in \Gamma^{\partial}_{d-1}(T) \mid a \notin F'\right\}$.

Докажем утверждение (i). Из следствия 2 вытекает, что $\gamma^T_d = 0$. Триангуляция T порождает триангуляцию $T_F \subseteq \Gamma_k(T)$ k-мерной точечной конфигурации $F \cap A$. Заметим, что $F = [F \cap A]$. Так как при этом $a \in \operatorname{int}(F)$, то $a \in \Gamma_0(T_F) \cap \operatorname{int}([F \cap A])$. Пусть

$$T_{F,a} = \{F' \in T_F \mid a \in \Gamma_0(F')\}.$$

Симплексы из $T_{F,a}$ обозначим через $F'_1, \ldots, F'_p$. Из леммы 4 следует, что $p = |T_{F,a}| \geqslant k+1$. Через $F_1, \ldots, F_q$ обозначим $(d-1)$-мерные грани политопа $[A]$, содержащие F. Так как $F \in \Gamma_k([A])$, то $q \geqslant d-k$. Поскольку триангуляция T порождает триангуляции $T_1, \ldots, T_q$ точечных конфигураций $F_1 \cap A, \ldots, F_q \cap A$ соответственно и $F'_i \subseteq F_j$ при $i = 1, \ldots, p$ и $j = 1, \ldots, q$, то при таких i и j существуют $(d-1)$-мерные симплексы $F'_{i,j} \in T_j$, для которых $F'_i \in \Gamma_k(F'_{i,j})$. Так как никакие две различные k-мерные грани $(d-1)$-мерного симплекса не могут лежать в одном и том же k-мерном подпространстве и никакие два $(d-1)$-мерных симплекса, принадлежащие различным $(d-1)$-мерным подпространствам, не могут совпадать, то множество

$$T' = \{F'_{i,j} \mid i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, q\}$$

состоит из pq попарно различных $(d-1)$-мерных симплексов. Из построения множества T' следует, что $T' \subseteq T_{a,1}$. Следовательно, $|T_{a,1}| \geqslant |T'| = pq \geqslant (k+1)(d-k)$. Поскольку

$$f^{\partial T}_{d-1} = \left|\Gamma^{\partial}_{d-1}(T)\right| = |T_{a,1}| + |T_{a,2}|$$

и из леммы 5 следует, что $f^T_d = |T| = |T_{a,2}|$, имеем $f^T_d = f^{\partial T}_{d-1} - |T_{a,1}|$. Таким образом, $f^T_d \leqslant f^{\partial T}_{d-1} - (k+1)(d-k)$ и, следовательно,

$$\sum_{i=0}^{d} \gamma^T_i \leqslant \left(\sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \left(\gamma^T_i - \gamma^T_{d+1-i}\right)(d+1-2i)\right) - (k+1)(d-k).$$

Докажем утверждение (ii). Из леммы 5 следует, что

$$T = \{[F', a] \mid F' \in T_{a,2}\}.$$

Поэтому $\Gamma_0(T) = \Gamma_0(T_{a,2}) \cup \{a\}$ и

$$\Gamma_j(T) = \Gamma_j(T_{a,2}) \cup \{[F'', a] \mid F'' \in \Gamma_{j-1}(T_{a,2})\} \text{ при } j = 1, \ldots, d,$$

где $\Gamma_d(T_{a,2}) = \varnothing$. Следовательно, $f^T(\lambda) = (1+\lambda)f^{T_{a,2}}(\lambda)$. Из леммы 6 получаем, что существует триангуляция $T' \in \mathcal{T}_{d-1}$, симплициальный комплекс $\Gamma(T')$ граней которой изоморфен симплициальному комплексу $\Gamma(T_{a,2})$. Поэтому $f^{T'} = f^{T_{a,2}}$ и $f^{T'}(\lambda) = f^{T_{a,2}}(\lambda)$. Следовательно, $f^T(\lambda) = (1+\lambda)f^{T'}(\lambda)$. Тогда из (1) получаем, что $\gamma^{T'} = \left(\gamma_0^T, \ldots, \gamma_d^T\right)$. Таким образом, из следствия 1 вытекает, что

$$f_{j-1}^{\partial T'} = \sum_{i=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \left(\gamma_i^T - \gamma_{d-i}^T\right) \left(\binom{d-i}{j-i} - \binom{i}{j-d+i}\right) \text{ при } j = 0, \ldots, d-1.$$

Поскольку по лемме 3 $f_{j-1}^{\partial T'} \geqslant \binom{d}{j}$ при $j = 0, \ldots, d-1$ и показано, что $\gamma_d^T = 0$, имеем

$$\sum_{i=1}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \left(\gamma_i^T - \gamma_{d-i}^T\right) \left(\binom{d-i}{j-i} - \binom{i}{j-d+i}\right) \geqslant 0 \text{ при } j = 1, \ldots, d-1.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть T является d-пирамидальной триангуляцией d-мерной точечной конфигурации. Тогда $\gamma_0^T = 1$, $\gamma_{d+1}^T = 0$ и имеют место следующие утверждения*:

(i) $\gamma_d^T = 1$ *и* $\sum\limits_{i=0}^{d} \gamma_i^T = \sum\limits_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \left(\gamma_i^T - \gamma_{d+1-i}^T\right)(d+1-2i)$;

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{j} \gamma_i^T \binom{d-i}{j-i} \geqslant \binom{d}{j-1}$ *при* $j = 1, \ldots, d$.

Доказательство. Так как T — d-пирамидальная триангуляция некоторой d-мерной точечной конфигурации A, то существует такая вершина a, общая для всех симплексов из T, что $a \in \operatorname{int}([A])$. Из (1) и следствия 1 получаем, что

$$f_d^T = \sum_{i=0}^{d} \gamma_i^T \text{ и } f_{d-1}^{\partial T} = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \left(\gamma_i^T - \gamma_{d+1-i}^T\right)(d+1-2i).$$

Как и ранее, положим

$$T_{a,1} = \left\{F' \in \Gamma_{d-1}^{\partial}(T) \mid a \in F'\right\} \text{ и } T_{a,2} = \left\{F' \in \Gamma_{d-1}^{\partial}(T) \mid a \notin F'\right\}.$$

Докажем утверждение (i). Из следствия 2 вытекает, что $\gamma_d^T = 1$ и $T_{a,2} = \Gamma_{d-1}^{\partial}(T)$. Поэтому $|T_{a,2}| = f_{d-1}^{\partial T}$. Из леммы 5 следует, что

$|T| = |T_{a,2}|$. Таким образом,

$$f_d^T = |T| = |T_{a,2}| = f_{d-1}^{\partial T} \text{ и } \sum_{i=0}^{d} \gamma_i^T = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \bigl(\gamma_i^T - \gamma_{d+1-i}^T\bigr)(d+1-2i).$$

Докажем утверждение (ii). Поскольку $T_{a,2} = \Gamma_{d-1}^{\partial}(T)$, по лемме 5 $T = \bigl\{[F', a] \mid F' \in \Gamma_{d-1}^{\partial}(T)\bigr\}$. Поэтому

$$\Gamma_0(T) = \Gamma_0^{\partial}(T) \cup \{a\} \text{ и } \Gamma_j(T) = \Gamma_j^{\partial}(T) \cup \bigl\{[F'', a] \mid F'' \in \Gamma_{j-1}^{\partial}(T)\bigr\}$$

при $j = 1, \ldots, d$, где $\Gamma_d^{\partial}(T) = \varnothing$. Следовательно, $f^T(\lambda) = (1+\lambda) f^{\partial T}(\lambda)$. Тогда из (1) получаем, что $f^{\partial T}(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{d} \gamma_i^T \lambda^i (1+\lambda)^{d-i}$ и, следовательно,

$$f_{j-1}^{\partial T} = \sum_{i=0}^{j} \binom{d-i}{j-i} \gamma_i^T \text{ при } j = 1, \ldots, d.$$

Поскольку по лемме 3 $f_{j-1}^{\partial T} \geqslant \binom{d+1}{j}$ при $j = 1, \ldots, d$, имеем

$$\sum_{i=1}^{j} \gamma_i^T \binom{d-i}{j-i} \geqslant \binom{d}{j-1} \text{ при } j = 1, \ldots, d.$$

Теорема 2 доказана.

3. Пример f-векторов триангуляций политопов, не реализуемых как f-векторы пирамидальных триангуляций точечных конфигураций

Теорема 3. *При $d \geqslant 3$ f-вектор $f^{T(d)}$ триангуляции $T(d)$ из примера 2 не реализуется как f-вектор пирамидальной триангуляции точечной конфигурации.*

Доказательство. Пусть $d \geqslant 3$. Предположим, что вектор $f^{T(d)}$ реализуется как f-вектор пирамидальной триангуляции T некоторой точечной конфигурации A. Тогда $f^T = f^{T(d)}$,

$$\begin{aligned}\gamma^T = \gamma^{T(d)} &= \bigl(\gamma_0^{T(d)}, \gamma_1^{T(d)}, \gamma_2^{T(d)}, \ldots, \gamma_{d-1}^{T(d)}, \gamma_d^{T(d)}, \gamma_{d+1}^{T(d)}\bigr)\\ &= (1, 2, 3, \ldots, 3, 0, 0)\end{aligned}$$

и следовательно,

$$f_d^T = \sum_{i=0}^{d} \gamma_i^T = 3d - 3.$$

Из следствия 1 получаем, что

$$f_{d-1}^{\partial T} = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \left(\gamma_i^T - \gamma_{d+1-i}^T\right)(d+1-2i) = 3d-1.$$

Поскольку $\gamma_d^T = 0$, из следствия 2 вытекает, что T является k-пирамидальной триангуляцией d-мерной точечной конфигурации A, где $k \in \{0, \ldots, d-1\}$. Тогда из теоремы 1 следует, что $3d - 3 \leqslant 3d - 1 - (k+1)(d-k)$. Следовательно, $(k+1)(d-k) \geqslant 2$, что невозможно, так как $d \geqslant 3$ и $k \in \{0, \ldots, d-1\}$. Таким образом, вектор $f^{T(d)}$ не реализуется как f-вектор пирамидальной триангуляции точечной конфигурации. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бренстед А.** Введение в теорию выпуклых многогранников. — М.: Мир, 1988. — 240 с.
2. **Моцкин Т. С., Райфа Х., Томпсон Дж. Л., Тролл Р. М.** Метод двойного описания // Матричные игры. — М.: Физматгиз, 1961. — С. 81–109.
3. **Понтрягин Л. С.** Основы комбинаторной топологии. — М.: Наука, 1986. — 118 с.
4. **Препарата Ф., Шеймос М.** Вычислительная геометрия: Введение. — М.: Мир, 1989. — 478 с.
5. **Черников С. Н.** Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968. — 488 с.
6. **Шевченко В. Н., Груздев Д. В.** Об f-векторах пирамидальных триангуляций точечных конфигураций // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»: Материалы конф. (Владивосток, 7–14 сентября 2007). — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2007. — С. 138. (http://math.nsc.ru/conference/door07/book1.html).
7. **Шевченко В. Н., Груздев Д. В.** Модификация алгоритма Фурье — Моцкина для построения триангуляции // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2003. — Т. 10, № 1. — С. 53–64.
8. **Шевченко В. Н.** О разбиении выпуклого политопа на симплексы без новых вершин // Изв. вузов. Математика. — 1997. — № 12. — С. 89–99.
9. **Burger E.** Über homogene lineare Ungleichungssysteme // Zeitschrift Angewandte Math. und Mech. — 1956. — Bd. 36. — S. 135–139.
10. **Grünbaum B.** Convex polytopes. — New York: Wiley, 1967. — 456 p.
11. **Kleinschmidt P., Smilansky Z.** New results for simplicial spherical polytopes // Discrete and computation geometry. DIMACS Series in discrete mathematics and theoretical computer science. — 1991. — Vol. 6. — P. 187–197.

12. **Lee C. W.** Regular triangulations of convex polytopes // DIMACS Series in discrete mathematics and theoretical computer science. — 1991. — Vol. 4. — P. 443–456.
13. **Ziegler G. I.** Lectures on polytopes. — New York: Springer-Verl., 1994. — 370 p.

Шевченко Валерий Николаевич,
e-mail: shevgru@mail.ru, shev@uic.nnov.ru

Груздев Дмитрий Валентинович,
e-mail: shevgru@mail.ru, gruzdevdv@mail.ru

Статья поступила
1 ноября 2007 г.

Переработанный вариант —
1 мая 2008 г.